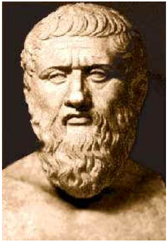
# Matematički paradoksi

Kroz istoriju matematike, od antičkih vremena do danas, pojavljivali su se brojni problemi, kontradikcije i paradoksi, koji su doveli do preispitivanja tada prevladajućih teorija, poticali traženje novih rješenja, te zaokupljajući misli tadašnjih matematičara ostavili svoj trag u istoriji matematike. Neki od njih su samo logički trikovi, neki su matematički tačne tvrdnje koje se intuitivno čine pogrešnima, a neki su ukazali na nepotpunosti u samim temeljima matematičkih teorija, zahtijevajući vrlo kreativno razmišljanje.

Kada u običnom govoru kažemo da je nešto paradoksalno, podrazumijevamo da je to "nešto" neostvarivo ili da je nemoguće. Paradoks predstavlja rasuđivanje koje nas obavezno dovodi do protivrječnosti, bez obzira koliko nam polazne pretpostavke izgledale tačne, a pravila rasuđivanja ispravna.

# Matematički paradoksi

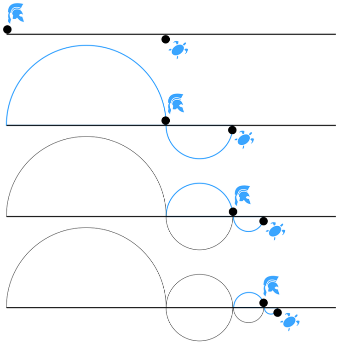
Paradoksi se pojavljuju već u Staroj Grčkoj, ali što je jako bitno, njihovim rješavanjem dolazilo je do naglog razvoja određene matematičke discipline.



Zenon

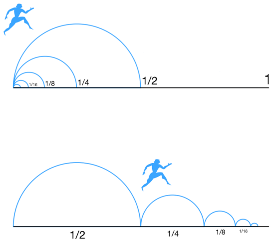
Zenon (490–430.p.n.e.) bio je učenik Parmenida, osnivača Elejske filozofske škole. Zenon uzeo je sebi zadatak da argumentima potkrepi Parmenidove tvrdnje o prividnosti promjena, kretanja i mnoštva. Prvi je ukazao na paradoks koji ruši sam temelj logike našeg uma. Zenon je smišljao paradokse koji su govorili da su pojmovi koje smo formulisali opisujući čulni svet u sebi protivrječni i relativni.

# Matematički paradoksi



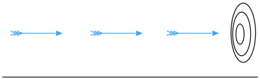
**Ahil i kornjača.** U njemu on pokazuje da u nekoj trci između brzonogog Ahila i jedva pokretne kornjače, koja ima malu prednost na startu, Ahil nikada ne može stvarno da prestigne kornjaču. Kada Ahil dostigne polaznu tačku sa koje je krenula kornjača, ona je već prešla na drugu tačku. Rastojanje između Ahila i kornjače će se neprestano smanjivati, ali Ahil nikada neće stići kornjaču jer će kornjača uvek biti ispred Ahila za onoliko koliko je u međuvremenu prešla od staze, i tako u nedogled.

# Matematički paradoksi




**Dihotomija.** Dihotomija je riječ grčkog porijekla ($\delta\iota\chi o$ – na dva dijela + $\tau o\mu\acute{\iota}\alpha$ - sječenje) Kretanje je nemoguće jer "ono što je u pokretu mora prvo preći pola puta pre nego što stigne do cilja". Zamislimo tijelo koje treba da preće neki put. Prvo treba da pređe polovinu tog puta, a prije prelaska prve polovine, mora preći polovinu polovine, tj. prvu četvrtinu puta, pa onda osminu i tako u nedogled. Pa prema ovakvom rasuđivanju kretanje nikada neće ni početi. Druga verzija istog paradoksa, kaže da tijelo prvo mora proći, $1/2$ puta, pa $1/4\ldots$ Pa nikada tijelo neće doći do cilja.

# Matematički paradoksi



**Paradoks strijele.** Ako strijela koja leti u svakom pojedinačnom trenutku zauzima određeni položaj u prostoru, što znači da miruje, a nije razumno misliti da "zbir" mirovanja može da bude kretanje. Što znači da je to privid čula, i da kretanje zapravo ne postoji.

# Matematički paradoksi

**Paradoks lažljivca.** Ovaj paradoks izveden je iz poznate konstrukcije kritskog filozofa Epimenida

"Ja sam krićanin, a svi krićani lažu."

Prema nekim istoričarima, ovaj paradoks prvi je formulisao Eubulid iz Mileta (4.vijek p.n.e.), u obliku

"Čovjek ne laže. Da li je to što govori istinito ili lažno. "

Posmatrajmo jednu od verzija ovog paradoksa, sljedeću rečenicu

"Ja lažem."

Ako je ona istinita, onda ja lažem, pa je ta rečenica lažna. Ako je ona lažna, onda ja ne lažem, pa je ona istnita. Dakle, ova rečenica je i istinita i lažna.

# Matematički paradoksi

Vratimo se sada matematičkim paradoksima, u prvom redu paradoksima u teoriji skupova. Temelje teorije skupova u 19.vijeku postavili su Bolzano[1], Du Bois-Reymond (Dibua-Rejmon) [2] i Dedekin[3]. Oni su proučavali "konkretne" skupove, kao što su skupovi brojeva ili skupovi funkcija. Tek je Cantor[4] počeo da proučava skupove sa proizvoljnim elementima. U periodu od 1871. do 1883.godine objavljuje niz radova kojim je izgradio teoriju kardinalnih i ordinalnih brojeva, ako i teoriju dobro uređenih skupova, te se zato smatra osnivačem teorije skupova.

