

# 1 Jednačine i nejednačine sa apsolutnim vrijednostima

## 1. Riješiti jednačine

(a)  $|2x - 1| - 2|1 - x| = 1$ ; (b)  $|x - 3| + |1 - 4x| = 2|x + 2|$ ;

(c)  $|x - 1| + |x^2 + 3x - 4| = 5$ ; (d)  $2x - |5 - |x - 2|| = 1$ ; (e)  $|x^2 - 4x| + 3 = x^2 + |x - 5|$ ;

(f)  $|x - 5| + |x^2 - 2x - 8| = 7$ ; (g)  $|2x - 1| - 3(3x + 1) = |x - 1| - 2(x + 3) - 9$ ;

(h)  $|2x + 1| - 3|x - 3| = |x - 1| + x + 2$ ; (i)  $4(1 - x) + |2x - 1| = 3x - |x - 2| - 1$ .

## 2. Riješiti nejednačine

(a)  $2 - 3|1 - x| - 2x \leq 1 - 4x - 2|2x + 3|$ ; (b)  $|x + 1| + |3x - 1| > 2$ ; (c)  $|x^2 - x| - |x| < 1$ ;

(d)  $|x^2 - 3x + 2| - 1 > |x - 3|$  (e)  $|x^2 - 7x + 10| - |x - 3| < 6$

(f)  $|x^2 - 2x - 3| + 2 - 2x \geq |x - 4| + x^2$ ; (g)  $|x^2 + 2x - 3| < 3x + 3$ ;

(h)  $|x^2 - 4x| + 3 \geq x^2 + |x - 5|$ ; (i)  $\left| \frac{2x - 1}{x + 1} \right| \leq 2$ . (j)  $\left| \frac{x - 1}{2x + 1} \right| < 1$ ;

(k)  $\left| \frac{x + 1}{2x - 3} \right| \geq \frac{1}{2}$ ; (l)  $\left| \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4x + 3} \right| < 1$ .

## 2 Kompleksni brojevi

3. Dati su kompleksni brojevi  $z_1 = 2 - 3i$ ,  $z_2 = 1 + 2i$ . Izračunati  
 (a)  $z_1 + z_2$ , (b)  $z_1 - z_2$ , (c)  $z_1 \cdot z_2$ , (d)  $\frac{z_1}{z_2}$ , (e)  $|z_1|$ , (f)  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$ , (g)  $\operatorname{Re} \left( \frac{z_1}{z_2} \right)$ , (h)  $\operatorname{Im} \left( \frac{z_1}{z_2} \right)$ .
4. Izračunati  
 (a)  $i^{25} + (-i)^{50} + i^{40} + i^{62} + i^{83}$ , (b)  $\frac{1+3i}{(-1+i)^2} + \frac{(-4+i)(-4-i)}{1+i}$ , (c) Za  $z = 1 - 3i$ ,  $\frac{2z - 2z\bar{z}}{z\bar{z} + i}$ .
5. Izračunati  
 (a)  $x$  i  $y$  iz jednačine  $3x + xi - 2y = 12 - yi - i$ , (b)  $z$  iz uslova  $(2+i)z + 2z - 3 = 4 - 6i$ .
6. Odrediti kompleksan broj  $z$  iz uslova  $|z - 4| = |z - 2| \wedge |z - 3| = |z - 2i|$ .
7. Pretvoriti kompleksne brojeve iz algebarskog u trigonometrijski oblik  
 (a)  $2 - 2\sqrt{3}i$ , (b)  $-6\sqrt{3} - 6i$ , (c)  $-5 + 5i$ .
8. Izračunati  
 (a)  $\sqrt[3]{-3 - \sqrt{3}i}$ , (b)  $\sqrt[4]{3 - 3\sqrt{3}i}$ , (c)  $z$  ako je  $z^3 = 2 - 2\sqrt{3}i$ .
9. Pokazati da  $\operatorname{Re} \left( \frac{1}{z} - \frac{2}{3} \right) = 0$  predstavlja jednačinu kružnice.
10. Izračunati kompleksan broj  $z$  iz uslova  $\operatorname{Re} \left( \frac{z-\bar{z}}{2} \right) + 10i \operatorname{Im} \left( \frac{\bar{z}-1}{3+i} \right) = x + 1 + 2i$ , a zatim izračunati  $\sqrt{z}$ .
11. Zadaci za vježbu
- (a) Riješiti jednačinu  $z^5 - \sqrt{3} + i = 0$ .
- (b) Dat je kompleksan broj  $z = 4\sqrt{3} - 12i$ , izračunati  $\sqrt[4]{z}$ .
- (c) Dat je kompleksan broj  $z = 6 - 2\sqrt{3}i$ , izračunati  $\sqrt[4]{z}$ .
- (d) Riješiti jednačinu  $z^3 + 2 + 2i = 0$ .
- (e) Riješiti jednačinu  $z^5 - \sqrt{3} + i = 0$ .
- (f) Ako je  $z = 5 - 5\sqrt{3}i$ , odrediti  $z^5$  i  $\sqrt[3]{z}$ .
- (g) Riješiti jednačinu u skupu racionalnih brojeva  $4z^3 + 7\sqrt{3}i = 7$ .
- (h) U skupu kompleksnih brojeva riješiti jednačinu  $z^4 - 3\sqrt{3} = -3i$ .
- (i) U skupu kompleksnih brojeva riješiti jednačinu  $z^4 + 2i = \sqrt{3} - i$ .
- (j) Riješiti jednačinu  $z = \sqrt{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$ .
- (k) Riješiti jednačinu  $z = \sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$ .
- (l) U skupu kompleksnih brojeva riješiti jednačinu  $\sqrt{2}z^3 + 2i = 3i + 1$ .
- (m) Kompleksni broj  $z = \frac{1+4i+i^{29}}{2-3i}$  napisati u trigonometrijskom obliku;
- (n) Izračunati kompleksan broj  $z$  iz uslova  $i \operatorname{Re} \left( \frac{\bar{z}+2}{1+i} \right) + \operatorname{Im} \left( \frac{2\bar{z}+z}{2} \right) + z = 1 + 3i$ ,
- (o) Izračunati kompleksan broj  $z$  iz uslova  $\operatorname{Re} \left( \frac{\bar{z}}{z_1} \right) = \frac{2-3\sqrt{3}}{13}$  i  $\operatorname{Im} \left( \frac{z-z_1}{2} \right) = \frac{-3-2\sqrt{2}}{2}$ , gdje je  $z_1 = 2 - 3i$ , a zatim izračunati  $z^{12}$ .
- (p) Izračunati kompleksan broj  $z$  iz uslova  $\left| \frac{z-12}{z-8i} \right| = \frac{5}{3}$  i  $\left| \frac{z-4}{z-8} \right| = 1$ .
- (q) Izračunati  $z$  i  $\sqrt[3]{z}$  ako je  $|z-2| + \bar{z} \operatorname{Re}(2z) + z^2 - 4z = 4i$ .
- (r) Izračunati  $z^{50}$  ako je  $2\bar{z} - i \operatorname{Re} \left( z + \frac{1}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3} - i$ .
- (s) Izračunati  $\sqrt{z}$  ako je  $\frac{2}{i} \left( z(2-i) + \frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{2} \right) = -3(1 + 2\sqrt{3} + 2i)$ .

