Geometrija 1

S.Karasuljić i E.Baraković

Akademska 2016/2017.godina

Silabus

Opšti podaci

Nastavnik nosilac modula

- Dr.sc.Elvis Baraković, docent
- Dr.sc.Samir Karasuljić, docent

Asistentica

- Mr.sc.Sanita Ibrišević, viši asistent

Predavanja $3 \times 15 = 45$
Auditorne vježbe $3 \times 15 = 45$

Ciljevi modula

Upoznavanje i poimanje aksiomatskog sistema (Hilbertov sistem osnova geometrije). Sticanje i razvijanje saznanja o osnovnim geometrijskim objektima i vezama između njih. Razvijanje deduktivnog načina zaključivanja.

Silabus

Očekivani rezultati nastavnog procesa

Shvatanje i prihvatanje aksiomatskog sistema kao baze matematičke teorije. Sposobnost izvođenja sintetičkih dokaza tvrđenja iz elementarne geometrije sličnih onima demonstriranim na predavanjima i vježbama. Sposobnost korištenja geometrijske slike kao pomoćnog sredstva, orijentira.

Silabus

Sadržaj nastavnog procesa

1. **Uvod u aksiomatiku.** Osnovni objekti, osnovne relacije, osnovna tvrđenja (aksiome).
2. **Aksiome incidencije.** Spisak i osnovne posljedice.
3. **Aksiome rasporeda (poretka).** Spisak i osnovne posljedice. Duž, poluprava, poluravan, trougao, mnogougao.
4. **Aksiome podudarnosti.** Spisak i osnovne posljedice. Relacije $<$ i $>$ u skupovima duži i uglova. Nejednakosti u trouglu. Spoljašnji ugao trougla, naporedni, unakrsni i transferzalni uglovi. Prav ugao, normalnost u ravni i prostoru.
5. **Aksiome neprekidnosti.** Spisak i osnovne posljedice. Dedekindov presjek. Sistemi mjerenja duži i uglova. Zbir unutrašnjih uglova trougla.

Silabus

6. **Euklidska aksioma paralelnosti.** Paralelnost u ravni i prostoru. Paralelogram. Srednja linija trougla. Kružnica, periferijski i centralni uglovi.
7. **Transformacije podudarnosti u ravni.** Definicija i osnovni pojmovi. Osna simetrija i prezentacija podudarnosti preko osnih simetrija.
8. **Značajni elementi trougla.** Opisana kružnica. Ortocentar. Težište. Upisane kružnice. Ojlerova prava i kružnica.
9. **Geometrijske konstrukcije.** Lenjir i šestar. Faze konstrukcije. Klasični nerješivi problemi.

Silabus

Ocjenjivanje

U toku semestra studenti imaju pravo da rade dva testa (T1 i T2) i dva kviza (K1 i K2). Testovi se rade nakon odslušanih cjelina a u dogovoru sa predmetnim predavačima i predmetnim asistentom (najava testa najmanje sedam dana prije). Svaki test nosi po 19 bodova i svaki kviz nosi po 6 bodova. Student na predispitnim obavezama može da skupi najviše 50 bodova.

Na prisustvo nastavi student može da osvoji najviše 5 bodova.

Završni ispit nosi 45 bodova i smatra se položenim ukoliko je student osvojio minimalno 20 bodova.

