Popularna matematika

Samir Karasuljić

14. mart 2017.

Uvod

U rekreacionoj matematici, magični kvadrat je $n \times n$ kvadratna mreža (n je broj ćelija ili elemenata u vrsti ili koloni mreže), popunjenih sa (uobičajeno) različitim pozitivnim cijelim brojevima $1, 2, \ldots, n^2$.

Uvod

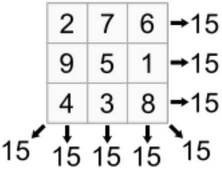
U rekreacionoj matematici, magični kvadrat je $n \times n$ kvadratna mreža (n je broj ćelija ili elemenata u vrsti ili koloni mreže), popunjenih sa (uobičajeno) različitim pozitivnim cijelim brojevima $1, 2, \ldots, n^2$. Magični kvadrati se nazivaju i normalni magični kvadrati. Kod magičnih kvadrata koji ne pripadaju normalnim magičnim kvadratima koriste se i brojevi van opsega $1, 2, \ldots, n^2$. Izraz magični kvadrat koristi i za kvadrate čiji elementi su riječi. (Radimo samo sa magičnim kvadratima čiji su elementi, različiti pozitivni cijeli brojevi $1, 2, \ldots, n^2$).

Red magičnog kvadrata određuje broj elemenata u jednoj vrsti ili koloni.

Red magičnog kvadrata određuje broj elemenata u jednoj vrsti ili koloni.
Magični kvadrati postoje za sve redove $n \geqslant 1$, osim za red $n = 2$, kvadrat reda 1 je, naravno trivijalan. Najmanji netrivijalni magični kvadrat je reda 3.

Red magičnog kvadrata određuje broj elemenata u jednoj vrsti ili koloni.
Magični kvadrati postoje za sve redove $n \geqslant 1$, osim za red $n = 2$, kvadrat reda 1 je, naravno trivijalan. Najmanji netrivijalni magični kvadrat je reda 3.
Suma ovih brojeva je ista u svakoj vrsti koloni i dijagonali. Ovu sumu zovemo magična konstanta ili magična suma M. Ne zahtijeva se da ta suma ima unaprijed određenu vrijednost.

Red magičnog kvadrata određuje broj elemenata u jednoj vrsti ili koloni.
Magični kvadrati postoje za sve redove $n \geqslant 1$, osim za red $n = 2$, kvadrat reda 1 je, naravno trivijalan. Najmanji netrivijalni magični kvadrat je reda 3.
Suma ovih brojeva je ista u svakoj vrsti koloni i dijagonali. Ovu sumu zovemo magična konstanta ili magična suma M. Ne zahtijeva se da ta suma ima unaprijed određenu vrijednost.



Kako odrediti vrijednost magične konstante M za red n?

Kako odrediti vrijednost magične konstante M za red n?
Polazimo od zbira, a koji je suma prvih n^2 članova aritmetičkog niza

$$1 + 2 + \cdots + n^2.$$

Sumu prvih n članova aritmetičkog niza računamo po formuli

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n),$$

odnosno u našem slučaju

$$S_{n^2} = \frac{n^2}{2}(1 + n^2).$$

Na kraju samo podijelimo prethodni rezultat sa brojem vrsta ili kolona n, dobijemo vrijednost magične konstante za red n

$$M(n) = \frac{S_{n^2}}{n} = \frac{n}{2}(n^2 + 1).$$

Za magične kvadrate reda $n = 3, 4, 5, 6, 7$ i 8, magične konstante $M(n)$ su redom: 15, 34, 65, 111, 175 i 260.

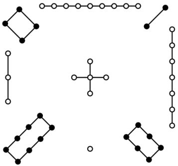
Za magične kvadrate reda $n = 3, 4, 5, 6, 7$ i 8, magične konstante $M(n)$ su redom: 15, 34, 65, 111, 175 i 260.
Jedan magični kvadrat reda 3, 880 magičnih kvadrata reda 4, zatim 275 305 224 magičnih kvadrata reda 5, i približno 1.8×10^{19} magičnih kvadrata reda 6 (bez rotacije i refleksije).