[1] Bernard Bolzano (1781.–1848.godine), češki matematičar, logičar, teolog i katolički sveštenik

[2] Paul David Gustave Du Bois-Reymond (1831.–1889.godine), bio je njemački matematičar

[3] Richard Dedekind (1831.–1916.godine), bio je njemački matematičar koji je dao veliki doprinos u razvoju apstraktne algebre, algebarske teorije brojeva, te teoriji realnih brojeva

[4] Georg Cantor (1845.–1918.godine), njemački matematičar, utemeljivač

# Matematički paradoksi

U početku izgrađivanja svoje teorije Cantor nije imao eksplicitno iskazane aksiome. Ispitivanjem dokaza njegovih teorema da se primjetiti da se sve njegove teoreme mogu dokazati pomoću tri aksioma

1. **Aksiom jednakosti.** Dva skupa su jednaka ako i samo ako imaju iste elemente.
2. **Aksiom apstrakcije.** Za svako svojstvo postoji skup koji čine tačno oni objekti koji to svojstvo imaju.
3. **Aksiom izbora.** Za svaku familiju A nepraznih disjunktnih skupova, postoji funkcija $f$ (tzv. izborna funkcija), koja svakom skupu $X$ iz $A$ dodjeljuje po jedan njegov element.

# Matematički paradoksi

Interesovanje za teoriju skupova poraslo je među matematičarima krajem 19. i početkom 20. vijeka kada su otkriveni paradoksi u Cantorovoj teoriji. Sam Cantor 1895.godine uočava prvi paradoks. Cantor ga iznosi u prepisci sa Hilbertom ali ga ne objavljuje. Paradoks se odnosi na prilično tehnički dio teorije dobro uređenih skupova, nadao se da bi uz male ispravke u nekim dokazima mogao izbjeći ovo neugodno pojavljivanje. Kroz dvije godine 1897. isti problem uočava Burali -Forti[5] i objavljuje ovaj paradoks i danas je poznat po njemu.

[5] Cesare Burali-Forti (13. avgust 1861.–21.januar 1931.) bio je italijanski matematičar.

# Matematički paradoksi

**Burali–Fortijev paradoks.** Skup svih ordinala $W$ je dobro uređen skup i on ima ordinal veći od bilo kog ordinala iz $W$. A to bi značilo da je $W$ veći od svih ordinala, pa i samog sebe.

**Cantorov paradoks iz 1899.** Za ovaj paradoks neki matematičari su znali i ranije. Po Cantorovoj teoriji, partitivni skup nekog skupa ima kardinalni broj veći od kardinalnog broja samog skupa. Ako sa $U$ obilježimo skup svih skupova, tada $P(U)$ ima veći kardinalni broj od $U$, a to je nemoguće jer je $P(U) \subseteq U$.

# Matematički paradoksi

**Russellov paradoks.**[6] Cantor je pod skupom podrazumijevao kolekciju objekata koji imaju neku zajedničku osobinu. Ta osobina može biti proizvoljno određena. Na primjer, zajednička osobina neke kolekcije objekata može biti to što ti objekti pripadaju baš toj kolekciji. Prema akiomu apstrakcije postoji skup svih skupova. Zaista posmatrajmo osobinu "biti skup", na osnovu Cantorove pretpostavke, postoji skup svih objekata koji imaju tu osobinu, koji su, dakle, skupovi. Elementi nekog skupa i sami mogu biti skupovi. Tako skup svih skupova prirodnih elemenata ima elemente koji su skupovi. Skupovi najčešće ne pripadaju samom sebi. Na primjer, skup svih prirodnih brojeva nije prirodan broj, pa prema tome, nije ni svoj element. Međutim, po Cantoru (aksiom apstrakcije), ima skupova koji sami sebi pripadaju. Na primjer, skup svih skupova je skup, pa je u samom sebi sadržan kao element.

[6] Bertrand Arthur William Russell (18.maj 1872.–2.februar 1970.godine), bio je britanski matematičar, logičar,filozof, istoričar, pisac, politički aktivista i dobitnik Nobelove nagrade.

# Matematički paradoksi

Podijelimo skup svih skupova na dva dijela:

1. Na skup $X$ onih skupova koji pripadaju samom sebi; i
2. Na skup $Y$ onih skupova koji ne pripadaju samom sebi.

Podjela skupa svih skupova je isrcpna, tj. svaki skup pripada ili skupu $X$ ili skupu $Y$. Zapitajmo se sada kojem od ovih skupova $X$ i $Y$ pripada skup $Y$. Ako $Y$ pripada $Y$, onda na osnovu definicije skupa $X$, skup $Y$ pripada skupu $X$. Ako skup $Y$ ne pripada skupu $Y$, onda na osnovu definicije skupa $Y$, skup $Y$ pripada skupu $Y$.

# Matematički paradoksi

**Grelling–Nelson paradoks.** Grelling[7] i Nelson[8] 1908. godine konstruišu sljedeći paradoks. Pridjev koji ima svojstvo koje on sam označava zove se autološki, a pridjev koji nema svojstvo koje on sam označava zove se heterološki. Pogledajmo sada pridjev `heterološki`. Ako je on autološki, onda je on heterološki, ali kao je heterološki, onda je on autološki. Dakle, pridjev heterološki je i autološki i heterološki.

[7] Kurt Grelling (2.mart 1886.–september 1942. godine) bio je njemački logičar i filozof.

[8] Leonard Nelson (11 juli 1882.–29.oktobar 1927.godine) bio je njemački matematičar i filozof.

# Matematički paradoksi

1