Silabus

Ocjene

Osvojen broj bodova	Ocjena
< 54.00	5
$54 - 63$	6
$64 - 73$	7
$74 - 83$	8
$84 - 93$	9
$94 - 100$	10

Silabus

Literatura

- Osnovna
    1. M. Prvanović, Osnovi geometrije, Građevinska knjiga, Beograd 1980.
    2. R. Točić, V. Petrović, Problemi iz geometrije (metodička zbirka zadataka), Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1995.
- Dopunska
    1. B.Červar, G.Erceg. I.Lekić, Osnove geometrije, klikni ovdje za pdf
    2. D.Lopandić, Geometrija, klikni ovdje za pdf
    3. Z.Lučić, Euklidska i hiperbolična geometrija, Matematički fakultet, Beograd 1994, klikni ovdje za pdf

Uvod u aksiomatiku

Geometrijske (generalno matematičke) ideje ponikle su u veoma davna vremena. Njihovo početno formulacija obično se dovodi u vezu sa prastarim kulturama Egipta i Babilona 20 vijekova p.n.e. U egipatskim papirusima nalazi se mnoštvo matematičkih činjenica, ali ni u jednom slučaju nisu dana nikakva obrazloženja (ili neki dokaz u današnjem smislu). Iz sačuvanih dokumenata geometrija je bila čisto praktičnog oblika i to na zavidnom nivou. Poznavali su formule za površinu trougla, pravouganika i trapeza, površinu kruga su izračunavali s dosta velikom tačnošću pomoću površine kvadrata stranice $\frac{8}{9}$ prečnika kruga (broj π je aproksimiran sa 3.16), znali su i formulu za računanje volumena krnje piramide. Slično Egipćanima, i Babilonci su imali razvijenu geometriju.

Grci su geometriju, u relativno kratkom vremenu, izgradili kao pravu nauku. Prva matematička znanja preuzeli su od Egipćana. Naime, poznato je da je **Tales** iz Mileta (7. p.n.e.), jedan od sedam grčkih mudraca, duže vrijeme živio u Egiptu i da je prenio geometriju u Grčku. Kažu da je on dao i prvi dokaz u istoriji matematike. Dokazao je da prečnik dijeli krug na dva jednaka dijela. Jednostavna i čini se očita tvrdnja, ali genijalnost ideje dokazivanja i jest u tome da je dokaz i takvih, jednostavnih tvrdnji, i moguć i potreban.

U razdoblju od **Talesa** do **Euklida** (3. p.n.e.) grčki matematičari su sakupili dotadašnja znanja, pronašli nova i izoštrili svoje istraživačke metode. Npr., **Pitagora** i pripadnici njegove škole (6. p.n.e.) otkrili su tvrdnju o zbiru uglova trougla, otkrili pravilne poliedre, otkrili vezu među stranicama pravouglog trougla (čuveni Pitagorina teorema), otkrili nesamjerljive veličine. **Platon** (5. p.n.e.) u geometriju unosi deduktivnost i strogu logičnost.
Aristotel (4. p.n.e.), koji je osnivač formalne logike, dao je teorijske osnove na kojima se mogla zasnovati stroga deduktivnost geometrije.

Što su znali iz formalne logike?

[1]Koristićemo naziv teorema, koriste se još i nazivi stav, propozicija, poučak, te korolar za tvrdnju koja je posljedica teoreme i lema za pomoćnu teoremu.

[2]$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P)$

Što su znali iz formalne logike?
Znali su što su to sudovi i algebra sudova, tj. osnovne logičke operacije (logička pravila): negaciju ($\neg$), konjunkciju ($\wedge$), disjunkciju ($\vee$), ekskluzivnu disjunkciju ($\veebar$), implikaciju ($\Rightarrow$), ekvivalenciju ($\Leftrightarrow$), kvantifikatore (za svaki $\forall$, postoji $\exists$).

[1] Koristićemo naziv teorema, koriste se još i nazivi stav, propozicija, poučak, te korolar za tvrdnju koja je posljedica teoreme i lema za pomoćnu teoremu.

[2] $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P)$

Što su znali iz formalne logike?
Znali su što su to sudovi i algebra sudova, tj. osnovne logičke operacije (logička pravila): negaciju ($\neg$), konjunkciju ($\wedge$), disjunkciju ($\vee$), ekskluzivnu disjunkciju ($\veebar$), implikaciju ($\Rightarrow$), ekvivalenciju ($\Leftrightarrow$), kvantifikatore (za svaki $\forall$, postoji $\exists$).
Šta su to tvrdnje [1]? Sve matematičke teoreme su oblika[2]
Ako [pretpostavka (ili hipoteza)], **onda** [zaključak (ili konkluzija)].
Izraženo simbolima, to je teorema oblika

$$P \Rightarrow Q,$$

gdje je P pretpostavka, a Q zaključak.