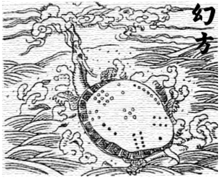
Istorijat

Magični kvadrati su bili poznati kineskim matematičarima još od 650 p.n.e., te arapskim matematičarima vjerovatno i prije 7.vijeka n.e. Prvi magični kvadrat reda 5 i 6 pojavljuje se u enciklopediji iz Bagdada oko 983.godine n.e. - Enciklopedija Braće od Čistoće (Rasa'il Ihkwan al-Safa). Jednostavniji magični kvadrati bili su poznati ranijim arapskim matematičarima. Kasnije, arapski iluzionisti i mađioničari koristili su neke od ovih kvadrata zajedno sa "magičnim slovima".

Istorijat

Kina. (Lo Shu kvadrat, red 3) Po legendi nastaloj ranije od 650 p.n.e. Lo Shu (priča o rijeci Lo), prilikom velike poplave u drevnoj Kini, veliki car Yu pokušavao je da vodu usmjeri ka moru, dok je kornjača je napravila magični kvadrat 3.





4	9	2
3	5	7
8	1	6

Po legendi, poslije toga ljudi su koristeći taj obrazac, nekako uspijevali da kontrolišu rijeku.

Persija. Mada samo pojavljivanje, odnosno rana istorija magičnih kvadrata u Persiji nije poznata, postoje naznake da su znali za njih prije dolaska Islama u Persiju. Proučavanje magičnih kvadrata je bilo uobičajeno u srednjovjekovnom Islamu. U 10. vijeku perzijski matematičar Buzjani napisao je djelo. U ovom rukopisu na strani 33 data je serija magičnih kvadrata. Elementi ovih magičnih kvadrata su članovi aritmetičkog niza.

Arabija. Magični kvadrati su bili dobro poznati islamskim matematičarima u Arabiji od 7.vijeka n.e. Znanja o magičnim kvadratima možda su dobili iz Indije od indijskih astronoma i matematičara, a druga je mogućnost da su ove ideje došle iz Kine. Već je pomenuto da su se prvi magični kvadrati 5 i 6 reda pojavili u enciklopediji iz Bagdada.

Indija. Magični kvadrat 3 je dio rituala od Vedijskog perioda, do danas. U hramu Parshvanath u Khajuraho u India još od 10.vijeka na zidu je 4×4 magični kvadrat

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Poznat je kao Chautisa Yantra, $M = 34$.
Kubera-Kolam je magični kvadrat reda 3 (nije normalni, brojevi nisu oblika $1, 2, \ldots, n^2$), koji se uobičajeno slika na podovima u Indiji. Samo je dodano 19 svakom broju u Lo Shu kvadratu, te je sada magična konstanta 72.

23	28	21
22	24	26
27	20	25

23	28	21
22	24	26
27	20	25

Evropa. Grčki naučnik Manuel Moschopoulos, 1300.godine na osnovu rada arapskog naučnika Al-Bunija, napisao je matematičku raspravu o magičnim kvadratima, ali bez misticizma koje je bilo prisutno u radu Al-Bunija. Prije Moschopoulosa, o magičnim kvadratima na Zapadu, u Biblioteca Vaticana (1283.godine) pojavio se rukopis Alfonsoa X od Castille. Magični kvadrati pojavljuju se u Italiji u 14.vijeku, posebno u Florence (Firenca). Magični kvadrati 6 i 9 reda pojavljuju se u rukopisima Trattato d'Abbaco (Treatise of the Abacus - Rasprava o Abakusu) od Paolo dell'Abbaco. Zatim rukopis od Luca Pacioli. Veza između sedam planeta i magičnih kvadrata.

