I oblast: Sistemi diferencijalnih jednačina

1. Sljedeće sisteme riješiti svodjenjem na jednu jednačinu višeg reda

(a) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = 3x - 2y \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = 2x - 2y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = 3x - 2y \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = 4x - y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = 3x - 4y \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = x - y \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = x + y + 2z \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = x + 2y + z \\ \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} = 2x + y + z \end{cases}$ (e) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = x \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = 2x + y - 2z \\ \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} = 3x + 2y + z \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = x + y + z \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = 2x + y - z \\ \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} = -y + z \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = 2x - y + e^t \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = 3x - 2y + t \end{cases}$ (h) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = 2x - 5y - \cos t \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = x - 2y + \sin t \end{cases}$ (i) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -3x + \sqrt{2}y + e^{-t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \sqrt{2}x - 2y - e^{-t} \end{cases}$

(j) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = x - y + z + t - 1 \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = 2x + y - z - 3t^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} = x + y + z + t^2 - t + 2 \end{cases}$ (k) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = 7x + 5y - 9z - 8e^{-2t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = 4x + y + z + 2e^{5t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} = -2y + 3z + e^{5t} - 3e^{-2t} \end{cases}$

2. Sljedeće sisteme riješiti svodjenjem na jednu jednačinu višeg reda (zadaci sa prošlih rokova)

(a) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = y + 4e^{2t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = x - 3t^2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -2x + y + 2e^{-t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = x - 2y + 3t \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = 3x + 2y + 4z \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = 2x + 2z \\ \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} = 4x + 2y + 3z \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -3x + 2z + t^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = x - y \\ \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} = -2x - y \end{cases}$

3. Računanjem prvih integrala riješiti sisteme

(a) $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{z^2}{y},\ \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{y^2}{z}$; (b) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{x} = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}\,z}{z}$; (c) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = y - z,\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = z - x,\ \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} = x - y$;

(d) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{x(y-z)} = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{y(z-x)} = \dfrac{\mathrm{d}\,z}{z(x-y)}$; (e) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{xz} = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{yz} = \dfrac{\mathrm{d}\,z}{-xy}$; (f) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{y+z} = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{x+y} = \dfrac{\mathrm{d}\,z}{x+y}$;

(g) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{y-u} = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{z-x} = \dfrac{\mathrm{d}\,z}{u-y} = \dfrac{\mathrm{d}\,u}{x-z}$; (h) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{x+y^2+z^2} = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}\,z}{z}$;

(i) $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{y(z^2-x^2)}{x(y^2-z^2)},\ \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{z(x^2-y^2)}{x(y^2-z^2)}$.

4. Sljedeće sisteme riješiti računanjem prvih integrala (zadaci sa prošlih rokova)

(a) $\mathrm{d}\,x = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{x+y+z} = \dfrac{\mathrm{d}\,z}{y+z}$; (b) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = x + z^2;\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = z^2 + y;\ \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} = y - x$;

(c) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{y-z} = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{z-x} = \dfrac{\mathrm{d}\,z}{y-x}$.

5. Sisteme linearnih diferencijalnih jednačina riješiti matričnom metodom

(a) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -2x + y \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = 2x - 3y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -3x - y \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = x - y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = x + 5y \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = -x - 3y \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = y + z \\ \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = x + z \\ \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} = x + y \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -2x - y + \sin t \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = -4x - 2y + \cos t \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -3x - 4y + 2t \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = x + y + t \end{cases}$ (g) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = 4x + y - 36t \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = -2x + y - 2e^t \end{cases}$

6. Sisteme linearnih diferencijlanih jednačina riješiti matričnom metodom (zadaci sa prošlih rokova)

(a) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} - 2x + 2y = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} - 3y - 2z = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} + x - y = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = x + y + 2e^t \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = 4x + y - e^t \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -2x + y + 2e^{-t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = x - 2y + 3t \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -5x + 2y + e^t \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = x - 6y + e^{-2t} \end{cases}$ (e) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = 2x - y \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = -x + 2y - 5e^t \sin t \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = x + 2y + e^{3t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = x - 5\sin t \end{cases}$