[1] Koristićemo naziv teorema, koriste se još i nazivi stav, propozicija, poučak, te korolar za tvrdnju koja je posljedica teoreme i lema za pomoćnu teoremu.
[2] $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P)$

U nekim slučajevima teorema se sastoji samo od zaključka. Na primjer, takva je teorema:

Teorema 1.

Dijagonale romba su okomite.

Isticanjem pretpostavke i zaključka lako te teoreme pretvaramo u oblik $P \Rightarrow Q$. Tako je u prethodnoj teoremi
pretpostavka P={četverougao je romb };
zaključak Q={dijagonale romba su okomite};
pa je možemo iskazati na sljedeći način:

Teorema 2.

Ako je dati četverougao romb, tada su njegove dijagonale okomite.

Kada je tvrdnja $P \Rightarrow Q$ istinita?

P	Q	$P \Rightarrow Q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Kada je tvrdnja $P \Rightarrow Q$ istinita?

P	Q	$P \Rightarrow Q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$

Šta čini dokaz ove tvrdnje? Razlikujemo dvije vrste dokaza: **indirektni i direktni**. Indirektni dokaz teoreme $P \Rightarrow Q$ sastoji se u tome da se dokaže da je tvrdnja $\neg Q$ lažna. Među indirektnim dokazima se vrlo često primjenjuju

1. **dokaz po kontrapoziciji** i
2. **dokaz svođenjem na kontradikciju**.

Dokaz po kontrapoziciji zasniva se na ekvivalenciji sudova

$$P \Rightarrow Q \text{ i } \neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Dakle, u dokazu po kontrapoziciji, pretpostavljamo da vrijedi tvrdnja $\neg Q$; te nizom logičkih koraka treba dokazati da je istinita tvrdnja $\neg P$. Ilustrujmo takvu vrstu dokaza primjerima.

Teorema 3.

Ako je a^2 paran broj, onda je i broj a paran.

Dokaz.

Pretpostavka P tvrdnje glasi: $\left\{\text{broj } a^2 \text{ je paran}\right\}$. Zaključak Q tvrdnje glasi: $\{\text{broj } a \text{ je paran}\}$. Pretpostavimo da vrijedi $\neg Q = \{\text{ broj } a \text{ nije paran}\}$. Treba dokazati da vrijedi $\neg P = \left\{\text{broj } a^2 \text{ nije paran}\right\}$. Ako a nije paran, tada je on oblika $a = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je $a^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$, tj. a^2 je neparan, što je i trebalo dokazati. $\square$

Napomenimo da ukoliko je pretpostavka tvrdnje oblika konjunkcije $P = P_1 \wedge P_2$, tada je kontrapozicija oblika $(P_1 \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P_2$ ili $(P_2 \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P_1$. Nije teško iz tabele istinitosti provjeriti da vrijedi $[(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [(P_1 \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P_2]$.

Napomenimo da ukoliko je pretpostavka tvrdnje oblika konjunkcije $P = P_1 \wedge P_2$, tada je kontrapozicija oblika $(P_1 \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P_2$ ili $(P_2 \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P_1$. Nije teško iz tabele istinitosti provjeriti da vrijedi $[(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [(P_1 \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P_2]$.

Teorema 4.

Neka se prave a i b sijeku u tački T. Ako prava c siječe i pravu a i pravu b, a nije komplanarna sa njima, onda ona prolazi kroz tačku T.

Dokaz.

