Numerička Matematika

nastavni materijal

SAMIR KARASULJIĆ

web: math.ba
email: samir.karasuljic@untz.ba

Sadržaj

1. Elementi teorije grešaka

Mnogi problemi iz života mogu se uspješno riješiti korištenjem matematike. Pojavom i razvojem računara ova primjena matematike je i intenzivirana, pa danas matematika ima primjenu u skoro svim oblastima ljudske djelatnosti. Pojave ili procesi koji se bitni u nekom realnom problemu, koji se rješava, moguće je predstaviti preko matematičkog modela tog problema. Ovaj matematički model su neke jednačine (algebarske, transcedentne, diferencijalne, integralne ili dr.) ili odgovarajući sistem jednačina.

Pomenuti matematički model možemo predstaviti na sljedeći način

$$F(x,d) = 0, \tag{1.1}$$

gdje d predstavlja polazne podatke od kojih zavisi rješenje x, a F je neka funkcionalna veza između x i d. U zavisnosti od same prirode problema koji se analizira, x i d mogu biti brojevi, vektori ili funkcije. U formulaciji ovakvog matematičkog modela pojavljuju se i određena pojednostavljenja. U slučaju jednostavnih i grubih modela, rješenja se često mogu odrediti analitičkim metodama. Dobri modeli su najčešće složeni, te se za njihovo rješenje koriste metode numeričke matematike. Naravno i kod konstruisanja odnosno formulacije ovakvih dobrih modela mora se voditi računa o složenosti, da ne bi rješavanje modela bilo suviše komplikovano ili neekonomično po pitanju resursa (vrijeme potrebno za dobijanje rješenja, karakteristike korištenih računara, itd.). Dakle, matematički se model, zbog pomenutih pojednostavljenja, razlikuje od polaznog realnog problema. Pri formulaciji matematičkog modela (1.1) često se koriste i polazni podaci koji su dobijeni nekim mjerenjem. Kako se podaci dobijeni mjerenjem uvijek razlikuju od stvarne vrijednosti, i oni će uticati na dostupanje matematičkog modela od posmatranog realnog problema. Ako sa x_F označimo rješenje posmatranog realnog (fizičkog) problema, a sa x rješenje matematičkog modela odnosno problema (1.1), tada je $e_m = x_F - x$ greška matematičkog modela ili neotklonjiva greška. Ovu grešku moguće je smanjiti konstruisanjem boljeg matematičkog modela i povećanjem tačnosti polaznih podataka, ali to nije predmet proučavanja numeričke matematike.

Problem (1.1) u opštem slučaju nije moguće tačno riješiti, pa se pribjegava računanju aproksimativnog rješenja, odnosno numeričkog rješenja. Da bi dobili numeričko rješenje problema (1.1) potrebno je upotrijebiti neku numeričku metodu. U opštem slučaju numeričku metodu možemo predstaviti nizom diskretnih zadaka

$$F_n(x_n, d_n) = 0,\ n = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

koji zavise od nekog parametra diskretizacije koji će biti definisan u svakom konkretnom slučaju. Razlika $e_n = x - x_n$ između rješenja problema (1.1) x i rješenja x_n numeričkog problema (1.2) naziva se greška numeričke metode.

Često se ni diskretni problem (1.2) ne može tačno riješiti, već se i on mora rješavati nekom numeričkom metodom. Na primjer, ako su u (1.2) pojavljuje sistem linearnih algebarskih jednačina velikog reda, onda se rješenje ovog sistema dobija primjenom neke direktne ili iteracione metode za rješavanje sistema linearnih algebarskih jednačina. Kako je pri rješavanju (1.2) praktično neizbježno korištenje računara, javljaju se i greške vezane sa predstavljanjem brojeva u računaru, kao i greške vezane sa mašinskom aritmetikom. Sada umjesto rješenja x_n problema (1.2) dobijamo njegovu aproksimaciju $\hat{x}_n$. Razlika $e_r = x_n - \hat{x}_n$ između rješenja x_n i izračunate aproksimacije $\hat{x}_n$ naziva se računska greška, mašinska greška ili greška zaokruživanja. Na kraju, razlika između rješenja x_F realnog (fizičkog) problema i izračunatog rezultata $\hat{x}_n$, odnosno ukupna greška e jednaka je

$$e = x_F - \hat{x}_n = (x_F - x) + (x - x_n) + (x_n - \hat{x}_n) = e_m + e_n + e_r. \tag{1.3}$$