II oblast: Diferencijalna geometrija

7. Date su krive
(a) $4x^2 + 9y^2 = 36$, izvršiti parametrizaciju date krive;
(b) $x^2 - 4x + y^2 + 8y + 11 = 0$, prevesti krivu u kanonski oblik, a potom izvršiti njenu parametrizaciju;
(c) $4x^2 + 8x + y^2 - 10y + 13 = 0$, prevesti krivu u kanonski oblik, a potom izvršiti njenu parametrizaciju.

8. Data je Vivijanijeva kriva $x^2+y^2+z^2 = 36$, $x^2+y^2-6x = 0$. Napisati vektorske i parametarske jednačine ove krive. Pokazati da je projekcija krive na xOz parabola.

9. Data je Vivijanijeva kriva $x^2+y^2+z^2 = 16$, $y^2+z^2-4y = 0$. Napisati vektorske i parametarske jednačine ove krive. Pokazati da je projekcija krive na xOy parabola.

10. Kriva je zadana parametarskim jednačinama $x = 1 - \cos 4t$, $y = \sin 4t$, $z = 2\cos 2t$, $t \in [0, \pi/2]$. Dokazati da kriva leži na sferi i da je presjek paraboličkog i eliptičkog cilindra. Napisati vektorsku jednačinu ove krive.

11. Odrediti dužinu luka
(a) Krive $\vec{r}(t) = (\sin 2t \cos 2t, \ln\cos 2t, \sin^2 t)$, od $t = \pi/6$ do $\pi/4$;
(b) Krive zadane sa $y^2 = 3x$, $2xy = 9z$ od tačke $A(0,0,0)$ do tačke $B(3,3,2)$;
(c) Krive $\vec{r}(t) = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$, od tačke $t_0 = 0$ do proizvoljne tačke t.

12. Krivu $\vec{r}(t) = (9t, 4\cos t, 4\sin t)$
(a) Parametrizirati dužinom luka;
(b) Izračunati jedinične vektore tangente, normale i binormale;
(c) Izračunati fleksiju (krivinu ili prvu zakrivljenost) i torziju (ili drugu zakrivljenost) date krive u proizvoljunoj tački.

13. Data je krive $\vec{r}(t) = (2t^3 + t + 1, 3t^2 + 5t, t + 1)$. Izračunati u tački $A(4, 8, 2)$, tj. za $t = 0$
(a) Jednačinu tangente i normalne ravni;
(b) Jednačinu binormale i oskulacione ravni;
(c) Jednačinu normale i rektifikacione ravni.

14. Odrediti jednačinu tangente i normalne ravni krive $x^2 + y^2 = 5$, $y^2 + z^2 = 20$ u tački $A(1, 2, 4)$.

15. Izračunati jednačinu oskulacione ravni krive $x^2 = 2ay$, $z^2 = 2by$, $a, b > 0$ u proizvoljnoj tački krive.

16. Izračunati krivinu i torziju krive $x = \dfrac{z^2}{2a}$, $y = \dfrac{z^3}{6a^2}$ u tački $z = 2a$.

17. Zadaci sa starih rokova

   (a) Neka je zadana kriva parametarskim jednačinama $x = \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 2\cos\frac{t}{2}$, $t \in [0, 2\pi]$.
   (i) Dokazati da kriva leži na sferi;
   (ii) Da je presjek paraboličkog i eliptičkog cilindra;
   (iii) Napisati vektorsku jednačinu krive.

   (b) Data je kriva $\vec{r} = (t^2 + 1, t^3 + t^2 + 1, t^2 - t + 1)$. Izračunati u tački $A(2, 3, 1)$, tj. za $t = 1$
   (i) Jednačinu tangente i normalne ravni;
   (ii) Jednačinu binormale i oskulacione ravni.