Pretpostavke su

$$P_1 = \{\text{prava } c \text{ siječe i pravu } a \text{ i pravu } b\},$$
$$P_2 = \{\text{prava } c \text{ nije komplanarna sa pravim } a \text{ i } b\},$$

a zaključak je

$$Q = \{\text{prava } c \text{ prolazi kroz tačku } T\}.$$

Pretpostavimo da vrijedi P_1 i
$\neg Q = \{$ prava c ne prolazi tačkom T $\}$. Označimo sa M i N presjek prave c sa pravim a i b, respektivno. Tačke M, N i T su različite. Prava c ne prolazi tačkom T; pa se ni M niti N ne mogu podudarati s tačkom T. Takođe i tačke M i N su međusobno različite tačke jer kad bi bile jednake to bi značilo da je to tačka presjeka sve tri prave, posebice, to bi bio presjek pravih a i b; tj. radilo bi se o tački T; a upravo smo u prethodnoj rečenici obrazložili da se ni M niti N ne mogu podudarati s tačkom T. Uz to, te su tačke i nekolinearne jer je $c(M, N)$, a tačka T ne leži na pravoj c. Dakle, te tri različite nekolinearne tačke određuju jednu ravan kojoj pripadaju prave a, b i c. Dakle, c je komplanarna s pravim a i b. Time smo dobili $\neg P_2 = \{$ prava c je komplanarna s pravim a i b $\}$. Dakle, po proširenoj kontrapoziciji, vrijedi teorema. $\square$

Dokaz svođenjem na kontradikciju (ili dokaz kontradikcijom) (lat. reductio ad absurdum) zasniva se na ekvivalencijama sudova

$$(P \Rightarrow Q) \text{ i } (P \wedge \neg Q) \Rightarrow (A \wedge \neg A) \text{ ili } (P \Rightarrow Q) \text{ i } (P \wedge \neg Q) \Rightarrow F,$$

gdje je sa F označen neistinit (engl. false) sud. Dakle, u dokazu kontradikcijom, pretpostavljamo da vrijedi tvrdnja $(P \wedge \neg Q)$, te nizom logičih koraka dolazimo do neke tvrdnje koja je lažna ili do apsurda, tj. situacije da istovremeno vrijede i tvrdnja A i njezina negacija $\neg A$. Budući da je $A \wedge \neg A$ lažan sud, dovoljno je provjeriti da je

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \wedge \neg Q) \Rightarrow F],$$

tautologija, npr. koristeći tablicu istinitosti.

Teorema 5.

Ako je $a = p_1 p_2 \cdots p_k$ proizvod različitih prostih brojeva, tada je $\sqrt{a}$ iracionalan.

Dokaz.

$P = \{a = p_1 p_2 \cdots p_k$ je proizvod različitih prostih brojeva$\}$,
$Q = \left\{\sqrt{a}\right.$ je iracionalan$\left.\right\}$.
Pretpostavimo da je $a = p_1 p_2 \cdots p_k$ proizvod različitih prostih brojeva, te da je $\sqrt{a}$ racionalan broj (ovo je $P \wedge \neg Q$). Tada postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $\sqrt{a} = \frac{m}{n}$ i da je $M(m, n) = 1$ (Ulogu tvrdnje A iz gore opisane ekvivalencije imaće upravo tvrdnja da su m i n uzajamno prosti brojevi tj. $M(m, n) = 1$).
Sada je $m^2 = an^2$, tj. $n^2 p_1 p_2 \cdots p_k = m^2$. Prost broj p_1 dijeli lijevu stranu prethodne jednakosti pa dijeli i desnu, tj. p_1 dijeli i m. Slijedi da je m oblika $m = p_1 t$. Sada je $n^2 p_1 p_2 \cdots p_k = p_1^2 t^2$, što nakon dijeljenja sa p_1 poprima oblik $n^2 p_2 \cdots p_k = p_1^2 t^2$. Sada zaključujemo da p_1 dijeli desnu stranu jednakosti pa dijeli i lijevu, a budući da su p_i različiti prosti brojevi slijedi da p_1 dijeli i n^2, dakle i n. Zaključujemo da je mjera brojeva m i n barem $p_1 >$, tj. dobili smo da istovremeno vrijedi i negacija tvrdnje $M(m, n) = 1$. Drugim riječima imamo apsurd. Dakle, suprotna tvrdnja $\neg Q$ nije istinita, pa je istinita Q. $\square$

