

1 Test 2

1.1 Dvojni integral

1. Odrediti granice integracije u oba poretka $\iint_D dx dy$, ako je oblast D ograničena sa $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ i $x = 0$.
2. Izračunati $\int_0^\pi dx \int_0^{\pi/4} f(x, y) dy$;
3. Promijeniti redoslijed integracije $\int_0^2 dx \int_{2x}^x f(x, y) dy$;
4. Promijeniti redoslijed integracije $\int_0^1 dx \int_{2x}^{x^2} f(x, y) dy$;
5. Promijeniti redoslijed integracije $\int_0^1 dx \int_{2-x}^x f(x, y) dy$;
6. Izračunati $\int_1^2 dx \int_0^1 e^{x+y-1} dy$.
7. Izračunati integral $\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} \cos(x+y) dy$.
8. Izračunati integral $\iint_D x dx dy$, ako je D oblast zadana sa parabolama $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ i $x = 0$.
9. Izračunati integral $\iint_D (x+y) dx dy$, ako je D oblast zadana sa $x = 1$, $y = 0$ i $y = x^2$.
10. Izračunati integral $\iint_D (xy + y^2) dx dy$, ako je D oblast zadana sa parabolama $y = x^2$ i $x = y^2$.
11. Izračunati integral $\iint_D (x + y^2) dx dy$, ako je D oblast zadana sa $y = 0$, $x = 1$ i $y = 2x$.
12. Izračunati integral $\iint_D (2x - y) dx dy$, ako je D oblast zadana sa parabolama $y \geq x$ i $x^2 + y^2 \leq 4$.
13. Izračunati integral $\iint_{x^2+y^2 \leq 2x} (x^2 + y^2) dx dy$.
14. Izračunati integral $\iint_{x^2+y^2 \leq -2y} (x^2 + y^2) dx dy$.
15. Izračunati integral $\iint_D \sin(x+y) dx dy$, ako je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi \wedge 0 \leq y \leq \pi\}$.
16. Izračunati integral
 - (a) $\iint_D x \sin y dx dy$ pri čemu je D ograničena sa $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, $0 \leq y \leq 2x$.
 - (b) Izračunati integral pod (a) zamijenivši poredak integracije.
17. Izračunati $\iint_S \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$, gdje je S oblast omeđjena sa $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 4$;
18. Izračunati $\iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy$, gdje je $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.
19. Izračunati $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ pri čemu je $D = \{(x, y) : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$.

20. Izračunati $\iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ pri čemu je D dio kružnog prstena omeđen sa $x^2 + y^2 = \pi^2$ i $x^2 + y^2 = 4\pi^2$ u prvom kvadrantu.
21. Izračunati $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2) \left(1 + \sqrt[4]{x^2 + y^2}\right)}$, pri čemu je D ograničena sa $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $y = x$, $y = -x$ i $y \geq 0$.
22. Izračunati površinu lika ograničenu sa $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 6x$, $y = -x$, $y = 0$.
23. Izračunati površinu lika ograničenu sa
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \geq 0 \\ x^2 + y^2 + 4x \leq 0 \\ y \leq -x \\ y \geq 0. \end{cases}$$
24. Izračunati površinu manjeg lika ograničenu sa krivim $x^2 + y^2 = 16$, $6x = y^2$.
25. Izračunati površinu lika omeđenu sa pravcima $y = 0$, $y = x$ i kružnicom $x^2 + y^2 = 2x$.
26. Izračunati površinu lika omeđenu sa $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y = x$ i kružnicom $x^2 + y^2 = 4x$.
27. Izračunati površinu lika omeđenu sa $y = -\sqrt{3}x$, $x = 0$ i kružnicom $x^2 + y^2 = 2y$.
28. Izračunati površinu lika omeđenu sa $y = \sqrt{3}x$, $x = 0$ i kružnicom $x^2 + y^2 = 9x$.
29. Izračunati površinu lika omeđenu sa $y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x$ i $x^2 + y^2 \leq 4x$, $x^2 + y^2 \geq 2x$.
30. Izračunati integral $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} dx dy$, gdje je D oblast ograničena sa $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$.
31. Izračunati površinu lika omeđenu sa $|x| + |y| = 1$.
32. Izračunati zapreminu tijela ograničenog sa površima $z = x^2 + y^2 - 1$ i $z = 3 - x^2 - y^2$.
33. Izračunati zapreminu tijela ograničenog sa površima $z = 3 - x^2 - y^2$ i $z = x^2 + y^2$.
34. Izračunati zapreminu tijela ograničenog sa eliptičkim paraboloidima $z = 3x^2 + 3y^2$ i $z = 4 - x^2 - y^2$.
35. Izračunati zapreminu tijela ograničenog $z^2 = x^2 + y^2$ i $z = 6 - x^2 - y^2$.
36. Izračunati zapreminu tijela ograničenog $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $z = x^2 + y^2 - 6$.