23	28	21
22	24	26
27	20	25

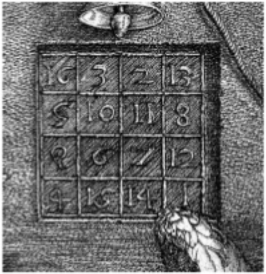
Evropa. Grčki naučnik Manuel Moschopoulos, 1300.godine na osnovu rada arapskog naučnika Al-Bunija, napisao je matematičku raspravu o magičnim kvadratima, ali bez misticizma koje je bilo prisutno u radu Al-Bunija. Prije Moschopoulosa, o magičnim kvadratima na Zapadu, u Biblioteca Vaticana (1283.godine) pojavio se rukopis Alfonsoa X od Castille. Magični kvadrati pojavljuju se u Italiji u 14.vijeku, posebno u Florence (Firenca). Magični kvadrati 6 i 9 reda pojavljuju se u rukopisima Trattato d'Abbaco (Treatise of the Abacus - Rasprava o Abakusu) od Paolo dell'Abbaco. Zatim rukopis od Luca Pacioli. Veza između sedam planeta i magičnih kvadrata.

Albrecht Dürer ovjekovječio je 1514.godine, magični kvadrat reda 4 u svom djelu Melencolia I.

Albrecht Dürer

i njegov magični kvadrat

U gornjem desnom uglu Direrovog crteža koji prikazuje melanhoniju, vidi se magični kvadrat koji je on smislio.



Izgleda ovako.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Šta je tu magično?
Broj 34!

Taj broj je zbir raznih polja u okviru magičnog kvadrata.

Podjela i konstrukcija

Pri formiranju magičnog kvadrata reda n koristimo dva niza brojeva: prvi niz je $1, 2, \ldots, n$, a drugi niz je $0, n, 2n, \ldots, n(n-1)$. Prilikom korištenja ove metode razlikujemo četiri slučaja

1. n je neparan i nije djeljiv sa 3;
2. n je neparan i djeljiv je sa 3;
3. n je djeljiv sa 4;
4. n je paran i nije djeljiv sa 4.

Neparni red i nije djeljiv sa 3

Neka je $n = 5$. Formiramo dva niza brojeva, i to: prvi niz $1, 2, 3, 4, 5$ te $0, 5, 10, 15, 20$. Zatim formiramo dva pomoćna kvadrata petog reda. U prvi red prvog kvadrata upišemo prvih pet prirodnih brojeva po bilo kom redoslijedu. Zatim u drugi red upisujemo iste brojeve, ali počinjući sa brojem koji se nalazi iza srednjeg broja u prvom redu. Ovo ponovimo i za preostala tri reda. Tako dobijamo prvi kvadrat. U prvi red drugog kvadrata upisujemo brojeva iz drugog niza, opet po bilo kom redoslijedu. Drugi red popunjavamo slično kako kod prvog kvadrata, samo što sada krećemo od srednjeg elementa. Po popunjavanju drugog kvadrata elementima, na opisani način, treći kvadrat dobijemo kako što saberemo elemente na istim pozicijama u ova dva prethodno dobijena kvadrata.

Neparni red i nije djeljiv sa 3

3	1	5	2	4
2	4	3	1	5
1	5	2	4	3
4	3	1	5	2
5	2	4	3	1

10	0	5	20	15
5	20	15	10	0
15	10	0	5	20
0	5	20	15	10
20	15	10	0	5

Prvi i drugi pomoćni kvadrat

13	1	10	22	19
7	24	18	11	5
16	15	2	9	23
4	8	21	20	12
25	17	14	3	6

Magični kvadrat reda 5

Neparani red djeljiv sa 3

Da bi se formirao magični kvadrat reda npr. 9, opet se formiraju dva niza brojeva: **1**, 2, 3, **4**, 5, 6, **7**, 8, 9 za prvi te 0, 9, **18**, 27, 36, **45**, 54, 63, **72** za drugi kvadrat. Pomoću tih nizova opet se popune dva pomoćna kvadrata istim postupkom kao u prethodnom slučaju, ali se moraju poštovati sljedeća pravila:

1. U prvom nizu se napravi zbir od svakog trećeg broja počevši od prvog (boldovani brojevi) te tako dobiveni zbir mora iznositi
$$S' = \frac{n(n+1)}{6}.$$
Ostali brojevi mogu se razmjestiti po volji. Tako dobijemo niz npr. 1, 9, 4, 6, 5, 2, 8, 7, 3.
2. U drugom nizu se sabira svaki treći broj počevši od zadnjeg (boldovani brojevi) te taj zbir mora iznositi
$$S'' = \frac{n^2(n-1)}{6}.$$

Ostali brojevi se razmjeste po volji. Tako dobijemo niz npr. 18,54, 9, 45, 63, 27, 0, 36, 72. Sa tako dobivenim nizovima postupamo kao u prethodnom slučaju te dobijemo magični kvadrat reda 9.