3. Dati su kompleksni brojevi  $z_1 = 2 - 3i$ ,  $z_2 = 1 + 2i$ . Izračunati  
 (a)  $z_1 + z_2$ , (b)  $z_1 - z_2$ , (c)  $z_1 \cdot z_2$ , (d)  $\frac{z_1}{z_2}$ , (e)  $|z_1|$ , (f)  $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ , (g)  $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ , (h)  $\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ .
4. Izračunati  
 (a)  $i^{25} + (-i)^{50} + i^{40} + i^{62} + i^{83}$ , (b)  $\frac{1 + 3i}{(-1 + i)^2} + \frac{(-4 + i)(-4 - i)}{1 + i}$ , (c) Za  $z = 1 - 3i$ ,  $\frac{2z - 2z\bar{z}}{z\bar{z} + i}$ .
5. Izračunati  
 (a)  $x$  i  $y$  iz jednačine  $3x + xi - 2y = 12 - yi - i$ , (b)  $z$  iz uslova  $(2 + i)z + 2z - 3 = 4 - 6i$ .
6. Odrediti kompleksan broj  $z$  iz uslova  $|z - 4| = |z - 2| \wedge |z - 3| = |z - 2i|$ .
7. Pretvoriti kompleksne brojeve iz algebarskog u trigonometrijski oblik  
 (a)  $2 - 2\sqrt{3}i$ , (b)  $-6\sqrt{3} - 6i$ , (c)  $-5 + 5i$ .
8. Izračunati  
 (a)  $\sqrt[3]{-3 - \sqrt{3}i}$ , (b)  $\sqrt[4]{3 - 3\sqrt{3}i}$ , (c)  $z$  ako je  $z^3 = 2 - 2\sqrt{3}i$ .
9. Pokazati da  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z} - \frac{2}{3}\right) = 0$  predstavlja jednačinu kružnice.
10. Izračunati kompleksan broj  $z$  iz uslova  $\operatorname{Re}\left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right) + 10i \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}-1}{3+i}\right) = x + 1 + 2i$ , a zatim izračunati  $\sqrt{z}$ .
11. Zadaci za vježbu
- (a) Riješiti jednačinu  $z^5 - \sqrt{3} + i = 0$ .
- (b) Dat je kompleksan broj  $z = 4\sqrt{3} - 12i$ , izračunati  $\sqrt[4]{z}$ .
- (c) Dat je kompleksan broj  $z = 6 - 2\sqrt{3}i$ , izračunati  $\sqrt[4]{z}$ .
- (d) Riješiti jednačinu  $z^3 + 2 + 2i = 0$ .
- (e) Riješiti jednačinu  $z^5 - \sqrt{3} + i = 0$ .
- (f) Ako je  $z = 5 - 5\sqrt{3}i$ , odrediti  $z^5$  i  $\sqrt[3]{z}$ .
- (g) Riješiti jednačinu u skupu racionalnih brojeva  $4z^3 + 7\sqrt{3}i = 7$ .
- (h) U skupu kompleksnih brojeva riješiti jednačinu  $z^4 - 3\sqrt{3} = -3i$ .
- (i) U skupu kompleksnih brojeva riješiti jednačinu  $z^4 + 2i = \sqrt{3} - i$ .
- (j) Riješiti jednačinu  $z = \sqrt{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$ .
- (k) Riješiti jednačinu  $z = \sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$ .
- (l) U skupu kompleksnih brojeva riješiti jednačinu  $\sqrt{2}z^3 + 2i = 3i + 1$ .
- (m) Kompleksni broj  $z = \frac{1+4i+i^{29}}{2-3i}$  napisati u trigonometrijskom obliku;
- (n) Izračunati kompleksan broj  $z$  iz uslova  $i \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}+2}{1+i}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{2\bar{z}+z}{2}\right) + z = 1 + 3i$ ,
- (o) Izračunati kompleksan broj  $z$  iz uslova  $\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}}{z_1}\right) = \frac{2-3\sqrt{3}}{13}$  i  $\operatorname{Im}\left(\frac{z-z_1}{2}\right) = \frac{-3-2\sqrt{2}}{2}$ , gdje je  $z_1 = 2 - 3i$ , a zatim izračunati  $z^{12}$ .
- (p) Izračunati kompleksan broj  $z$  iz uslova  $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$  i  $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$ .
- (q) Izračunati  $z$  i  $\sqrt[3]{z}$  ako je  $|z-2| + \bar{z} \operatorname{Re}(2z) + z^2 - 4z = 4i$ .
- (r) Izračunati  $z^{50}$  ako je  $2\bar{z} - i \operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} - i$ .
- (s) Izračunati  $\sqrt{z}$  ako je  $\frac{2}{i} \left(z(2-i) + \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2}\right) = -3(1 + 2\sqrt{3} + 2i)$ .

### 3 Determinante

1. Izračunati vrijednost determinati

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}; \text{ (b) } \begin{vmatrix} 2+2i & 3-i \\ -3+4i & -1-i \end{vmatrix}; \text{ (c) } \begin{vmatrix} \frac{x^2+1}{1-x^2} & \frac{2x}{1-x^2} \\ \frac{2x}{1-x^2} & \frac{x^2+1}{1-x^2} \end{vmatrix}; \\
 & \text{(d) } \begin{vmatrix} \sin x + \sin y & \cos x + \cos y \\ \cos y - \cos x & \sin x - \sin y \end{vmatrix}; \text{ (e) } \begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}; \\
 & \text{(f) } \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}; \text{ (g) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \text{ (h) } \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}; \text{ (i) } \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}; \\
 & \text{(j) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \text{ (k) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}; \text{ (l) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \\
 & \text{(m) } \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \text{ (n) } \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

2. Pokazati da je

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2; \text{ (b) } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2+a^3 \\ 1 & a^2 & a^3+a \\ 1 & a^3 & a+a^2 \end{vmatrix} = 0; \\
 & \text{(c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = (1-a)(1-b); \text{ (d) } \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-c)(b-a)(a-c); \\
 & \text{(e) } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b); \text{ (f) } \begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = a(x-y)(x-z)(z-y); \\
 & \text{(g) } \begin{vmatrix} 1 & bc & b+c \\ 1 & ac & a+c \\ 1 & ab & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a); \text{ (h) } \begin{vmatrix} a-b & 2a & 2a \\ 2b & b-a & 2b \\ a-b & 2a & a-b \end{vmatrix} = (a+b)^3; \\
 & \text{(i) } \begin{vmatrix} a+b & -a & -b \\ -b & b+c & -c \\ -a & -c & c+a \end{vmatrix} = 0; \text{ (j) } \begin{vmatrix} -x & y & z & 1 \\ x & -y & z & 1 \\ x & y & -z & 1 \\ x & y & z & -1 \end{vmatrix} = -8xyz; \\
 & \text{(k) } \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{vmatrix} = -8abcd; \text{ (l) } \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = -a(a-b)(c-b)(d-c).
 \end{aligned}$$

3. Izračunati

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } \begin{vmatrix} a^{-4} & a^{-3} & a^{-2} \\ a^{-1} & 1 & a \\ a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix} (= 0); \text{ (b) } \begin{vmatrix} a & b & a & 1 \\ b & a & b & 1 \\ a & -a & b & 1 \\ b & -b & a & 1 \end{vmatrix} (= 2(a+b)(b-a)^2); \\
 & \text{(c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}, \text{ ako je } z = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}; \text{ (d) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & z^2 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}, \text{ ako je } z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3};
 \end{aligned}$$

$$(e) \begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix}; (= 0) \quad (f) \begin{vmatrix} 1 + \cos x & 1 + \sin x & 1 \\ 1 - \sin x & 1 + \cos x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} (= 1).$$

4. Riješiti jednačine

$$(a) \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad (b) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0; \quad (c) \begin{vmatrix} \log_c x & \log_c x - n \\ \log_c x - m & \log_c x \end{vmatrix} = 0, \quad (0 < c \neq 1);$$

$$(d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 - x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 - x^2 \end{vmatrix} = 0; \quad (e) \begin{vmatrix} x - 3 & x + 2 & x - 1 \\ x + 2 & x - 4 & x \\ x - 1 & x + 4 & x - 5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(f) \begin{vmatrix} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \sin x & \cos x \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \cos x & \sin x \\ 1 & a & 1 - a \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2} - 2}{4}; \quad (g) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 - x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 - x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Riješiti nejednačine

$$(a) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -6 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} \geq 0; \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix}.$$

## 4 Matrice

1. Date su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \text{ i } F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

Izračunati

(a)  $A + B$ ; (b)  $2A + 3B$ ; (c)  $3A - B$ ; (d)  $A \cdot B$ ; (e)  $B \cdot A$ ; (f)  $A \cdot B$ ; (g)  $C \cdot D$ ; (h)  $D \cdot C$ ; (i)  $E \cdot F$ ; (j)  $F \cdot E$ .