1.2 Trojni integral

- Izračunati $\iiint_D (x + y) dx dy dz$, gdje je D omeđeno sa koordinatnim osama i ravni $2x + y + z = 4$.
- Izračunati $\int_D \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz$, gdje je ograničeno sa $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- Izračunati $\iiint_D \frac{dx dy dz}{1 - x - y}$, gdje je D oblast ograničena sa $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $x + y + z = 1$.
- Izračunati $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^2}$, gdje je oblast V omeđena sa ravnima $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $x + y + z = 1$.
- Koristeći trojni integral izračunati zapreminu tijela ograničenog elipsoidom $3x^2 + 4y^2 + 6z^2 = 12$.
- Koristeći trojni integral izračunati zapreminu gornje polusfere $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $z \geq 0$.
- Izračunati $\iiint_D y dx dy dz$, pri čemu je D oblast omeđena sa $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $x + y + z = 1$.
- Izračunati $\iiint_D z dx dy dz$, pri čemu je D oblast omeđena sa $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $z = 4$.

9. Izračunati integral $\iiint_D x\sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$, gdje je D omeđjena cilindrom $x^2 + y^2 = 1$, te ravnima $z = 0$ i $z = 1$.
10. Izračunati integral $\iiint_D z\sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$, gdje je D omeđjena cilindrom $x^2 + y^2 = 16$, te ravnima $z = 1$ i $z = 5$.
11. Izračunati integral $\iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz$, gdje je D omeđjena sferom $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, u prvom oktantu.
12. Izračunati integral $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, gdje je D omeđjena sferom $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.
13. Izračunati integral $\iiint_D z^2 dx dy dz$, gdje je D omeđjena sferama $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ u prvom oktantu.
14. Izračunati integral $\iiint_D x^2 dx dy dz$, gdje je D omeđjena sferom $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
15. Izračunati zapreminu tijela ograničenog sa površima $z = x^2 + y^2 - 1$ i $z = 3 - x^2 - y^2$.
16. Izračunati zapreminu tijela ograničenog sa površima $z = x^2 + y^2 - 9$ i $z = 0$.
17. Koristeći trojni integral izračunati zapreminu tijela ograničenu sa elipsoidom $3x^2 + 4y^2 + 6z^2 = 12$.
18. Izračunati zapreminu tijela ograničenog sa površima $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i $3z = x^2 + y^2$, (unutrašnji dio paraboloida).

1.3 Linijski integral. Cirkulacija vek.polja. Fluks vek. polja. Greenova, Stokesova i Gauß–Ostogradsky teorema

1. Izračunati $\int_L (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$, gdje je L kontura površine ograničene sa $y = x^2$ i $x = y^2$.
2. Izračunati $\int_L (2xy - x^2) dx + (2x^2 - y^3) dy$, gdje je L kontura površine ograničene sa $y = \sqrt{x}$ i $x = y$.
3. Izračunati linijski integral $\int_L \left(\frac{-y}{x+y} \right) dx + \left(\frac{x}{x+y} \right) dy$ gdje je L kontura trougla koji obrazuje prava $x + y = 1$ sa koordinatnim osama. Konturu obilazimo u pozitivnom smjeru.
4. Izračunati linijski integral $\int_L \frac{x+y}{x^2+y^2} dx - \frac{x-y}{x^2+y^2} dy$, gdje je L kružnica $x^2 + y^2 = a^2$ predjena suprotno od smjera kretanja kazaljke na satu.
5. Izračunati linijski integral $\int_L y^2 ds$, gdje je L gornja polovina kružnice $x^2 + y^2 = 9$ između tačaka $A(3, 0)$ i $B(0, 3)$.
6. Izračunati integral $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, gdje je L kružnica $x^2 + y^2 = ay$.
7. Izračunati integral $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, gdje je L kružnica $x^2 + y^2 = 6x$.
8. Izračunati integral $\int_L y^2 dx - x^2 dy$, gdje je L kružnica poluprečnika 1 sa centrom u tački $A(1, 0)$.
9. Izračunati integral $\int_L xy^2 ds$, gdje je L gornja polukružnica, kružnice $x^2 + y^2 = 4$.
10. Izračunati integral $\int_L x^2 ds$, gdje je L dio kružnice $x^2 + y^2 = 4$ između tačaka $A(2, 0)$ i $B(0, 2)$.
11. Izračunati integral $\int_L x ds$, gdje je L luk parabole $y^2 = x$ od tačke $O(0, 0)$ do tačke $A(1, 1)$.