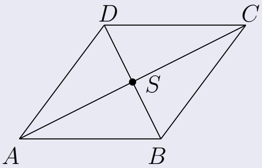
Vratimo se sada **direktnom dokazu.** Kod direktnog dokaza neke tvrdnje Q polazimo od prepostavke P i nizom pravilnog zaključivanja dolazimo do tvrdnje Q.

Teorema 6.

Dijagonale romba su okomite.

Dokaz.

Pretpostavka ovog teorema je da je posmatrani četverougao romb. Definicija romba glasi: romb je paralelogram jednakih stranica. Budući da je romb paralelogram i za njega vrijedi svojstvo da mu se dijagonale polove. Neka je dat romb $ABCD$ i tačku presjeka dijagonala označimo sa S. Posmatrajmo trouglove $\triangle ABS$ i $\triangle BCS$. Imaju zajedničku stranicu $\overline{SB}$, a za ostale stranice vrijedi: $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ (romb ima jednake stranice), $|\overline{AS}| = |\overline{CS}|$ (dijagonale mu se polove). Dakle prema teoremi SSS o podudarnosti trouglova, trouglovi $\triangle ABS$ i $\triangle BCS$ su podudarni, pa su i uglovi $\measuredangle ASB$ i $\measuredangle BSC$ jednaki. Budući da su to susjedni (suplementni) uglovi, slijedi da se radi o pravim uglovima. Dakle $AC \perp BD$, što je i trebalo dokazati. $\square$



Da li je dokaz prethodne teoreme korektan? Jeste ako su nam poznate definicije romba, paralelograma i pravog ugla, te ako znamo da su istinite tvrdnje

* dijagonale paralelograma se polove;
* teoremu *SSS* o podudarnosti trouglova.

Dakle, ukoliko sve to znamo dokaz je valjan. Tu se javlja problem. Želimo li se uvjeriti da je neka tvrdnja (T_1) istinita mi možemo pokazati da ona logički slijedi iz neke tvrdnje (T_2) koja je već dokazana. Ukoliko nije, ili nemamo dokaz te tvrdnje poslužićemo se tvrdnjom (T_3) i pokazati da tvrdnja (T_2) logički slijedi iz tvrdnje (T_3). Opet ostaje utvrditi istinitost tvrdnje (T_3). Nastavljanjem ovog postupka negdje moramo stati i konačno neku tvrdnju uzeti kao istinitu - tu ključnu ulogu igraju aksiomi. Ne može se reći koju tvrdnju treba prihvatiti kao aksiom no potreba za njima je nesumljiva.

Najteže je bilo riješiti se očiglednosti u geometriji koja često pomaže, ali je u aksiomatizaciji geometrije bila smetnja. Očiglednost je svoju ulogu odigrala kod izdvajanja osnovnih pojmova, kod uočavanja tvrdnji koje treba dokazati, ali kod samog dokazivanja se mora potpuno eliminisati. Aksiomatsko zasnivanje bilo koje matematičke teorije u početku traži da se odrede osnovni pojmovi i osnovne tvrdnje - aksiomi. Osnovnim pojmovim i aksiomima odredili smo aksiomatiku te matematičke teorije. Pomoću osnovnih pojmova definišu se svi ostali izvedeni pojmovi te teorije, a sve tvrdnje se izvode iz aksioma. Za sistem aksioma, koji se može proizvoljno odabrati, moraju vrijediti sljedeća načela (ili principi):

1. načelo neprotivrječnosti;
2. načelo potpunosti; i
3. načelo nezavisnosti.