2. Date su matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & -9 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & -9 & 6 \\ -3 & -2 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 10 \\ 5 & 9 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunati

(a)  $A \cdot B$ ; (b)  $B \cdot A$ ; (c)  $C \cdot D$ ; (d)  $D \cdot C$ .3. Date su matrice  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  i  $C = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

Izračunati

(a)  $2A$ ; (b)  $A + B$ ; (c)  $B - C$ ; (d)  $A^2 - 3AB^T + 4C - 2I$ ; (e)  $B^2C^T - 2A + B$ .4. Izračunati  $AB - 2A + B$  ako je  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ .5. Izračunati  $A^2 - 3B$  ako je  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ .6. Izračunati  $a, b, c$  i  $d$ , tako da zadovoljavaju sljedeće jednačine

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}; (b) \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Izračunati

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n; (b) \begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{bmatrix}^n; (c) \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{bmatrix}^n; (d) \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}^n, n \in \mathbb{N}.$$

8. Izračunati  $A \cdot B$ , ako je

$$A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}.$$

9. Dati su matrica  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  i polinom  $P(x) = x^2 - 2x + 1$ . Izračunati(a)  $P(A)$ ; (b)  $P(A + 2I)$ .10. Dati su matrica  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  i polinom  $P(x) = 3x^2 - x + 3$ . Izračunati(a)  $P(A)$ ; (b)  $P(A - I)$ .

11. Odrediti sve matrice koje su komutativne sa matricom

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; (b) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; (c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

12. Za koje su vrijednosti ugla  $\alpha$  matrice  $A$  i  $B$  komutativne

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}.$$

13. Pokazati da algebarski identiteti

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \text{ i } (A - B)(A + B) = A^2 - B^2,$$

ne vrijede za matrice  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Zašto?

14. Odrediti rang matrica

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}; (b) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; (c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix}; (d) \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 25 & 10 & 5 & 30 \end{bmatrix}.$$

15. Odrediti rang matrice  $A$  u zavisnosti od parametra  $a$

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}; (b) A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Odrediti inverzne matrice

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; (b) \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}; (c) \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}; (d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; (e) \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

17. Data je matrica  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \lambda & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ .

- (a) Izračunati parametra  $\lambda$  tako da matrica  $A$  bude singularna.  
 (b) Koliki mora biti parametar  $\lambda$  da bi matrica bila regularna?

18. Rijesiti matricne jednačine

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; (b) X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix};$$

$$(c) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix};$$

$$(d) (I - 2A)X = B, \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(e) (A - 3I)X = B, \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix};$$

$$(f) 2AX - 3I = B^2X - 2X + A, \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$(g) A^2X - B + 2I = BX - 2X + A, \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(h) AX + 2I = BX - 3X + A^2, \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix};$$

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}; (j) X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(k) \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}. (l)$$

## 5 Sistemi linearnih jednačina

1. Ispitati saglasnost sistema, i u slučaju saglasnosti riješiti sisteme

$$\begin{array}{lll}
 \begin{array}{l} x + 2y + 4z = 7 \\ -3x + 2y + 4z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y - 3z = 3; \end{array} & \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + y + 4z = 6 \\ 3x + y + z = 5; \end{array} & \begin{array}{l} x - y + 3z = 3 \\ 2x - 2y + 6z = 6 \\ 3x + 4y + 5z = 12 \\ -x - 2y + z = -2; \end{array} \\
 \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ 4x + y + z = 0; \end{array} & \begin{array}{l} x + 2y = -3 \\ -x + 3z = 9 \\ x + y + 2z = 1; \end{array} & \begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ 3x + 2y + z = 4 \\ -2x - 2y + z = -1; \end{array} \\
 \text{(d)} & \text{(e)} & \text{(f)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 1 \\ x - 5y + z = -10 \\ 4x + y + z = 5 \\ x + y - z = 4; \end{array} & \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 3x + 2y + z = 3 \\ -2x - 2y + z = -1; \end{array} & \begin{array}{l} x + 3y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = -2 \\ x + y + z = 2 \\ y + 5z = 9; \end{array} \\
 \text{(g)} & \text{(h)} & \text{(i)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 1 \\ x - 5y + z = -10 \\ 4x + y + z = 5 \\ x + y - z = 4; \end{array}$$

(j)

$$\begin{array}{lll}
 \begin{array}{l} x + 2y + 3z - 2t = 4 \\ 2x + y - z + 5t = 7 \\ x - y - z + 6t = 5 \\ 3x + 3y + 2z + 3t = 11; \end{array} & \begin{array}{l} x + 3y - z + t = 4 \\ 2x - y + 2z + 3t = 6 \\ 4x + y + 5z - 2t = 8 \\ 3x + 2y + z + 4t = 10; \end{array} & \begin{array}{l} 2x - y + 4z - t = 4 \\ x + 3y - 2z = 2 \\ 3x + y + z - 2t = 3 \\ 3x + 2y + 2z - t = 6; \end{array} \\
 \text{(k)} & \text{(l)} & \text{(m)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \begin{array}{l} 2x - y + 4z - t = 4 \\ -x + 7y - 6z + t = 1 \\ 3x + z - 5t = -1 \\ 5x - y + 5z - 6t = 3; \end{array} & \begin{array}{l} 3x - 2y + z - 2t = 0 \\ -2x + 4y + 3z + 2t = 7 \\ -x + 3z - t = 1 \\ 2x - 2y + 4z - 3t = 1; \end{array} & \begin{array}{l} 2x - 3y + z - t = -1 \\ -2x + z + 3t = 2 \\ -x - y - 3z + 5t = 0 \\ 6x - 2y - z + t = 4; \end{array} \\
 \text{(n)} & \text{(o)} & \text{(p)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \begin{array}{l} 2x + 7y + 3z + t = 6 \\ 3x + 5y + 2z = 4 \\ 9x + 4y + z + 7t = 2; \end{array} & \begin{array}{l} x + 2y - 3z + t = 1 \\ x + y + z + t = 2 \\ -x + 3y + z - t = 0; \end{array} & \begin{array}{l} x + y + z + 2t = 5 \\ 2x + y - z + t = 1 \\ 4x + 3y + z + 3t = 11; \end{array} \\
 \text{(q)} & \text{(r)} & \text{(s)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \begin{array}{l} 2x - 3y + 4z - t = 6 \\ -x + 2z + 3t = 1 \\ -9x + 2y + z - 2t = -8; \end{array} & \begin{array}{l} 2x + 7y + 3z + t = 6 \\ 3x + 5y + 2z = 4 \\ 9x + 4y + z + 7t = 2. \end{array} & \begin{array}{l} 3x - 2y + 6z - 5t = 2 \\ x + 3y - 4z + t = 1 \\ 2x - 5y + 10z - 6t = 1; \end{array} \\
 \text{(t)} & \text{(u)} & \text{(v)}
 \end{array}$$

2. Izvršiti diskusiju rješenja datih sistema u zavisnosti od vrijednosti parametara koji se javljaju u njima

$$\begin{array}{llll}
 \begin{array}{l} ax + y - z = 1 \\ x + ay - z = 1; \\ x - y - az = 1 \end{array} & \begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a; \\ x + y + az = a^2 \end{array} & \begin{array}{l} x + y + z = a \\ x + (a + 1)y + z = 2a; \\ x + y + (a + 1)z = 0 \end{array} & \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ ax + 4y + z = 5 \\ 6x + (a + 2)y + 2z = 13. \end{array} \\
 \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} & \text{(d)}
 \end{array}$$

3. Ispitati da li homogeni sistemi imaju netrivialna rješenja i u slučaju da imaju izračunati ih

$$\begin{array}{llllll}
 \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0; \\ 3x + y - z = 0 \end{array} & \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0; \\ 3x + y - z = 0 \end{array} & \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0; \\ 3x + y - 2z = 0 \end{array} & \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0; \\ 3x - 3y + 3z = 0 \end{array} & \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0; \\ x - 3y = 0. \end{array} \\
 \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} & \text{(d)} & \text{(e)}
 \end{array}$$