   (c) Data je kriva $\vec{r}(t) = (3t, 4\cos t, 4\sin t)$.
   (i) Parametrizirati krivu dužinom luka;
   (ii) Izračunati jedinične vektore tangente, normale i binormale;
   (iii) Izračunati fleksiju i torziju.

   (d) Data je kriva $\vec{r} = (1 - \cos 2t, 4\sin t, 2t - \sin 2t)$.
   (i) jednačinu krive napisati kao funkciju luka odnosno parametra s (parametrizirati je dužinom luka);
   (ii) Izračunati jedinični vektor tangente;
   (iii) Izračunati krivinu i jedinični vektor normale.

   (e) Data je kriva $\vec{r} = (2t^2 + 1, t^2 - t + 1, 2t^3 - t^2 - t + 1)$. Izračunati u tački $A(3, 1, 1)$, tj. za $t = 1$
   (i) Jednačinu tangente i normalne ravni;
   (ii) Jednačinu binormale i oskulacione ravni.

III oblast: Površinski integrali I vrste

1. Izračunati integral $\iint_S (3x - y + z)\,\mathrm{d}\,S$, ako je S dio ravni $3x + 2y + 12z - 24 = 0$ u I oktantu.
2. Izračunati integral $\iint_S (4x + 4y + 4z)\,\mathrm{d}\,S$, ako je S kocka odredjena sa $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 2$.
3. Izračunati integral $\iint_S (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}\,S$, ako je S sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
4. Izračunati integral $\iint_S (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}\,S$, ako je S dio eliptičkog konusa $x^2 = y^2 + z^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$.
5. Izračunati integral $\iint_S \dfrac{\mathrm{d}\,S}{(1 + x + y)^2}$, ako je S dio ravni $x + y + z - 2 = 0$ u I oktantu.
6. Izračunati integral $\iint_S \dfrac{\mathrm{d}\,S}{x^2 + y^2 + z^2}$, ako je S dio eliptičkog cilindra $x^2 + z^2 = 9$ koji je ograničen ravnima $y = 0$, $y = 3$, $x = 0$, $z = 0$.
7. Izračunati integral $\iint_S x\,\mathrm{d}\,S$, ako je S dio helikoida $x = v$, $y = u\cos v$, $z = u\sin v$, $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 2\pi]$.
8. Izračunati površinu torusa datog sa
$\vec{r}(u, v) = (b\sin\theta, (a + b\cos\theta)\cos\varphi, (a + b\cos\theta)\sin\varphi)$, $a, b > 0$, $a + b\cos\theta \geqslant 0$.
9. Izračunati integral $\iint_S x\,\mathrm{d}\,S$, ako je S dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ koji se nalazi u I oktantu.
10. Izračunati integral $\iint_S \dfrac{\mathrm{d}\,S}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$, ako je S eliptički cilindar $x^2 + y^2 = R^2$ ograničen ravnima $z = 0$ i $z = h$.
11. Izračunati integral $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\,S$, ako je S dio konusa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $0 \leqslant z \leqslant c$.
12. Zadaci sa proših rokova
    (a) Izračunati integral $\iint_S x\,\mathrm{d}\,s$, ako je S dio helikoide $x = v$, $y = u\sin v$, $z = u\cos v$, $u \in [0, a]$, $v \in [0, 2\pi]$.
    (b) Izračunati površinu torusa datog sa $\vec{r} = (a\sin\theta, (b + a\cos\theta)\cos\varphi, (b + a\cos\theta)\sin\varphi)$, $a, b > 0$, $b + a\cos\theta \geqslant 0$.
    (c) Izračunati $\iint_S y\,\mathrm{d}\,s$, ako je S dio helikoide $x = u\cos v$, $y = v$, $z = u\sin v$, $u \in [0, 4]$, $v \in [0, 2\pi]$.
    (d) Izračunati površinu torusa datog sa $\vec{r} = 3\sin\theta\vec{i} + (4 + 3\cos\theta)\cos\varphi\vec{j} + (4 + 3\cos\theta)\sin\varphi\vec{k}$,
    (e) Izračunati površinu sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ unutar cilindra $x^2 + y^2 = 1$ za $z \geqslant 0$
    (f) Izračunati integral $\iint_S \dfrac{\mathrm{d}\,S}{x^2 + y^2 + z^2}$, gdje je S dio cilindra $x^2 + y^2 = 1$ ograničen ravnima $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 2$.
    (g) Izračunati integral $\iint_S x\,\mathrm{d}\,S$, gdje je S helikoida $x = v$, $y = u\sin v$, $z = u\cos v$, $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 2\pi]$.
    (h) Izračunati integral $\iint_S x^2y^2\,\mathrm{d}\,S$, gdje je S gornja polovina sfere $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