1.1 Apsolutna i relativna greška

Neke brojeve, na primjer π, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}, \ldots$, ne možemo zapisati pomoću konačnog broja cifara. Pa se u konkretnim kalkulacijama koriste njihove približne vrijednosti, tj. brojevi koji su određeni konačnim brojem cifara. Kako je već pomenuto, danas se računari uglavnom koriste u Numeričkoj matematici za dobijanje rezultata, a zbog načina predstavljanja brojeva u računaru i samog izvođenja operacija i rezultati su često približni brojevi.

Neka je a tačan broj (tačna vrijednost neke veličine), a $a^\star$ je njegova približna vrijednost i tom slučaju pišemo

$$a \approx a^\star, \tag{1.4}$$

i kažemo a je približno jednako $a^\star$. Takođe za $a^\star$ kažemo da je aproksimacija broja a.

Definicija 1.1.1 Razlika $a - a^\star$ između tačnog a i približnog broja $a^\star$ nazive se greška približnog broja $a^\star$. Apsolutna greške je apsolutna vrijednost razlike tačnog a i približnog broja $a^\star$, tj.

$$\triangle a^\star = \left| a - a^\star \right|. \tag{1.5}$$

N U literaturi uobičajeni su i nazivi greška aproksimacije, te stvarna greška za grešku približnog broja i apsolutna greška aproksimacije za apsolutnu grešku.

■ **Primjer 1.1** Približne vrijednosti broja $\pi = 3.14159265358\ldots$ su brojevi $a_1^\star = 3.14$; $a_2^\star = 3.142$; $a_3^\star = 3.14159$ itd. ■

Vidimo da približan broj $a^\star$, broja a nije jedinstveno određen, te da greška približnog broja može biti pozitivan ili negativan broj.

Rijetko je poznata tačna vrijednost a, ali je poznato da se greška približnog broja kreće u segmentu $[-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Sada vrijedi

$$\left| a - a^\star \right| \le \varepsilon. \tag{1.6}$$

Broj ε nazivamo granica greške približnog broja. Nejednakost (1.6) sada možemo pisati u obliku

$$a^\star - \varepsilon \leqslant a \leqslant a^\star + \varepsilon. \tag{1.7}$$

Po dogovoru se nejednakosti (1.6) i (1.7) zapisuju u obliku

$$a = a^\star \pm \varepsilon. \tag{1.8}$$

Tačna vrijednost a za koju je poznata približna vrijednost $a^\star$ i granica greške približnog broja ε je iz segmenta $[a^\star - \varepsilon, a^\star + \varepsilon]$. Nastoji se da granica greške približnog broja ε bude što je moguće manja jer je tada određenost traženog broja veća.

N Vrijedi

$$\triangle a^\star \leqslant \varepsilon. \tag{1.9}$$

Granice greške približnog broja ne daje uvijek pravu sliku o greški, što je vidljivo iz sljedećeg primjera

■ **Primjer 1.2** Mjerena je dužina neke cijeve i njen prečnik i dobijeni su sljedeći rezultati

$$R = 20 \pm 1\,\text{mm}, \quad d = 2500 \pm 1\,\text{mm}.$$

Granice grešaka su iste za obje mjerene veličine, međutim ako uporedimo dužinu cijevi i njen prečnik, izmjerena dužina cijevi je preciznija. ■

Prethodni primjer daje opravdanje za uvođenje nove greške.

