

1 Vektori

1.1 Linearna zavisnost vektora. Razlaganje vektora po bazi

1. Odrediti parametre u i v , tako da vektori $\vec{a} = (u, 1, -2)$ i $\vec{b} = (-1, 3, v)$, budu kolinearni.
2. Da li su vektori $\vec{a} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 10\vec{k}$ i $\vec{b} = -6\vec{i} + 9\vec{j} - 15\vec{k}$ kolinearni?
3. Ako je $\vec{a} = (\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{3})$, odrediti x, z vektora $\vec{b} = (x, 4, z)$, tako da \vec{a} i \vec{b} budu kolinearni.
4. Odrediti parametar k , tako da vektori $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (2, k, -4)$, $\vec{c} = (k, 12, 6)$, budu komplanarni. Za takvu vrijednost parametra k razložiti vektor \vec{a} po pravcima vektora \vec{b} i \vec{c} .
5. Ispitati linearnu zavisnost vektora $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (4, 2, 0)$ i $\vec{c} = (1, 1, 1)$.
6. Ispitati linearnu zavisnost vektora $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$, a ako su zavisni razložiti vektor \vec{l} na \vec{m} i \vec{n} ,
(a) $\vec{l} = (2, -1, -1)$, $\vec{m} = (-1, 2, -1)$, $\vec{n} = (-1, -1, 2)$; (b) $\vec{l} = (1, 1, 1)$, $\vec{m} = (0, 1, 1)$, $\vec{n} = (-1, 0, 1)$; (c)

Skalarni proizvod vektora

1. Dati su vektori $\vec{a} = (2, 1, -2)$, $\vec{b} = (-1, 4, 3)$. Izračunati $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})$, $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$ i $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$.
2. Dati su vektori $\vec{a} = -2\vec{p} + 4\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - 2\vec{q}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$. Izračunati $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})$, $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$ i $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$.
3. Tjemena trougla su $A(2, -1, 3)$, $B(1, 3, -4)$, $C(0, 2, 4)$. Odrediti unutrašnje uglove trougla i dužine stranica trougla.
4. Neka je $|a| = 3$, $|b| = 6$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Izračunati $|\vec{a} + \vec{b}|$ i $|2\vec{a} - \vec{b}|$.
5. Ako je $|\vec{AB}| = 2$, $|\vec{AC}| = 4$, $\angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$ i tačka M je sredina duži BC, izračunati \vec{AM} preko \vec{AB} , \vec{AC} , a zatim $|\vec{AM}|$.
6. Izračunati dužinu dijagonala paralelograma, ako su mu stranice vektori $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$, $\vec{b} = -3\vec{m} + 5\vec{n}$ i $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 3$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Odrediti projekciju vektora $\vec{d} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$ na vektor \vec{c} , ako su $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (3, -2, 1)$, $\vec{c} = (2, -4, 5)$.
8. Izračunati ugao između simetrala koordinatnih osa yOz i xOz .
9. Izračunati ugao između vektora $2\vec{a} - 4\vec{b}$ i $3\vec{a} + 2\vec{b}$, ako je $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (3, -2, 2)$.
10. U trouglu $\triangle ABC$ poznato je $A(2, 1, -3)$, $\vec{AB} = (2, -3, 5)$, $\vec{BC} = (3, -2, 4)$. Odrediti koordinate vrhova B i C i koeficijente vektora \vec{AC} i $\angle\gamma$.
11. Odrediti projekciju vektora $\vec{a} = (2, 4, \sqrt{5})$ na osu koja zaklapa uglove $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$ a sa z -osom tup ugao.
12. Za koje su vrijednosti parametra m vektori $\vec{a} = (-2, 1, m)$, $\vec{b} = (1, -2, 3)$ ortogonalni.