Neparani red djeljiv sa 3

19	63	13	51	68	29	8	43	75
65	35	7	39	73	27	58	15	50
81	22	60	14	47	71	32	3	37
53	70	30	1	45	76	24	59	11
40	78	23	56	17	52	66	28	9
16	48	64	36	4	42	77	20	62
6	41	74	26	61	12	46	72	31
57	10	54	67	33	5	38	80	25
32	2	44	79	21	55	18	49	69

Magični kvadrat reda 9

Parni red, djeljiv sa 4

Prvi niz: 1,2,3,4,5,6,7,8; drugi niz: 0,8,16,24,32,40,48,56
U prvi red prvog kvadrata upišemo brojeve prvog niza, tako da zbir prvog i zadnjeg broja bude jednak zbiru drugog i predposljednjeg, itd. U drugi red kvadrata upišemo iste brojeve, ali u obrnutom redoslijedu. Druga polovina kvadrata je "osno" simetrična prvoj horizontalno. Brojeve drugog kvadrata unosimo slično, samo što ih raspoređujemo po kolonama.

2	8	5	6	3	4	1	7
7	1	4	3	6	5	8	2
2	8	5	6	3	4	1	7
7	1	4	3	6	5	8	2
7	1	4	3	6	5	8	2
2	8	5	6	3	4	1	7
7	1	4	3	6	5	8	2
2	8	5	6	3	4	1	7

56	0	56	0	0	56	0	56
24	32	24	32	32	24	32	24
40	16	40	16	16	40	16	40
8	48	8	48	48	8	48	8
48	8	48	8	8	48	8	48
16	40	16	40	40	16	40	16
32	24	32	24	24	32	24	32
0	56	0	56	56	0	56	0

Sabiranjem ova dva pomoćna kvadrata dobijamo magični kvadrat reda 8.

Magični kvadrat reda 8

58	8	61	6	3	60	1	63
31	33	28	35	38	29	40	26
42	24	45	22	19	44	17	47
15	49	12	51	54	13	56	10
55	9	52	11	14	53	16	50
18	48	21	46	43	20	41	23
39	25	36	27	30	37	32	34
2	64	5	62	59	4	57	7

Magični kvadrat reda 8

Paran red, nije djeljiv sa 4

Najprije sastavimo kvadrat istim postupkom kao da je red djeljiv sa 4. Elemente na dijagonalama treba ostaviti na svojim mjestima. Zatim treba zamijeniti:

1. U prvom redu: drugi element s drugim od kraja, treći sa trećim od kraja itd. sve dok ne zamijenimo i srednje elemente. Isti postupak primijenimo i na prvu kolonu.
2. Srednje elemente u drugom i zadnjem redu te drugoj i zadnjoj koloni.
3. Rubne elemente u srednjem redu (bilo kojem) i srednjoj koloni (takođe bilo kojoj).

Ovim transformacijama dobijemo magični kvadrat reda 6.

Paran red, nije djeljiv sa 4

29	12	27	28	7	26
2	31	4	3	36	5
17	24	15	16	19	14
23	18	21	22	13	20
32	1	34	33	6	35
11	30	9	10	25	8

29	7	28	27	12	26
32	31	3	4	36	5
23	18	15	16	19	20
17	24	21	22	13	14
2	1	34	33	6	35
11	30	10	9	25	8

29	7	28	9	12	26
32	31	3	4	36	5
23	18	15	16	19	20
14	24	21	22	13	17
2	1	34	33	6	35
11	30	10	27	25	8