IV oblast: Površinski integrali II vrste

1. Izračunati integrali $\iint_S \left(2x + 3y - \dfrac{z}{3}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, gdje je S dio ravni $x + y + 2z - 6 = 0$ u prvom oktantu.
2. Izračunati integrali $\iint_S xyz\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, gdje je S dio ravni $2x + y + 3z - 12 = 0$ u prvom oktantu.

3. Izračunati integrali $\iint_S x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + y\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z$, gdje je S vanjska strana kocke ograničene ravnima $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$ i $z = 1$.

4. Izračunati integrali $\iint_S (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + \sin z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,yz + e^{x+y}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, gdje je S vanjska strana kocke ograničene ravnima $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$ i $z = 1$.

5. Izračunati integral $\iint_S xy\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + xz\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z + yz\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$, gdje je S vanjska strana tetraedra ograničenog ravnima $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $x + y + z - 4 = 0$.

6. Izračunati integral $\iint_S yz\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + xz\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + xy\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z$, gdje je S spoljna strana tijela ograničenog eliptičkim cilindrom $x^2 + y^2 = R^2$, ravnima $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $z = H$ u prvom oktantu.

7. Izračunati integral $\iint_S z^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, gdje je s vanjska strana elipsoida $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

8. Izračunati integral $\iint_S z^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + y^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z + x^2\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$, gdje je S vanjska strana sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

9. Izračunati integral $\iint_S xyz\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, gdje je S spoljna strane sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Zadaci sa starih rokova

1. Izračunati površinski integral $\iint_S x^2y^2z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, gdje je S gornja polusfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

2. Izračunati površinski integral $\iint_S yz\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z + xy\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + xz\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, gdje je vanjski tetraedar ograničena ravnima $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 2$.

3. Izračunati površinski integral $\iint_S z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, gdje je S vanjska strana elipsoida $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$.

4. Izračunati površinski integral $\iint_S xy\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z + xy\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + yz\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z$, gdje je vanjski tetraedar ograničena ravnima $x =$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 3$.

5. Izračunati površinski integral $\iint_S yz\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z + xy\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + xz\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, gdje je vanjski tetraedar ograničena ravnima $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 2$.

V oblast: Elementi vektorske analize

1. Odrediti ekviskalarne površi (nivo-površi) sljedećih skalarnih polja
   (a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
   (b) $f(x, y, z) = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$;
   (c) $f(x, y, z) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Za dato skalarno polje (ili data skalarna polja)
   (a) $f(x, y, z) = x^2yz + xy^4 - z^3$ izračunati vrijednost gradijenta u tački $A(0, 1, -4)$;
   (b) $f(x, y, z) = \ln\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$ odrediti tačku u kojoj je $\operatorname{grad} f = \vec{i} - \dfrac{16}{9}\vec{j}$.
   (c) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ odrediti gradijent u $A(2, 1, 1)$. U kojoj tački je gradijent normalan na z–osu, a u kojoj tački je jednak nuli?
   (d) $f_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $f_2(x, y, z) = x - 3y + \sqrt{3xy}$ odrediti ugao izmedju njihovih gradijenata u tački $A(3, 4, 0)$.
   (e) $f(x, y, z) = \ln \dfrac{y}{x}$ odrediti ugao što ga zatvaraju gradijenti datog polja u tačkama $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ i $B(1, 1)$.