4. Odrediti vrijednost parametra koji se pojavljuje u sistemima, tako da sistem ima i netrivialna rješenja, a zatim riješiti sistem

$$\begin{array}{lll}
 \begin{array}{l} x - y + az = 0 \\ x + 3y + z = 0; \\ 3x + y - z = 0 \end{array} & \begin{array}{l} ax + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0; \\ -3x + 4y + z = 0 \end{array} & \begin{array}{l} 3x - y + z = 0 \\ ax - y + 2z = 0 \\ x + ay + (a + 1)z = 0. \end{array} \\
 \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)}
 \end{array}$$



## 6 Vektori

### 6.1 Linearna zavisnost vektora. Razlaganje vektora po bazi

1. Odrediti parametre  $u$  i  $v$ , tako da vektori  $\vec{a} = (u, 1, -2)$  i  $\vec{b} = (-1, 3, v)$ , budu kolinearni.
2. Da li su vektori  $\vec{a} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 10\vec{k}$  i  $\vec{b} = -6\vec{i} + 9\vec{j} - 15\vec{k}$  kolinearni?
3. Ako je  $\vec{a} = (\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{3})$ , odrediti  $x, z$  vektora  $\vec{b} = (x, 4, z)$ , tako da  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  budu kolinearni.
4. Odrediti parametar  $k$ , tako da vektori  $\vec{a} = (-1, 3, 2)$ ,  $\vec{b} = (2, k, -4)$ ,  $\vec{c} = (k, 12, 6)$ , budu komplanarni. Za takvu vrijednost parametra  $k$  razložiti vektor  $\vec{a}$  po pravcima vektora  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ .
5. Ispitati linearnu zavisnost vektora  $\vec{a} = (1, -1, 2)$ ,  $\vec{b} = (4, 2, 0)$  i  $\vec{c} = (1, 1, 1)$ .
6. Ispitati linearnu zavisnost vektora  $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ , a ako su zavisni razložiti vektor  $\vec{l}$  na  $\vec{m}$  i  $\vec{n}$ ,  
(a)  $\vec{l} = (2, -1, -1)$ ,  $\vec{m} = (-1, 2, -1)$ ,  $\vec{n} = (-1, -1, 2)$ ; (b)  $\vec{l} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{m} = (0, 1, 1)$ ,  $\vec{n} = (-1, 0, 1)$ ; (c)

### Skalarni proizvod vektora

1. Dati su vektori  $\vec{a} = (2, 1, -2)$ ,  $\vec{b} = (-1, 4, 3)$ . Izračunati  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$  i  $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$ .
2. Dati su vektori  $\vec{a} = -2\vec{p} + 4\vec{q}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{p} - 2\vec{q}$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ . Izračunati  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$  i  $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$ .
3. Tjemena trougla su  $A(2, -1, 3)$ ,  $B(1, 3, -4)$ ,  $C(0, 2, 4)$ . Odrediti unutrašnje uglove trougla i dužine stranica trougla.
4. Neka je  $|a| = 3$ ,  $|b| = 6$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ . Izračunati  $|\vec{a} + \vec{b}|$  i  $|2\vec{a} - \vec{b}|$ .
5. Ako je  $|\vec{AB}| = 2$ ,  $|\vec{AC}| = 4$ ,  $\angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$  i tačka M je sredina duži BC, izračunati  $\vec{AM}$  preko  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ , a zatim  $|\vec{AM}|$ .
6. Izračunati dužinu dijagonala paralelograma, ako su mu stranice vektori  $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ ,  $\vec{b} = -3\vec{m} + 5\vec{n}$  i  $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$ ,  $|\vec{n}| = 3$ ,  $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Odrediti projekciju vektora  $\vec{d} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$  na vektor  $\vec{c}$ , ako su  $\vec{a} = (2, -1, 3)$ ,  $\vec{b} = (3, -2, 1)$ ,  $\vec{c} = (2, -4, 5)$ .
8. Izračunati ugao između simetrala koordinatnih osa  $yOz$  i  $xOz$ .
9. Izračunati ugao između vektora  $2\vec{a} - 4\vec{b}$  i  $3\vec{a} + 2\vec{b}$ , ako je  $\vec{a} = (2, -1, 3)$ ,  $\vec{b} = (3, -2, 2)$ .
10. U trouglu  $\Delta$ ,  $ABC$  poznato je  $A(2, 1, -3)$ ,  $\vec{AB} = (2, -3, 5)$ ,  $\vec{BC} = (3, -2, 4)$ . Odrediti koordinate vrhova B i C i koeficijente vektora  $\vec{AC}$  i  $\angle\gamma$ .
11. Odrediti projekciju vektora  $\vec{a} = (2, 4, \sqrt{5})$  na osu koja zaklapa uglove  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{6}$  a sa  $z$ -osom tup ugao.
12. Za koje su vrijednosti parametra  $m$  vektori  $\vec{a} = (-2, 1, m)$ ,  $\vec{b} = (1, -2, 3)$  ortogonalni.

### Vektorski proizvod vektora

1. Ako je  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 12$  i  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 45$ , izračunati  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ .
2. Ako je  $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b}$  i  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$  i  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ , izračunati  $\vec{p} \times \vec{q}$ .
3. Stranice paralelograma date su vektorima  $\vec{p} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{q} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$  i  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$  i  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ . Izračunati površinu paralelograma i ugao između dijagonala.
4. Izračunati projekciju  $\vec{a} = (2, 1, -3)$  na vektor  $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$ , ako je  $\vec{c} = (1, 0, -2)$  i  $\vec{b} = 1, 3, -4)$ .
5. Neka je  $\vec{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ ,  $\vec{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$  i  $|\vec{q}| = |\vec{p}| = 1$ ,  $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$ . Izračunati površinu trougla i visinu  $h_c$ .
6. Dati su vektori  $\vec{a} = (1, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (-2, -1, 2)$ ,  $\vec{c} = (1, -1, 2)$ .  
(a) Razložiti vektor  $\vec{c}$  po pravcima vektora  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ ;  
(b) Odrediti ugao koji obrazuju vektor  $\vec{c}$  sa ravni određjenom vektorima  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

## Mješoviti vektorski proizvod

- Ispitati da li tačke  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(0, 1, 5)$ ,  $C(-1, 2, 1)$ ,  $D(2, 13)$  pripadju istoj ravni.
- Dokazati da su vektori  $\vec{a} = (-1, 3, 2)$ ,  $\vec{b} = (2, -3, 4)$ ,  $\vec{c} = (-3, 12, 6)$  komplanarni.
- Izračunati zapreminu tetraedra i visinu  $h_D$ , čiji su vrhovi  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(0, 3, 0)$ ,  $C(0, 0, 6)$ ,  $D(2, 3, 8)$ .
- Izračunati površinu trougla čije su dvije stranice vektori  $\vec{a} = 4\vec{j} - \vec{k} + 3\vec{k}$  i  $\vec{b} = (5, -3, 7)$ .
- Odrediti parametar  $\lambda$  tako da vektori  $\vec{a} = 14\vec{j} + \lambda\vec{k} + 3\vec{i}$  i  $\vec{b} = (\lambda, -2, \lambda)$  budu okomiti.
- Odrediti parametar  $k$  tako da vektori  $\vec{a} = (-1, 3, 2)$ ,  $\vec{b} = (2, k, -4)$  i  $\vec{c} = (k, 12, 6)$  budu komplanarni. Za tako dobijenu vrijednost parametra  $k$  razložiti vektor  $\vec{a}$  po pravcima vektora  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ .
- Dat je trougao čiji su vrhovi  $A(5, 2, -4)$ ,  $B(9, -8, -3)$  i  $C(16, -6, -11)$ . Odrediti površinu  $\triangle ABC$  i unutrašnje uglove trougla.
- Izračunati površinu nad vektorima  $\vec{a} = (2, 1, -k)$  i  $\vec{b} = (-1, 1, -7)$  i izračunati ugao između vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{a} + 2\vec{b}$ .
- Izračunati visinu paraleloipeda koju obrazuju vektori  $\vec{a} = (1, -4, 5)$ ,  $\vec{b} = (0, 2, -4)$  i  $\vec{c} = (2, -2, 1)$ .
- Dati su vektori  $\vec{a} = (2, -1, 7)$ ,  $\vec{b} = (0, -4, 3)$  i  $\vec{c} = (-1, -2, 1)$ . Ispitati komplanarnost vektora. Ako nisu komplanarni izračunati visinu tetraedra koju obrazuju vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ , ako se za bazu uzmu vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .
- Izračunati visinu paraleloipeda koju obrazuju vektori  $\vec{a} = (1, -4, 5)$ ,  $\vec{b} = (0, 2, -4)$  i  $\vec{c} = (2, -2, 1)$ .
- Izračunati dužinu visine trougla koju obrazuju vektori  $\vec{a} = (1, -4, 5)$  i  $\vec{b} = (0, 2, -4)$  i to onu koja odgovara stranici koja je određena vektorom  $\vec{a}$ .
- Dati su vektori  $\vec{OA} = (5, 2, -1)$ ,  $\vec{OB} = (1, -3, 4)$ ,  $\vec{OC} = (-2, 1, 3)$ ,  $\vec{OD} = (2, 6, -2)$ . Pokazati da je  $\square ABCD$  paralelogram i izračunati ugao između dijagonala.
- Data su tri tjemena paralelograma  $A(2, -1, 0)$ ,  $B(3, 4, 1)$ ,  $C(-1, 0, -1)$ . Odrediti četvrto tjeme i ugao između dijagonala.