12. Izračunati integral $\oint_L \frac{-x}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, po putanji koja predstavlja kružnica $(x - 3)^2 + y^2 = 1$.
13. Izračunati integral $\int_L \frac{-y}{x + y} dx + \frac{x}{x + y} dy$, gdje je L kontura trougla koji obrazuje prava $x + y = 1$ sa koordinatnim osama. Konturu obilazimo u pozitivnom smjeru.
14. Izračunati integral $\int_L \frac{x dy - y dx}{x + y} dx$, gdje je L kontura trougla koji obrazuje prava $x + y = 1$ sa koordinatnim osama. Konturu obilazimo u pozitivnom smjeru.
15. Izračunati integral $\oint_L \frac{x - y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x^2}{x^2 + y^2} dy$, po putanji koja predstavlja elipsu $4(x - 4)^2 + 9y^2 = 36$.
16. Izračunati $\int_L (x^2 + y^2) dx + x^2 y dy$ pri čemu je L kontura trapeza kojeg obrazuju prave $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ i $x + y = 2$. Konturu obilazimo u pozitivnom smjeru.
17. Izračunati $\int_L x dx + (x - y) dy$ pri čemu je L trougao koji obrazuju prave $x + y - 4 = 0$ sa koordinatnim osama, pri čemu je smjer obilaska suprotan smjeru kazaljke na satu.
18. Izračunati $\int_L y^2 dx + (x + y)^2 dy$ pri čemu je L trougao sa vrhovima $A(3, 0)$, $B(3, 3)$ i $C(0, 3)$, pri čemu je smjer obilaska suprotan smjeru kazaljke na satu.
19. Izračunati $\int_L (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy$ pri čemu je L kružnica $x^2 + 6x + y^2 = 0$. Konturu obilazimo u pozitivnom smjeru.
20. Izračunati cirkulaciju vektora
(a) $\vec{a} = (y^2 - x^2 y)\vec{i} + (xy^2)\vec{j}$ po kružnici $x^2 + y^2 = 4$ od tačke $A(2, 0)$ do tačke $B(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, te po duži od tačke $C(\sqrt{2}, 0)$ do tačke $O(0, 0)$, te po duži od tačke $O(0, 0)$ pa do tačke $D(2, 0)$.
21. Pomoću Greenove teoreme
(a) Izračunati linijski integral $\oint_L x^2 y dx + xy^3 dy$, gdje je L kvadrat čiji su vrhovi $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ i $D(0, 1)$.
(b) Izračunati linijski integral $\oint_L (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$, gdje je L sastavljena od luka parabole $y = x^2$ između tačaka $A(0, 0)$ i $B(2, 4)$ te duži između tačaka $C(2, 4)$ i $D(0, 4)$ te duži između tačaka $E(0, 4)$ i $F(0, 0)$.
(c) Izračunati linijski integral $\oint_L x^2 y dx - 3y^2 dy$, gdje je L kružnica $x^2 + y^2 = 4$.
22. Pomoću Stokesove teoreme
(a) Izračunati linijski integral $\oint_L xz dx - yz^2 dy + xy dz$, gdje je L presjek površi $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ i $x^2 + y^2 = 1$.
(b) Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ duž zatvorene linije $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$.
23. Izračunati direktno i pomoću Gauß–Ostrogradsky teoreme fluks
(a) Vektorskog polja $\vec{a} = (x - 2z)\vec{i} + (3z - 4x)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$, kroz spoljnu stranu piramide čija su tjemena $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ i $D(0, 0, 0)$.
(b) Vektorskog polja $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$, kroz spoljni dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ koji pripada prvom oktantu ograničenu ravnima $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Napomena 1 Gdje nije naznačeno, a potrebno je, obilazak konture izvršiti suprotno smjeru kazaljke na satu.

1.4 Diferencijalne jednačine

- 1.
- 2.
3. Odrediti opšte rješenje diferencijalne jednačine drugog reda $y'' - 3y' + 2y = xe^{4x}$.
4. Odrediti opšte rješenje diferencijalne jednačine drugog reda $y'' - 6y' + 9y = xe^x$.
5. Odrediti opšte rješenje diferencijalne jednačine drugog reda $y'' - 7y' + 10y = xe^{2x}$.
- 6.
- 7.