3. Odrediti vektorske linije (krive) sljedećih vektorskih polja
   (a) $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$;
   (b) $\vec{v} = -\omega\vec{i} + \omega\vec{j} + h\vec{k}$, ($\omega$ i h su konstante);
   (c) $\vec{v} = (y + z, x, x)$;
   (d) $\vec{v} = \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$;
   (e) $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;
   (f) $\vec{v} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$.
4. Za dato skalarno polje
   (a) $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} xy$ izračunati izvod u tački $A(1, 1, 0)$ u pravcu vektora $\vec{a} = (1, 1, -3)$.
   (b) $f(x, y, z) = x^2 - 4xyz^4 + 3yz^2$ izračunati izvod u tački $A(2, 1, -5)$ u smjeru od tačke A prema tački $B(2, 4, -1)$.
   (c) $f(x, y, z) = xy^2 + 2z^3 - xyz$ u tački $A(1, 1, 2)$ u smjeru vektora koji zatvara sa koordinatnim osama x i y uglove $\alpha = \frac{\pi}{3}$ i $\beta = \frac{\pi}{4}$, a sa z osom zatvara tup ugao.
   (d) $f(x, y, z) = xy - x^2 + 2yz^4$ u tački u smjeru vektora koji zatvara iste uglove sa svim koordinatnim osama.
5. Odrediti uglove izmedju datih površi
   (a) $x^2 + y^2 = a^2$ i $bz = xy$ u tački $A(x_1, y_1, z_1)$.
   (b) $x^2 + y^2 + z^2 - ax = 0$ i $x^2 + y^2 + z^2 - bx = 0$ u proizvoljnoj taǩi.
6. Izračunati divergenciju i rotor sljedećih vektroskih polja
   (a) $\vec{v} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.
   (b) $\vec{v} = \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$.
7. Ispitati postoji li potencijal U, ako postoji odrediti ga za sljedeća vektorska polja
   (a) $\vec{v} = (5x^2y - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j}$.
   (b) $\vec{v} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.
   (c) $\vec{v} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$.
8. Odrediti cirkulaciju
   (a) Vektorskog polja $\vec{v} = x\vec{i} - y\vec{j}$ duž kružnice $x^2 + y^2 = 4$;
   (b) Vektorskog polja $\vec{v} = -2y\vec{i} + 2x\vec{j}$ duž
   (i) Kružnice $x^2 + y^2 = 1$;
   (ii) Kružnice $(x - 2)^2 + y^2 = 2$;
   (c) Vektorskog polja $\vec{v}x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ duž kružnice $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.
9. Odrediti fluks
   (a) Vektorskog polja $\vec{v} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ kroz spoljni dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ koji je u I oktantu;
   (b) Vektorskog polja $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{y} + z\vec{k}$ kroz bazu kupe $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant 4$.

Zadaci sa starih rokova

1. Dato je skalarno polje $f(x, y, z) = 4xy^2 - yz^2$, vektor $\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ i tačka $P(-2, 0, 3)$. Izračunati (a) $\operatorname{grad} f$ u tački P; (b) Izvod polja f u tački P u smjeru vektora $\vec{a}$.
2. Dato je skalarno polje $f(x, y, z) = xyz - 2x^2z$, vektor $\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\right)$ i tačka $P(4, -1, 0)$. Izračunati (a) $\operatorname{grad} f$ u tački P; (b) Izvod polja f u tački P u smjeru vektora $\vec{a}$.
3. Izračunati fluks vektorskog polja $\vec{a} = (xy, yz, zx)$, kroz dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ u I oktantu.
4. Dato je skalarno polje $f(x, y, z) = -xy - 4xy^2 - 2yz^2$, vektor $\vec{a} = \left(-1, 2, \sqrt{7}\right)$ i tačka $P(0, -1, 3)$. Izračunati (a) $\operatorname{grad} f$ u tački P; (b) Izvod polja f u tački P u smjeru vektora $\vec{a}$; (c) U kom smjeru je izvod najveći i izračunati tu vrijednost.