Definicija 1.1.2 Odnos između apsolutne greške $\triangle a^\star$ i apsolutne vrijednosti tačnog broja a, $a \neq 0$ nazivamo relativna greška $\delta a^\star$ i pišemo

$$\delta a^\star = \frac{\triangle a^\star}{|a|}. \tag{1.10}$$

Relativna greška je u stvari veličina apsolutne greške izmjerena u odnosu na posmatranu veličinu a. Znajući relativnu grešku $\delta a^\star$ možemo izračunati procentualnu grešku $\delta a^\star \cdot 100$ koju izražavamo u procentima (%), i promilnu grešku $\delta a^\star \cdot 1000$ koju izražavamo u promilima (‰).

N Pošto tačna vrijednost a najčešće nije poznata i kako je $a^\star \approx a$, onda se relativna greška često izražava na sljedeći način

$$\delta a^\star \approx \frac{\triangle a^\star}{|a^\star|}, a^\star \neq 0. \tag{1.11}$$

U nastavku relativnu grešku $\delta a^\star$ približnog broja $a^\star$ računaćemo na ovaj način.

■ **Primjer 1.3** Relativna greška za R i d iz Primjera 1.2, su

$$\delta R^\star \approx \frac{\triangle R^\star}{|R^\star|} = \frac{1}{20} = 0.05; \quad \delta d^\star \approx \frac{\triangle d^\star}{|d^\star|} = \frac{1}{2500} = 0.0004. \tag{1.12}$$

■

1.2 Značajne i sigurne cifre

U direktnoj vezi sa greškom približnog broja $a^\star$ je pojam sigurne cifre tog broja. U decimalnom brojnom sistemu svaki realan broj možemo napisati u obliku

$$x = \pm a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots, \tag{1.13}$$

gdje su $a_i \in \{0,1,\ldots,9\}$ decimalne cifre, a n je nenegativan cio broj. Predstavljanje realnog broja sa (1.13) sadrži informaciju o znaku realnog broja, te o cjelobrojnom i razlomljenom dijelu koji su odvojeni decimalnom tačkom (zarezom). Ovakvo predstavljanje realnih broja ima sljedeće značenje

$$x = \pm\left(a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 + a_{-1}10^{-1} + \cdots\right). \tag{1.14}$$

Definicija 1.2.1 Svaka cifra broja, izuzimajući nule koje služe za fiksiranje decimalnih mjesta, naziva se značajnom cifrom tog broja.

N Drugim riječima, značajne cifre realnog broja zapisanog u obliku (1.13) su sve cifre u njegovom zapisu počev od prve cifre sa lijeve strane koja je različita od nule.

■ **Primjer 1.4** Brojevi 234.1, 23.41, 2.341, 0.2341, 0.02341 imaju četiri značajne cifre, dok brojevi 0.1, 0.12, 0.123, 0.1230, 0.12300 ima jednu, dvije, tri, četiri i pet značajnih cifara, respektivno. ■

Posmatrajmo sada tačan broj

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1}10^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-n+1}10^{m-n+1} + \alpha_{m-n}10^{m-n} + \cdots, \tag{1.15}$$

gdje je m cio broj, i približan broj $a^\star$ broja a

$$a^\star = \alpha_m^\star 10^m + \alpha_{m-1}^\star 10^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-n+1}^\star 10^{m-n+1} + \alpha_{m-n}^\star 10^{m-n} + \cdots, \tag{1.16}$$

koji ima n jednakih prvih cifara kao i broj a.