## 7 Ravan. Prava

- Izračunati ugao između ravni  $\alpha : -x + 3y - z - 4 = 0$  i  $\beta : -3x + 6z - 6 = 0$ .
- Odrediti jednačinu ravni  $\alpha$ , koja prolazi kroz tačke  $A(2, -1, 0)$  i  $B(3, 2, -5)$ , a normalna je na ravan  $\beta : 2x - y + 3z - 7 = 0$ .
- Izračunati visinu piramide  $h_S$ , čiji su vrhovi u tačkama  $S(1, -2, 3)$ ,  $A(2, -4, 2)$ ,  $B(2, 3, 4)$ ,  $C(1, 2, 3)$ .
- Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku  $M(-2, 3, -1)$  i
  - na koordinatnim osama odsijeca jednake odsječke;
  - prolazi kroz  $y$ -osu;
  - prolazi kroz koordinatni početak i tačku  $A(2, 1 - 5)$ .
- Izračunati jednačinu ravni u obliku  $\vec{r} \cdot \vec{n} = \alpha$ , koja je paralelna sa ravni  $\vec{r} \cdot (3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -5$  i prolazi kroz tačku  $M(0, 1, 2)$ .
- Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačke  $M(2, 1, -1)$ ,  $N(-1, 0, 1)$  a okomita je na ravan  $2x - y + 4z - 1 = 0$ .
- Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačke  $M(-1, 1, 2)$ ,  $N(0, 2, 1)$  a okomita je na ravan  $x - 3y + 4z - 7 = 0$ .
- Pravu  $l : \begin{cases} -2x - y + 3z - 4 = 0 \\ x + 2y - z = 1, \end{cases}$  napisati u
  - kanonskom obliku;
  - parametarskom obliku.
- Odrediti rastojanje tačke  $A(2, 1, 0)$  od prave  $l : \begin{cases} -x - y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - z = 1. \end{cases}$
- Odrediti jednačinu normale povučene iz tačke  $P(1, 3, 2)$  na pravu  $l : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$ .
- Odrediti jednačinu ravni  $\alpha$  koja sadrži pravu  $p : \frac{2-x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{-2z}{3}$  i normalna je ravan  $\alpha : 3x - 4y + 2z - 1 = 0$ .
- Izračunati jednačinu ravni kojoj pripada prava  $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ , a paralelna je pravoj  $q : \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$ .
- Napisati jednačinu ravni koja sadrži prave  $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$  i  $q : \frac{x}{-4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$ .
- Napisati jednačinu normale povučenu iz tačke  $M(1, 1, 2)$  na pravu  $p : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$ .
- Odrediti jednačinu ortogonalne projekcije prave  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{3}$  na ravan  $x + 2y + z - 3 = 0$ .
- Napisati jednačinu ravni koja sadrži pravu  $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$  i prolazi kroz tačku  $M(2, 1, 0)$ .
- Izračunati jednačinu ravni koja sadrži tačku  $M(1, 0, 1)$  i pravu  $\begin{cases} 2x + 3y - z - 5 = 0 \\ x - 3y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$
- Data je jednačina prave date u vektorskom obliku  $\vec{r} \times (2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ . Odrediti odgovarajući kanonski i parametarski oblik jednačine prave.
- Odrediti najkraće rastojanje između pravih  $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{-1}$  i  $q : \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-3}$ .

## 8 Osnovne osobine funkcija. Granične vrijednosti

1. Odrediti definiciono područje sljedećih funkcija

(a)  $f(x) = \sqrt{3x-5}$ ; (b)  $f(x) = \sqrt{-x^2-x+12}$ ; (c)  $f(x) = \frac{2x-1}{3-5x}$ ;

(d)  $f(x) = \frac{x+3}{3x^2-4x+1}$ ; (e)  $f(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{2-x}}$ ;

(f)  $f(x) = \sqrt{x^2-x-2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$ ; (g)  $f(x) = \ln(3-x^2)$ ;

(h)  $f(x) = \log(x-2)^2$ ; (i)  $f(x) = \frac{\ln(5+4x-x^2)}{\sqrt{x-2}}$ ;

(j)  $f(x) = \arcsin(5x-4)$ ; (k)  $f(x) = \arcsin \frac{2x+1}{x-3}$ ;

(l)  $f(x) = \arccos \frac{x+4}{1-9x}$ ; (m)  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{4x+5}$ .

2. Ispitati parnost, odnosno neparnost sljedećih funkcija

(a)  $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$ ; (b)  $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$ ; (c)  $f(x) = \frac{x^3}{\sin x \cos x}$ ;

(d)  $f(x) = \sqrt[5]{(x-4)^2} + \sqrt[3]{(1-3x)^4}$ ; (e)  $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$ ; (f)  $f(x) = \frac{3^x-3^{-x}}{x^2 \operatorname{tg} x}$ .

3. Izračunati osnovni period sljedećih funkcija

(a)  $f(x) = \sin x$ ; (b)  $f(x) = \cos 3x$ ; (c)  $f(x) = x^2 - 2x + 4$ .

4. Izračunati limese

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ ; (b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$ ; (c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-3-4}{\sqrt{x^4+1}}$ ;

(d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ ; (e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ ; (f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ ;

(g)  $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ ; (h)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ ; (i)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ ;

(j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}}$ ; (k)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-5x+6}-x)$ ; (l)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$ ;

(m)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^4 + (x-\sqrt{x^2-1})^4}{x^4}$ ;

5. Izračunati limese

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$ ; (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2}$ ;

(c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$ ; (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ ; (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ ;

(f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$ ; (g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ ; (h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$ ;

6. Izračunati limese

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2}$ ; (b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^x$ ; (c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+3}{2x-1} \right)^{x+4}$ ;

(d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+1} \right)^{3x-4}$ ; (e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(2x+1) - \ln(2x+4)] \cdot \frac{1}{3x-2}$ ;

(f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+3) - \ln(3x-1)}{4x+1}$ ; (g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x^2+3x+3) - \ln(2x^2+3x-1)}{5x-3}$ ;

(h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x-1}{x}$ ; (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x-1}{x}$ ; (j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt[3]{x}-1)$ ;

(k)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt[3]{2}-1)$ ; (l)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ ; (m)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ ;

7. Izračunati limese

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ ; (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ ; (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x}$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$ ;  
 (e)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\sin x}$ ;  
 (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin x} \right)^{\frac{2}{x^3}}$ ; (g)  $\lim_{x \rightarrow -a} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a}{x + a}$ ; (h)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ ;  
 (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x} - 1}{x(\sqrt{1 + 2 \sin^2 x} - 1)}$ ; (j)  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin 3x)^{\frac{1}{x}}$ ;  
 (k)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\sqrt{2x}}$ ; (l)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{3}{x^2}}$ ;  
 (m)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ ; (n)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ ;  
 (o)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ .

8. Zadana je funkcija  $f(x) = 4x - 3$ . Izračunati  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(f(x)) - \ln(f(x-1))]$ .