Treba prihvatiti dva zahtjeva kako bi dokaz bio korektan:

* prihvatanje određenih tvrdnji, koje nazivamo aksiomi, koje ne provjeravamo i uzimamo da su istinite (i koji ispunjavaju prethodno navedena načela);
* prihvatanje određenih logičkih pravila.

Slično tome, pojmove u nekoj teoriji uvodimo definicijom preko drugih pojmova čije nam je značenje poznato. No i njih je potrebno odrediti preko jednostavnijih pojmova. Dakako i ovdje negdje moramo stati i neke pojmove moramo jednostavno prihvatiti bez svođenja na neke jednostavnije. Dakle,

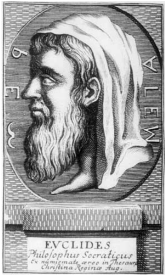
* u svakoj teoriji moramo krenuti od osnovnih (nedefinisanih) pojmova i preko njih definisati sve ostale izvedene pojmove.

Sumirajmo što znači **aksiomatsko zasnivanje** neke matematičke teorije. Treba utvrditi osnovne pojmove, koji su "očigledno jasni" i ne trebaju se definisati, potom odabrati osnovne tvrdnje (aksiomi), tj. tvrdnje koje se dogovorno uzimaju za istinite i ne dokazuju se, a zatim se iz aksioma izvode i dokazuju tvrdnje (teoreme, propozicije, stavovi, pouči, leme, korolari).

Aksiomatska metoda je način ispitivanja kojim se utvrđuje valjanost dobivenih rezultata. Kako matematičari dolaze do njih individualno je, ne zaboravimo da su neki važni rezultati u matematici dani bez valjanog dokaza, ili sa nepotpunim dokazom - nije važno, korektni dokazi su dani kasnije (katkada i puno kasnije). Kako se dolazi do matematičkih otkrića nema univerzanog pravila, no znamo šta je dokaz: to je niz tvrdnji (iskaza, koraka) zajedno s potvrdom istinitosti za svaku, takvih da na kraju dobijemo traženi zaključak.

Ne možemo odgovoriti na pitanje kako otkriti teoremu, no možemo naučiti kako načiniti dokaz. Glavna je tehnika učenje i praksa stečena analizom dokaza drugih autora. Nema ni univerzalne metode za nalaženje dokaza matematičke tvrdnje. Ipak, nekoliko sugestija može pomoći u nalaženju dokaza:

* prvo, treba utvrditi razumiju li se jasno svi pojmovi u iskazu teorema, ako je potrebno zapisati te definicije;
* drugo, treba jasno razumijeti šta su pretpostavke i šta se treba dokazati;
* treće, možda će pomoći prethodno dokazane teoreme;
* četvrto, ukoliko je nađena teorema koja se može primijeniti, provjeriti pažljivo može li se ona zaista primijeniti;
* peto, nacrtati sliku, možda ona pomogne (bar će se vizualizirati problem).



Euklid

Bilo je pokušaja da se sistematizuje i aksimatizuje stečeno matematičko znanje i prije **Euklida**, ali tek je njemu to uspjelo, za tadašnje uslove gotovo savršeno, i vijekovima je njegovo čuveno djelo ***Elementi*** ostalo nepromijenjeno. **Euklid** je živio od oko 330. do oko 275.godine p.n.e. u Aleksandriji, kulturnom i naučnom centru tadašnjeg svijeta. Uz **Arhimeda** i **Apolonija** jedan je tri najveća grčka matematičara. Bio je pristalica Platonove filozofije. Smatra se da je matematičko obrazovanje stekao u Atini kod Platonovih učenika. Svoju je nastavnu i naučnu djelatnost razvio kao osnivač i centralna ličnost matematičke škole ***Museion*** u Aleksandriji. Euklidovi *Elementi* su bili toliko uspješni u izlaganju elementarne geometrije na aksiomatskoj osnovi, da su vijekovima bili nenadmašan uzor stroge dedukcije.