Procijenimo sada apsolutnu grešku $\triangle a^\star$, vrijedi

$$\begin{aligned}
\triangle a^\star &= |a - a^\star| = \left|\left(\alpha_{m-n} - \alpha_{m-n}^\star\right)10^{m-n} + \left(\alpha_{m-n-1} - \alpha_{m-n-1}^\star\right)10^{m-n-1} + \cdots\right| \\
&\leqslant \left|\alpha_{m-n} - \alpha_{m-n}^\star\right| 10^{m-n} + \left|\alpha_{m-n-1} - \alpha_{m-n-1}^\star\right| 10^{m-n-1} + \cdots \\
&\leqslant 9\left(10^{m-n} + 10^{m-n-1} + \cdots\right) = 9 \cdot 10^{m-n}\left(1 + 10^{-1} + \cdots\right) \\
&= 9 \cdot 10^{m-n} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 9 \cdot 10^{m-n} \cdot \frac{10}{9} = 10^{m-n+1}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Dakle, apsolutna greška $\triangle a^\star$ približnog broja $a^\star$ koji ima prvih n cifara jednakih kao tačan broj a, nije veća od dekadskog činioca u ovom slučaju 10^{m-n+1}. A 10^{m-n+1} je dekadski činioc koji odgovara posljednjoj cifri koje su jednake kod brojeva a i $a^\star$ (brojimo sa lijeve strane).

Definicija 1.2.2 Značajna cifra $\alpha_{m-k+1}^\star$ približnog broja (1.16) naziva se sigurnom (pouzdanom), ako je

$$\triangle a^\star = |a - a^\star| \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{m-k+1}. \tag{1.18}$$

Očigledno, ako je $\alpha^{\star}_{m-k+1}$ sigurna cifra, onda su sigurne i cifre lijevo u zapisu približnog broja (1.16), tj. $\alpha^{\star}_{m}, \dots, \alpha^{\star}_{m-k+2}$.

■ **Primjer 1.5** Dati su tačan broj a i njemu približan broj $a^{\star}$. Odrediti broj sigurnih cifara približnog broja

(a) $a = 12.2453$ i $a^{\star} = 12.237$

Rješenje: Vrijedi

$$\triangle a^{\star} = |12.2453 - 12.237| = 0.0083 = 0.83 \cdot 10^{-2} = .083 \cdot 10^{-1} \leqslant 0.5 \cdot 10^{-1}.$$

Iz Definicije 1.2.2 je $\triangle a^{\star} \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{m-k+1}$. U našem primjeru je $m = 1$ te je

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{1-k+1} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} \Longleftrightarrow 1 - k + 1 = -1 \Longleftrightarrow k = 3.$$

Dakle $a^{\star}$ ima tri sigurne cifre.

(b) $a = \pi$ i $a^{\star} = 3.14159$

Rješenje: Vrijedi

$$\triangle a^{\star} = |\pi - 3.14159| = 0.0000026535\cdots \leqslant 0.27 \cdot 10^{-5} \leqslant 0.5 \cdot 10^{-5}.$$

Sada je

$$0 - k + 1 = -5 \Longleftrightarrow k = 6.$$

Dakle $a^{\star}$ ima šest sigurnih cifara.

■

1.2.1 Zaokruživanje brojeva

Vrlo često je u konkretnim kalkulacijama potrebno smanjiti broj značajnih cifara kod brojeva koji se koriste u tim kalkulacijama, bilo da se radi o iracionalnim brojevima, racionalnim brojevima sa beskonačno mnogo cifara ili o racionalnim brojevima sa konačnim brojem značajnih cifara. Ovo smanjenje moguće je uraditi na dva načina. Prvi način je jednostavno ostavljanje prvih n cifara broja nepromijenjenih dok se ostale cifre jednostavno odbace (eng. `chopping`), a drugi način je zaokruživanje (eng. `rounding`).

Zaokruživanje broja na n cifara vršimo po pravilu parne cifre[1,2], na sljedeći način

1. Ako je prva odbačena cifra (cifra na $n+1$–mjestu) manja od 5, ostaviti zadržane cifre ne promijenjene;
2. Ako je prva odbačena cifre veća od 5, povećati posljednju zadržanu cifru (na n–tom mjestu) za 1;
3. Ako je prva odbačena cifra 5, a bar jedna cifra iza (desno) nje je različita od nule, povećati posljednju zadržanu cifru za 1;
4. Ako je prva odbačena cifra 5, a iza nje su sve nule, ostaviti posljednju zadržanu cifru nepromijenjenu ako je ona parna, a ako je ona neparna povećati je za 1.