9. Ispitati neprekidnost sljedećih funkcija

- (a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{2} & \text{za } x \neq 0, \\ 2 & \text{za } x = 0. \end{cases}$   
 (b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{za } x \neq 2, \\ 4 & \text{za } x = 2. \end{cases}$

10. Dodefinisati funkciju tako da ona bude neprekidna u datoj tački

- (a)  $f(x) = \frac{3x - 3}{\sqrt{2x + 7} - 3}$  u tački  $x_0 = 1$ ;  
 (b)  $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + 2x} - 1}$  u tački  $x_0 = 0$ .

11. Odrediti parametar  $a \in \mathbb{R}$  tako da funkcija bude neprekidna za  $\forall x \in \mathbb{R}$ , ako je

- (a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 - x - 2)}{x - 2} & \text{za } x \neq 2 \\ a & \text{za } x = 2; \end{cases}$   
 (b)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2a & \text{za } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{za } x > 0. \end{cases}$

12. Izračunati asimptote funkcija

- (a)  $f(x) = \frac{x - 3}{x + 4}$ ; (b)  $f(x) = \frac{-x^2 - x + 6}{x + 7}$ ; (c)  $f(x) = \frac{4x + 3}{x^2 - 2x - 15}$ ;  
 (d)  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{2x^2 + 3x + 1}$ ; (e)  $f(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{x^2 - x - 6}$ ; (f)  $f(x) = \frac{x(2x^2 - 1)}{(3x + 2)^2}$ ;  
 (g)  $f(x) = \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x - 1}$ ; (h)  $f(x) = xe^{\frac{1}{x} - 2}$ ; (i)  $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ ;  
 (j)  $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 1}$ ; (k)  $f(x) = \frac{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 5}}{x(2x + 1)}$ ; (l)  $f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ;  
 (m)  $\frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 4}}$ ; (n)  $f(x) = \frac{(x^2 + 2)\sqrt{3x^2 - 1}}{(x + 1)x}$ ;

13. Razložiti date racionalne funkcije na proste racionalne funkcije

- (a)  $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 9}$ ; (b)  $f(x) = \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 - 2x^2 - 15}$ ; (c)  $f(x) = \frac{3x - 2}{(x - 1)^3}$ ; (d)  $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^3 - 4x^2 + 4x}$ ;  
 (e)  $f(x) = \frac{x + 2}{x^3 - 8}$ ; (f)  $f(x) = \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 + 9x}$ ; (g)  $f(x) = \frac{x - 1}{(x^2 + 1)^2}$ ; (h)  $f(x) = \frac{4x + 1}{x(x^2 + 2)^2}$ .

## 9 Diferencijalni račun

1. Odrediti po definiciji izvode sljedećih funkcija

- (a)  $f(x) = 3x + 3$ ; (b)  $f(x) = y = 3x^2 - 3x + 1$ ; (c)  $f(x) = x^3$ ; (d)  $f(x) = \cos x$ ;  
 (e)  $f(x) = e^x$ ; (f)  $f(x) = \ln x$ ; (g)  $f(x) = xe^x$ ; (h)  $f(x) = x \sin x$ ; (i)  $f(x) = (x - 3)e^x$ .

2. Odrediti po definiciji izvode sljedećih funkcija u datim tačkama

- (a)  $f(x) = \cos x, x = 0$ ; (b)  $f(x) = x^3, x = 2$ ; (c)  $f(x) = xe^x, x = 1$ ;  
 (d)  $f(x) = x \sin x, x = 0$ ; (e)  $f(x) = 3x^2 - 3x + 1, x = 3$ ; (f)  $f(x) = (x - 3)e^x, x = 1$ .

3. Izračunati izvode

- (a)  $f(x) = x^7 - 9x^2 + 1$ ; (b)  $f(x) = x^{-\frac{4}{5}} + x^{\frac{3}{11}} + 3x^5 + 1$ ;  
 (c)  $f(x) = \frac{2x^2 - x^4 - 2x^3 - 12x + 4}{12x^5 + 11x^2 + 23x - 1}$ ; (d)  $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{4}{x^5}$ ; (e)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt[5]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ;  
 (f)  $f(x) = xe^x$ ; (g)  $f(x) = x^4 \cos x$ ; (h)  $f(x) = \sin x \ln x$ ;  
 (i)  $f(x) = \arctg x + \arcsin x - \arccos x$ ; (j)  $f(x)y = x \arctg x$ ;  
 (k)  $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 3 \sin x$ ; (l)  $f(x) = x^2 e^{2x-1}$ ;  
 (m)  $f(x) = (x^4 - x^2 - x - 1)e^x$ ; (n)  $f(x) = e^x \cos(3x - 2)$ ; (o)  $f(x) = x^2 \ln x$ ;  
 (p)  $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ ; (q)  $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{x^2 + x}$ ;  
 (r)  $f(x) = x^2 + \sqrt[5]{x^2 + 2x} + \frac{2}{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}}$ ;  
 (s)  $f(x) = \sin x + 3 \cos x + \operatorname{ctg} 3x$ ; (t)  $f(x) = \frac{\sin x + 2 \operatorname{tg} x}{1 - \cos x - \operatorname{ctg} x}$ ;  
 (u)  $f(x) = x^3 \ln x - \frac{\ln x}{x+2}$ ; (v)  $f(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln x - e^{2x-3}$ ;  
 (w)  $f(x) = \sinh x + \cosh 3x$ ; (x)  $f(x) = (2x^2 - x^4 + 2 + \sin x)^2$ ;  
 (y)  $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} 2x - \sin^5 x 4x^4$ ; (z)  $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 3x} - \sqrt{\ln x - \sin^2 x}$ .

4. Izračunati izvode

- (a)  $y = 2x^4 - 5 \cos^2(\sin x - 2x)$ ; (b)  $f(x) = \frac{1}{2 \operatorname{ctg}^3 + 2x} - \frac{x+3}{\ln x}$ ; (c)  $f(x)y = \sqrt[12]{\sin x^3} + \frac{2-x}{\operatorname{tg}^4 x}$ ;  
 (d)  $f(x) = \arctg(x^3 - \sin x)$ ; (e)  $f(x) = \arccos \frac{3x - e^x}{\sin x}$ ;  
 (f)  $f(x) = \ln(e^x + 3 \sin x - 4 \arctg x)$ ; (g)  $y = \sqrt{\ln x + 3x} + \ln(\sqrt{x+3} - 1)$ .

5. Ako je  $f(x) = 1 - \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ , odrediti  $f'(\frac{1}{2})$ .

6. Koristeći logaritamsko diferenciranje izračunati izvode sljedećih funkcija

- (a)  $f(x) = \sin^4 x \cos^2 e^x$ ; (b)  $f(x) = \sqrt[11]{\frac{(x-3)^2(x+3)^5(2x-1)^{-\frac{2}{11}}}{(3x-2)^2}}$ ; (c)  $f(x) = \frac{(x+1)(x+2)^2}{(x+3)^3}$ ;  
 (d)  $f(x) = (x + \ln x)^{\sin x + \cos x}$ ; (e)  $f(x) = x^{\sin x + x}$ ; (f)  $f(x) = (\cos x)^x$ ; (g)  $f(x) = \frac{(\cos x)^{\sin x}}{x^2 + 3}$ ;  
 (h)  $f(x) = (\ln x + 3x)^{3x-1}$ ; (i)  $f(x) = \ln(x^2 + \sqrt{x^2 - 2x + 1})$ ; (j)  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - \sin x + 2x}{\cos^2 - \ln(3x - e^x)}}$ .

