

1 Matrice

1. Date su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \text{ i } F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

Izračunati

(a) $A + B$; (b) $2A + 3B$; (c) $3A - B$; (d) $A \cdot B$; (e) $B \cdot A$; (f) $A \cdot B$; (g) $C \cdot D$; (h) $D \cdot C$; (i) $E \cdot F$; (j) $F \cdot E$.

2. Date su matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & -9 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & -9 & 6 \\ -3 & -2 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 10 \\ 5 & 9 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunati

(a) $A \cdot B$; (b) $B \cdot A$; (c) $C \cdot D$; (d) $D \cdot C$.

3. Date su matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Izračunati

(a) $2A$; (b) $A + B$; (c) $B - C$; (d) $A^2 - 3AB^T + 4C - 2I$; (e) $B^2C^T - 2A + B$.

4. Izračunati $AB - 2A + B$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Izračunati $A^2 - 3B$ ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

6. Izračunati a, b, c i d , tako da zadovoljavaju sljedeće jednačine

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}; (b) \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Izračunati

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n; (b) \begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{bmatrix}^n; (c) \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{bmatrix}^n; (d) \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}^n, n \in \mathbb{N}.$$

8. Izračunati $A \cdot B$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}.$$

9. Dati su matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ i polinom $P(x) = x^2 - 2x + 1$. Izračunati

(a) $P(A)$; (b) $P(A + 2I)$.

10. Dati su matrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ i polinom $P(x) = 3x^2 - x + 3$. Izračunati

(a) $P(A)$; (b) $P(A - I)$.

11. Odrediti sve matrice koje su komutativne sa matricom

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; (b) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; (c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

12. Za koje su vrijednosti ugla α matrice A i B komutativne

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}.$$

13. Pokazati da algebarski identiteti

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \text{ i } (A - B)(A + B) = A^2 - B^2,$$

ne vrijede za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Zašto?

14. Odrediti rang matrica

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}; (b) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; (c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix}; (d) \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 25 & 10 & 5 & 30 \end{bmatrix}.$$

15. Odrediti rang matrice A u zavisnosti od parametra a

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}; (b) A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Odrediti inverzne matrice

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; (b) \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}; (c) \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}; (d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; (e) \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

17. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \lambda & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

- (a) Izračunati parametra λ tako da matrica A bude singularna.
 (b) Koliki mora biti parametar λ da bi matrica bila regularna?

18. Rijesiti matricne jednačine

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; (b) X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix};$$

$$(c) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix};$$

$$(d) (I - 2A)X = B, \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(e) (A - 3I)X = B, \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix};$$

$$(f) 2AX - 3I = B^2X - 2X + A, \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$(g) A^2X - B + 2I = BX - 2X + A, \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(h) AX + 2I = BX - 3X + A^2, \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix};$$

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}; (j) X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(k) \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}. (l)$$