[1] Ovo pravilo je u skladu sa IEEE aritmetikom pokretnog zareza, vidjeti npr. Cheney [5]

[2] U literaturi dostupna su i drugačija pravila za zaokruživanje, vidjeti npr. Scitovski [8]

Ako je

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1}10^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-n+1}10^{m-n+1} + \alpha_{m-n}10^{m-n} + \cdots,$$

broj kojem smo smanjili broj cifara na prvi način (jednostavno ostavili prvih n cifara a ostale odbacili), a $\tilde{a}$ je dobijeni broj, greška je

$$|a - \tilde{a}| \leqslant 10^{m-n+1}, \tag{1.19}$$

a ako je $\hat{a}$ dobijen zaokruživanjem broja a na n cifara, greška je

$$|a - \hat{a}| \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}. \tag{1.20}$$

■ **Primjer 1.6** Zaokružiti dati broj a na pet i dvije decimale

1. $a = 2.2347750000$

   Rješenje:

   $\hat{a} = 2.23478, \quad \hat{a} = 2.23;$

2. $a = 2.2687450000$

   Rješenje:

   $\hat{a} = 2.26874, \quad \hat{a} = 2.27.$

■

1.3 Greške kod računanja vrijednosti funkcije

Neka je zadana funkcija n promjenljivih $f(x_1,\ldots,x_n)$ definisana i diferencijabilna po svim argumenima u nekoj oblasti. Pretpostavimo da nisu poznate tačne vrijednosti promjenljivih $x_1,\ldots,x_n$, nego umjesto njih znamo približne vrijednosti $x_1^\star,\ldots,x_n^\star$. Potrebno je izračunati vrijednost apsolutne greške funkcije f u tački $x^\star = (x_1^\star,\ldots,x_n^\star)$ ako je u skladu sa (1.8), $x_i = x_i^\star \pm \triangle x_i^\star$, $i = 1,\ldots,n$.

Na osnovu Lagrageove teoreme o srednjoj vrijednosti vrijedi

$$\triangle f^\star = \left|f(x_1,\ldots,x_n) - f(x_1^\star,\ldots,x_n^\star)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)}{\partial x_i}(x_i - x_i^\star)\right|, \tag{1.21}$$

gdje je $\tilde{x}_i$ između x_i i $x_i^\star$. Dalje vrijedi

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)}{\partial x_i}(x_i - x_i^\star)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)}{\partial x_i}\right|\left|x_i - x_i^\star\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)}{\partial x_i}\right|\triangle x_i^\star \tag{1.22}$$

Pošto vrijednosti $\tilde{x}_i$ nisu poznate, umjesto $\frac{\partial f(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)}{\partial x_i}$, koristićemo $\frac{\partial f(x_1^\star,\ldots,x_n^\star)}{\partial x_i}$, pa dobijamo formulu za apsolutnu grešku vrijednosti funkcije

$$\triangle f^\star \approx \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1^\star,\ldots,x_n^\star)}{\partial x_i}\right|\triangle x_i^\star, \tag{1.23}$$

a relativnu grešku približne vrijednosti funkcije je sada

$$\delta f^\star \approx \frac{\triangle f^\star}{|f^\star|}, \tag{1.24}$$

gdje je $f^\star = f(x_1^\star,\ldots,x_n^\star)$.

N Umesto relacija datih u (1.23) i (1.24), mogu se koristiti i sljedeće relacije

$$\triangle f^\star = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^\star,\dots,x_n^\star)}{\partial x_i} \right| \triangle x_i^\star, \tag{1.25}$$

i

$$\delta f^\star = \frac{\triangle f^\star}{|f^\star|}. \tag{1.26}$$

Ovakve greške se nazivaju linearna ocjena apsolutne i relativne greške vrijednosti funkcije, vidjeti više u npr. Bahvalov [2].

■ **Primjer 1.7** Izračunati apsolutnu i relativnu grešku pri računanju zapremine lopte $V = \frac{4}{3}r^3\pi$, ako je poluprečnik lopte $r = 10.3 \pm 0.02\,\text{cm}$, a $\pi^\star = 3.14$.