Vektorski proizvod vektora

1. Ako je $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$ i $\vec{a} \cdot \vec{b} = 45$, izračunati $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
2. Ako je $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b}$ i $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, izračunati $\vec{p} \times \vec{q}$.
3. Stranice paralelograma date su vektorima $\vec{p} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$ i $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. Izračunati površinu paralelograma i ugao između dijagonala.
4. Izračunati projekciju $\vec{a} = (2, 1, -3)$ na vektor $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$, ako je $\vec{c} = (1, 0, -2)$ i $\vec{b} = 1, 3, -4)$.
5. Neka je $\vec{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$, $\vec{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$ i $|\vec{q}| = |\vec{q}| = 1$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Izračunati površinu trougla i visinu h_c .
6. Dati su vektori $\vec{a} = (1, 1, -1)$, $\vec{b} = (-2, -1, 2)$, $\vec{c} = (1, -1, 2)$.
(a) Razložiti vektor \vec{c} po pravcima vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$;
(b) Odrediti ugao koji obrazuju vektor \vec{c} sa ravni određenoj vektorima \vec{a} i \vec{b} .

Mješoviti vektorski proizvod

1. Ispitati da li tačke $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 13)$ pripadju istoj ravni.
2. Dokazati da su vektori $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (2, -3, 4)$, $\vec{c} = (-3, 12, 6)$ komplanarni.
3. Izračunati zapreminu tetraedra i visinu h_D , čiji su vrhovi $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 6)$, $D(2, 3, 8)$.
1. Izračunati površinu trougla čije su dvije stranice vektori $\vec{a} = 4\vec{j} - \vec{k} + 3\vec{k}$ i $\vec{b} = (5, -3, 7)$.
2. Odrediti parametar λ tako da vektori $\vec{a} = 14\vec{j} + \lambda\vec{k} + 3\vec{i}$ i $\vec{b} = (\lambda, -2, \lambda)$ budu okomiti.
3. Odrediti parametar k tako da vektori $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (2, k, -4)$ i $\vec{c} = (k, 12, 6)$ budu komplanarni. Za tako dobijenu vrijednost parametra k razložiti vektor \vec{a} po pravcima vektora \vec{b} i \vec{c} .
4. Dat je trougao čiji su vrhovi $A(5, 2, -4)$, $B(9, -8, -3)$ i $C(16, -6, -11)$. Odrediti površinu $\triangle ABC$ i unutrašnje uglove trougla.
5. Izračunati površinu nad vektorima $\vec{a} = (2, 1, -k)$ i $\vec{b} = (-1, 1, -7)$ i izračunati ugao između vektora \vec{a} i $\vec{a} + 2\vec{b}$.
6. Izračunati visinu paralelopipeda koju obrazuju vektori $\vec{a} = (1, -4, 5)$, $\vec{b} = (0, 2, -4)$ i $\vec{c} = (2, -2, 1)$.
7. Dati su vektori $\vec{a} = (2, -1, 7)$, $\vec{b} = (0, -4, 3)$ i $\vec{c} = (-1, -2, 1)$. Ispitati komplanarnost vektora. Ako nisu komplanarni izračunati visinu tetraedra koju obrazuju vektori \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} , ako se za bazu uzmu vektori \vec{a} i \vec{b} .
8. Izračunati visinu paralelopipeda koju obrazuju vektori $\vec{a} = (1, -4, 5)$, $\vec{b} = (0, 2, -4)$ i $\vec{c} = (2, -2, 1)$.
9. Izračunati dužinu visine trougla koju obrazuju vektori $\vec{a} = (1, -4, 5)$ i $\vec{b} = (0, 2, -4)$ i to onu koja odgovara stranici koja je određena vektorom \vec{a} .
10. Dati su vektori $\vec{OA} = (5, 2, -1)$, $\vec{OB} = (1, -3, 4)$, $\vec{OC} = (-2, 1, 3)$, $\vec{OD} = (2, 6, -2)$. Pokazati da je $\square ABCD$ paralelogram i izračunati ugao između dijagonala.
11. Data su tri tjemena paralelograma $A(2, -1, 0)$, $B(3, 4, 1)$, $C(-1, 0, -1)$. Odrediti četvrto tjeme i ugao između dijagonala.