7. Odrediti  $y' = \frac{dy}{dx}$  i  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$  za funkciju koja je zadana parametarski:

- (a)  $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 \end{cases}$  (b)  $\begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$  (c)  $\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$  (d)  $\begin{cases} x = a(\cos t + \sin t) \\ y = b(\sin t - \cos t) \end{cases}$  (e)  $\begin{cases} x = a \cos 3t \\ y = b \sin^2 t \end{cases}$ ;  
 (f)  $\begin{cases} x(t) = \frac{2}{t} - t \\ y(t) = \frac{t^2}{t-1} \end{cases}$  (g)  $\begin{cases} y(t) = 2t^2 + t \\ x(t) = t^2 + 1 \end{cases}$ ; (h)  $\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}$ ; (i)  $\begin{cases} x(t) = t^3 + 2t + 5 \\ y(t) = t^3 + 1 \end{cases}$ ;  
 (j)  $\begin{cases} x(t) = 2t^2 + 3 \\ y(t) = 2t^3 + t^2 \end{cases}$  c. (k)  $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = 2t^3 + 3t^2 \end{cases}$  i pokazati da je  $\frac{1}{9}(y'_x)^2 + \frac{2}{3}y'_x - x = 0$ .

8. Provjeriti da li funkcija zadana parametarski  $x(t) = 2t + 3t^2$  i  $y(t) = t^2 + 2t^3$ , zadovoljava jednačinu  $2(y')^3 + (y'')^2 = y$ .
9. Odrediti  $y'$  i  $y''$  za funkciju koja je zadana implicitno:  
 (a)  $xy - \sin y = 0$ ; (b)  $\ln(xy) - \arctg x = 0$ ; (c)  $\sqrt{x^2 + y^2} + ye^y = 0$ ;  
 (d)  $y \sin x + xy - x^2 = 0$ ; (e)  $y^2 \sin y + x = 0$ ; (f)  $\ln \sqrt{x^3 + xy} - \arctan \frac{x}{y} = 0$ . (g)  $2y = x + \sin x + \cos y$ .  
 (h)  $\ln(xy) + 3x^{-2} = 2 - \sqrt{xy^3}$ .  
 (i)  $e^{2\sqrt{y}} - (1 - 3x^2)y^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{y}$ . (j)  $\ln(x^2y) + 4x^{-3} = 5 + y \sin x$ .  
 (k)  $x^3 + 5 \arctg(1 - y) - y^2 = 0$  i izračunati  $y'$  za  $x = 1$  i  $y = 1$ .
10. Izračunati sljedeće granične vrijednosti koristeći L'Hospital-ovo pravilo  
 (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$ ; (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{x^2}{1-x}}$ ; (c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x}$ ;  
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right)$ ; (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + (x+1)e^x - \cos x}{e^x - x \ln(1+x) - 1}$ ; (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{x^3 + x^4}$ ;  
 (g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 5x)}{\ln(\sin 7x)}$ ; (h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \operatorname{tg} x} \right)$ ; (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{x(e^{4x} - 1)} + \frac{2x - 1}{2x^2} \right)$ ;  
 (j)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ ; (k)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\ln(e^{\frac{1}{x}} - 1)}$ ; (l)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ ; (m)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 + 3x + 9)}{x^2 + x - 6}$ .
11. Odrediti intervale monotonosti, ako postoje ekstremne vrijednosti, intervale konveksnosti i konkavnosti te, ako postoje prevojne tačke funkcija  
 (a)  $f(x) = \frac{4x}{4 - x^2}$ ; (b)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ ; (c)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ ;  
 (d)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x^2}$ ; (e)  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ ; (f)  $f(x) = x^2 e^{-x}$ ;  
 (g)  $f(x) = x e^{-x^2}$ ; (h)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ; (i)  $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ ;  
 (j)  $f(x) = (3 - x^2)e^x$ ; (k)  $f(x) = x e^{\frac{1}{x-2}}$ ; (l)  $f(x) = x \ln x$ ;  
 (m)  $f(x) = x \ln^2 x$ ; (n)  $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ ; (o)  $f(x) = \ln \frac{x-2}{x+1}$ ;  
 (p)  $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$ ; (q)  $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .
12. Odrediti intervale monotonosti i stacionarne tačke funkcija  
 (a)  $f(x) = x^2 e^{-x}$ . (b)  $f(x) = \ln \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2}$ . (c)  $f(x) = x^2 - \ln x^2$ .  
 (d)  $f(x) = x^2 \ln x$ . (e)  $f(x) = x \ln x - x$ . (f)  $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2}$ .  
 (g)  $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ . (h)  $f(x) = x e^{\frac{x+3}{x^2}}$ . (i)  $f(x) = x e^{\frac{x-1}{x^2}}$ .
13. Odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti i prevojne tačke funkcije  
 (a)  $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$ . (b)  $f(x) = x e^{-x^2}$ . (c)  $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ .  
 (d)  $f(x) = (3 - x^2)e^{-x}$ . (e)  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}$ . (f)  $f(x) = x \ln^2 x$ .  
 (g)  $f(x) = \ln(x^2 - 1) + \frac{1}{x^2}$ . (h)  $f(x) = (x + 1) \ln^2(x + 1)$ . (i)  $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ .
14. Odrediti lokalne ekstremume funkcije  
 (a)  $f(x) = x \ln^2 x$ . (b)  $f(x) = \sin 2x - x$  za  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . (c)  $f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+2}$ .
15. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije  
 (a)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ; (b)  $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ ; (c)  $f(x) = x e^{-\frac{1}{x}}$ ; (d)  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ ; (e)  $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x^2}$ ;  
 (f)  $f(x) = x e^{\frac{1}{x-2}}$ ; (g)  $f(x) = x e^{-\frac{1}{x}}$ ; (h)  $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$ ; (i)  $f(x) = x^2 \ln^2 x$ ; (j)  $f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ ;  
 (k)

## 10 Integrali

### 10.1 Neodredjeni integral

1. Primjenom osnovnih pravila i tablice osnovnih integrala izračunati sljedeće integrale:

(a)  $\int 5a^2x^4 dx$ ; (b)  $\int (6x^2 - 3x + 3x^4) dx$ ; (c)  $\int x(x+1)(x-3) dx$ ; (d)  $\int (2x - 3abx^2)^4 dx$ ;

(e)  $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^5}} dx$ ; (f)  $\int \frac{x^4+3x}{\sqrt[4]{x^5}} dx$ ; (g)  $\int (a^{\frac{2}{4}} + x^{\frac{3}{4}})^3 dx$ ; (h)  $\int (\sqrt{x}+1)x^3(x - \sqrt[6]{x^7}) dx$ ;

(i)  $\int \frac{(x^2+3)(x^5+1)}{\sqrt[5]{x^7}} dx$ ; (j)  $\int \frac{(x^n+x^m)^2}{\sqrt{x^5}} dx$ ; (k)  $\int \frac{(\sqrt{x}+3)^4}{\sqrt[6]{ax^5}} dx$ ;

(l)  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ ; (m)  $\int 2^x dx$ .

2. Uvodjenjem pogodne smjene riješiti integrale

(a)  $\int x(3x-44)^{33} dx$ ; (b)  $\int \frac{1+3x}{1+\sqrt{x}} dx$ ; (c)  $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-1}} dx$ ; (d)  $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}} dx$ ;

(e)  $\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ ; (f)  $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ; (g)  $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$ ;

(h)  $\int \frac{dx}{x^2+5}$ ; (i)  $\int \frac{dx}{3x^2+5}$ ; (j)  $\int \frac{dx}{x^2+6x+11}$ ; (k)  $\int \frac{(x+2) dx}{x^2+6x+12}$ ;

(l)  $\int \frac{dx}{x^2-3}$ ; (m)  $\int \frac{dx}{5x^2-3}$ ; (n)  $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$ ;

(o)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} dx$ ; (p)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} dx$ ; (q)  $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}} dx$ ; (r)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3+6x-x^2}} dx$ ; (s)  $\int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{2+2x-x^2}} dx$ ;

(t)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$ ; (u)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3}}$ ; (v)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x}}$ ; (w)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ ; (x)  $\int \frac{(2x+3) dx}{\sqrt{x^2-3x+5}}$ .

3. Uvodjenjem pogodne smjene riješiti integrale

(a)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ; (b)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{2-x^2}}$ ; (c)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ .

4. Koristeći parcijalnu integraciju riješiti integrale

(a)  $\int \ln x dx$ ; (b)  $\int x \ln x dx$ ; (c)  $\int x \sin x dx$ ; (d)  $\int (x+1) \sin x dx$ ; (e)  $\int (x^2-x+1) \cos x dx$ ;

(f)  $\int x e^x dx$ ; (g)  $\int (3x-1)4^x dx$ ; (h)  $\int e^x \cos x dx$ ; (i)  $\int e^{3x} \sin 5x dx$ ; (j)  $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ ;

(k)  $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ ; (l)  $\int \arcsin x dx$ ; (m)  $\int x \arcsin x dx$ ; (n)  $\int (x^2-3x+1) \arccos x dx$ ;

(o)  $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$ ; (p)  $\int 3^x \cos x dx$ .

5. Podintegralnu funkciju rastaviti na parcijalne razlomke pa onda izračunati dobijene integrale

(a)  $\int \frac{x+1}{x^2+4x+3} dx$ ; (b)  $\int \frac{3x-4}{2x^2+3x+1} dx$ ; (c)  $\int \frac{3x^2+x+1}{(x-1)(x+2)(3x-1)} dx$ ;

(d)  $\int \frac{2x+7}{x^3+5x^2+4x} dx$ ; (e)  $\int \frac{3x+5}{x(x-1)^2} dx$ ; (f)  $\int \frac{1}{x^2(x+1)} dx$ ; (g)  $\int \frac{x^4+1}{(x+2)^2(x+1)} dx$ ;

(h)  $\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$ ; (i)  $\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+2)} dx$ ; (j)  $\int \frac{1}{x^3+1} dx$ ;

(k)  $\int \frac{x^3+2x+11}{x^3-1} dx$ ; (l)  $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx$ .

6. Uvodeći pogodnu smjenu izračunati sljedeće integrale

(a)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$ ; (b)  $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x-1}} dx$ ; (c)  $\int \frac{x^2+2x-1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$ ; (d)  $\int \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}} dx$ ;

(e)  $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$ ; (f)  $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} dx$ ; (g)  $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx$ .



7. Izračunati sljedeće integrale

- (a)  $\int \cos^5 x \, dx$ ; (b)  $\int \sin^3 x \, dx$ ; (c)  $\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx$ ; (d)  $\int \sin^3 5x \cos^5 5x \, dx$ ;  
 (e)  $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} \, dx$ ; (f)  $\int \sin^2 x \, dx$ ; (g)  $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$ ; (h)  $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$ ;  
 (i)  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \, dx$ ; (j)  $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} \, dx$ ; (k)  $\int \sin 2x \cos 4x \, dx$ ; (l)  $\int \cos 5x \sin \frac{3x}{2} \, dx$ ;  
 (m)  $\int \sin 3x \sin 5x \, dx$ ; (n)  $\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} \, dx$ ; (o)  $\int \frac{1}{3 + 5 \cos x} \, dx$ ;  
 (p)  $\int \frac{1}{\sin x + \cos x} \, dx$ ; (q)  $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} \, dx$ ; (r)  $\int \frac{1}{\cos x + 2 \sin x + 1} \, dx$ ;  
 (s)  $\int \frac{2 \sin x + \cos x}{2 \cos x + 5 \sin x} \, dx$ ; (t)  $\int \frac{1}{1 + 3 \cos^2 x} \, dx$ ; (u)  $\int \frac{1}{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x} \, dx$ .

## 10.2 Odredjeni integral

1. Izračunati sljedeće integrale, koristeći Njutn-Lajbnicovu formulu

- (a)  $\int_0^1 x(x^2 - 2x + 1) \, dx$ ; (b)  $\int_0^8 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) \, dx$ ; (c)  $\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2} \, dx$ ; (d)  $\int_2^6 \sqrt{x-2} \, dx$ ;  
 (e)  $\int_{-3}^0 \frac{1}{\sqrt{25+3x}} \, dx$ ; (f)  $\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \, dx$ ; (g)  $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 3x + 2} \, dx$ ; (h)  $\int_2^{3.5} \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}} \, dx$ ;  
 (i)  $\int_0^{\pi/4} \cos^2 x \, dx$ ; (j)  $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx$ ; (k)  $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} \, dx$ ; (l)  $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx$ ; (m)  $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, dx$ .

2. (Primjena odredenog integrala)

- (a) Izračunati površinu omeđenu parabolom  $y = 4x - x^2$  i  $x$ -osom.  
 (b) Izračunati površinu omeđenu krivom  $y = \ln x$ ,  $x$ -osom i pravom  $x = e$ .  
 (c) Izračunati površinu omeđenu krivom  $y = x(x-1)(x-2)$  i  $x$ -osom.  
 (d) Izračunati površinu omeđenu jednim poluperiodom sinusoide i  $x$ -ose.  
 (e) Izračunati površinu omeđenu krivom  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $x$ -osom i pravom  $x = \frac{\pi}{3}$ .  
 (f) Izračunati površinu omeđenu krivom  $y = x^3$ , pravom  $y = 8$  i  $y$ -osom.  
 (g) Izračunati površinu omeđenu krivim  $y = x^2$ ,  $y = \frac{x^2}{2}$  i pravom  $y = 2x$ .

3. (dužina luka)

- (a) Izračunati dužinu luka parabole  $y = 2\sqrt{x}$  od  $x = 0$  do  $x = \sqrt{8}$ .  
 (b) Izračunati dužinu luka krive  $y = e^x$  između tačaka  $A(0, 1)$  i  $B(1, e)$ .  
 (c) Izračunati dužinu luka krive  $y = \ln x$  od  $x = \sqrt{3}$  do  $x = \sqrt{8}$ .  
 (d) Izračunati dužinu luka krive  $y = \arcsin(e^{-x})$  od  $x = 0$  do  $x = 1$ .

## Zadaci sa prethodnih testova

1. Izračunati

- (a)  $\int \frac{dx}{2x^2 + x - 3}$ ; (b)  $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} \, dx$ ; (c)  $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} \, dx$ ; (d)  $\int \frac{x-1}{5} e^{x+1} \, dx$ ;  
 (e)  $\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx$ ; (f)  $\int \frac{(x-3) \, dx}{x^3 + 2x^2 + 3x}$ ; (g)  $\int \cos^4 x \, dx$ ; (h)  $\int \frac{(4x+1) \, dx}{3x^3 + 4x^2 + x}$ ;  
 (i)  $\int \ln(2+x^2) \, dx$ ; (j)  $\int \frac{1+2\cos x}{\sin x(3-\cos x)} \, dx$ ; (k)  $\int \frac{x^6}{x^4-1}$ ; (l)  $\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 3}$ ;

$$\begin{aligned}
 & \text{(m)} \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x + 2} dx; \text{ (n)} \int \frac{-2x^2 - 9x + 7}{(x+3)(x^2+1)^2} dx; \text{ (o)} \int \frac{1+3\cos x}{\sin x(2-\cos x)} dx; \text{ (p)} \int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}; \\
 & \text{(q)} \int x \operatorname{arctg} x dx; \text{ (r)} \int \frac{dx}{5+4\sin x} dx; \text{ (s)} \int x^2 e^{4x} dx; \text{ (t)} \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx; \\
 & \text{(u)} \int (3x^2+1) \ln(x+1) dx; \text{ (v)} \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x - 1} dx; \text{ (w)} \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx; \text{ (x)} \int \frac{1+3\cos x}{\sin x(2-\cos x)} dx; \\
 & \text{(y)} \int \frac{1-2\cos x}{\sin x(3-\cos x)} dx; \text{ (z)} \int \frac{dx}{3\sin x - 5\cos x}.
 \end{aligned}$$

## 2. Izračunati

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \int_0^{\pi/3} (x+1) \cos 2x dx; \text{ (b)} \int_0^4 \frac{-x^2+2x-2}{(x-2)(x^2+1)^2} dx; \text{ (c)} \int_0^1 \frac{2x-3}{x^3-8} dx; \text{ (d)} \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos^2 x dx; \\
 & \text{(e)} \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx; \text{ (f)} \int_0^1 \frac{2x^2+6x+5}{(x-2)(x^2+1)^2} dx; \text{ (g)} \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1}; \text{ (h)} \int_1^{e^2} x \ln x dx; \\
 & \text{(i)} \int_0^{\pi/3} x \cos x dx;
 \end{aligned}$$

3. Izračunati površinu omeđjenu parabolom  $y = 2x - x^2$  i pravom  $x + y = 0$ .