5. Dato je skalarno polje $f(x,y,z) = x^2 - yz + 2x^2 z$, vektor $\vec{a} = \left(3, 1, \sqrt{2}\right)$ i tačka $P(2,1,-1)$. Izračunati (a) $\operatorname{grad} f$ u tački P; (b) Izvod polja f u tački P u smjeru vektora $\vec{a}$; (c) U kom smjeru je izvod najveći i izračunati tu vrijednost.

6. Za dato vektorsko polje $\vec{v} = (x - 2y + cz)\vec{i} + (ax - 2y + 3z)\vec{j} + (2x - by - z)\vec{k}$, odrediti konstante a, b i c, tako da polje bude potencijalno, te izračunati njegov potencijal.

7. Odrediti fluks vektorskog polja $\vec{F} = xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$, kroz dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ u I oktantu.

8. Za dato vektorsko polje $\vec{v} = (-x + 2y - az)\vec{i} + (bx + 6y + 2z)\vec{j} + (3x + cy - 4z)\vec{k}$, odrediti konstante a, b i c tako da polje bude potencijalno.

9. Izračunati fluks polja $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ kroz dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ u I oktantu.

10. Za dato vektorsko polje $\vec{v} = (-3ax + 2y + 3z)\vec{i} + (x + 6by - z)\vec{j} + (x - 2y + 2cz)\vec{k}$, odrediti konstante a, b i c tako da polje bude potencijalno.

Oblast VI: Elementi kompleksne analize

1. Pokazati da funkcija $f(z) = \dfrac{z^2}{|z|^2}$ nema graničnu vrijednost kada $z \to 0$.

2. Izračunati $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z\,\mathrm{Re}(z)}{|z|}$.

3. Izračunati $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z\,\mathrm{Re}(z)}{|z|^2}$.

4. Ispitati da li je funkcija $f(z) = \begin{cases} \dfrac{xy^3(x - iy)}{x^2 + y^6}, \; z \neq 0 \\ 0, \; z = 0, \end{cases}$ diferencijabilna u koordinatnom početku.

5. Data je funkcija $f(z) = z \operatorname{Re} z$. Izračunati $f'(0)$.

6. Izračunati analitičku funkciju $f(z)$, ako je
   (a) $u(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ uz uslov $f(0) = 0$.
   (b) $u(x,y) = e^x \cos y$.
   (c) $v(x,y) = 3e^x \sin y$.
   (d) $v(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, uz uslov $f(1) = 0$;
   (e) $u(x,y) = \dfrac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, uz uslov $f(1) = 0$.

Zadaci sa starih rokova

1. Odrediti analitičku funkciju $f(z)$ ako je $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ uz uslov $f(1) = 0$.

2. Odrediti analitičku funkciju $f(z) = u + iv$, ako je $u = x^2 + y^2 - xy$ i $f(0) = 0$.

3. Ispitati da li je funkcija $f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y(y + ix)}{x^6 + y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ diferencijalbilna u koordinatnom početku.

4. Odrediti analitičku funkciju $f(z) = u + iv$, ako je $u = x^2 + y^2 - xy$ i $f(0) = 0$.
   u koordinatnom početku.

5. Odrediti analitičku funkciju $f(z)$ ako je $u(x,y) = -e^x(y \sin y - x \cos y)$ uz uslov $f(0,0) = 0$.

6. Odrediti analitičku funkciju $f(z)$ ako je $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$ uz uslov $f(1,0) = 1$.