Sve do kraja 18.vijeka, odnosno početka 19. vijeka, *Elementi* su bili osnovni udžbenik geometrije. Nije se sačuvao originalni tekst, niti tekstovi iz Euklidovog vremena koji bi ukazivali na Elemente, već samo prepisi iz kasnijih vijekova u kojima su dodavana poboljšanja i primjedbe. Euklidovi Elementi su došli u Evropu kao prevod sa arapskog početkom 12. vijeka.
Elementi se sastoje iz 13 knjiga, i to

- knjige 1–6 posvećene su planimetriji;
- knjige 7–10 aritmetici i teoriji brojeva u geometrijskoj formi;
  - u knjigama 7–9 je geometrijska teorija cijelih brojeva;
  - knjiga 10 posvećena je iracionalnim brojevima;
- knjige 11–13 posvećene su sterometriji.

Euklid započinje svaku svoju knjigu definicijama onih pojmova koje će koristiti u toj knjizi. Ukupno u svim knjigama ima 118 definicije, od toga u prvoj knjizi ima ih 23. Navedimo neke od definicija:

D-1 Tačka je ono što nema dijelova.

D-2 Linija je dužina bez širine.

D-3 Krajevi linije su tačke.

D-4 Prava linija je ona, koja za tačke na njoj podjednako leži.

D-5 Površina je ono što ima samo dužinu i širinu.

D-6 Krajevi površine su linije.

D-7 Ravan je površina koja za prave na njoj podjednako leži.

Svi pojmovi neke aksimatske teorije moraju se podijeliti na osnovne pojmove, koji se ne definišu, a čija su svojstva implicitno data aksiomama, i na izvedene pojmove koji se definišu na temelju osnovnih pojmova.

Euklidove definicije su u tom smislu jedno od najslabijih mjesta. Euklid želi definisati sve geometrijske pojmove, pa nema istaknutih osnovnih pojmova. U definicijama D-1, D-2, D-5, definiše pojam tačke, prave i ravni preko dužine, širine, a za čiju su definiciju potrebni novi pojmovi, a to je logički nedopustivo. u definicijama D-1 i D-3, pojam tačke se definiše na dva načina, a nigdje nije dokazana ekvivalentnost tih definicija. Definicije D-4 i D-7 su nejasne. Izgleda da je i sam Euklid bio svjestan logičke nedopustivosti prvih sedam definicija, te ih i ne koristi. Ovaj logički nedostatak Euklidove aksiomatike lako je otklonjiv, te definicije treba izostaviti, a pojmove

1. tačka;
2. prava; i
3. ravan

uzeti kao osnovne pojmove.

Bitni nedostatak Euklidove aksiomatike jest nepotpunost tog sistema, koja se ogleda u činjenici da se u dokazima Euklid koristi i odnosima na slikama - koristi se tvrdnjama osnovanim na očiglednosti, a koje se ne mogu dokazati na temelju njegove aksiomatike. Na primjer Euklid često koristi izraze:

1. "tačke A, B; C leže na istom pravcu",
2. "tačka C leži između tačaka A i B";

i intuitivno je jasno o čemu se radi. Ali da bi se razumjeli ti pojmovi potrebno opisati (aksiomima) pojmove incidencija i raspored.

Slijedi dug put do konačnog aksiomatskog zasnivanja geometrije, a to je uradio **D. Hilbert** 1899.godine u djelu `Grundlagen der Geometrie` (Temelji geometrije). Hilbertovom aksiomatikom ćemo se u nastavku baviti i naglasimo da on za osnovne pojmove, pored tačke, prave i ravni uzima za osnovne pojmove relacije

1. incidencije;
2. poretka; i
3. kongruencije.