Rješenje: Vrijedi

$$\begin{aligned}
&r^\star = 10.3,\ \triangle r^\star = 0.02,\ \pi^\star = 3.14,\ \triangle\pi \approx 0.00159265\\
&\frac{\partial V(r^\star,\pi^\star)}{\partial r} = 4(r^\star)^2\pi^\star = 4\cdot(10.3)^2\cdot 3.14 = 1332.49\\
&\frac{\partial V(r^\star,\pi^\star)}{\partial \pi} = \frac{4}{3}(r^\star)^3 = \frac{4}{3}\cdot(10.3)^3 = 1456.97\\
&\triangle V^\star \approx \left|\frac{\partial V(r^\star,\pi^\star)}{\partial r}\right| \triangle r^\star + \left|\frac{\partial V(r^\star,\pi^\star)}{\partial \pi}\right| \triangle \pi^\star = 1332.49\cdot 0.02 + 1456.97\cdot 0.00159265 = 28.97.
\end{aligned}$$

Sada je

$$V = \frac{4}{3}(r^\star)^3\pi^\star \pm \triangle V^\star = 4574.88 \pm 28.97.$$

Kako je $\triangle V^\star \approx 28.97 = 0.2897\cdot 10^2 \leqslant \frac{1}{2}\cdot 10^{3-2+1}$, sigurne su samo dvije cifre pa možemo zaokružiti $V^\star \approx 4600$. I na kraju relativna greška je

$$\delta V^\star \approx \frac{\triangle V^\star}{|V^\star|} \approx 0.006332 \approx 6.3‰$$

■

■ **Primjer 1.8** Po kosinusnoj teoremi, ako su za neki trougao poznate dužine stranica a i b, te ugao između njih γ, dužina treće stranice c se računa koristeći formulu

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Ako je za trougao $\triangle ABC$ poznato $a = 10.2 \pm 0.05\,\text{cm}$, $b = 7.5 \pm 0.05\,\text{cm}$ i $\gamma = 31.3^0 \pm 0.05^0$, odrediti apsolutnu i relativnu grešku pri računanju stranice c.

Rješenje: Vrijednosti za uglove pretvoriti iz stepena u radijane po formuli $\psi_{rad} = \frac{\psi_{step}\cdot\pi}{180}$. Dužinu stranice c računa se po formuli

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

Vrijedi

$$
\begin{aligned}
&a^\star = 10.2\,\text{cm},\ \triangle a^\star = 0.05\,\text{cm},\ b^\star = 7.5\,\text{cm},\ \triangle b^\star = 0.05\,\text{cm},\ \gamma^\star = \frac{31.3\cdot\pi}{180},\ \triangle\gamma^\star = \frac{0.05\cdot\pi}{180}\\
&\frac{\partial c(a^\star,b^\star,\gamma^\star)}{\partial a} = \frac{a^\star - b^\star\cos\gamma^\star}{\sqrt{(a^\star)^2+(b^\star)^2-2a^\star b^\star\cos\gamma^\star}} = 0.697400\\
&\frac{\partial c(a^\star,b^\star,\gamma^\star)}{\partial b} = \frac{b^\star - a^\star\cos\gamma^\star}{\sqrt{(a^\star)^2+(b^\star)^2-2a^\star b^\star\cos\gamma^\star}} = -0.223569\\
&\frac{\partial c(a^\star,b^\star,\gamma^\star)}{\partial \gamma} = \frac{a^\star b^\star\sin\gamma^\star}{\sqrt{(a^\star)^2+(b^\star)^2-2a^\star b^\star\cos\gamma^\star}} = 7.310161.
\end{aligned}
$$

Sada je apsolutna greška $\triangle c^\star$

$$
\begin{aligned}
\triangle c^\star =& \left|\frac{\partial c(a^\star,b^\star,\gamma^\star)}{\partial a}\right|\triangle a^\star + \left|\frac{\partial c(a^\star,b^\star,\gamma^\star)}{\partial b}\right|\triangle b^\star + \left|\frac{\partial c(a^\star,b^\star,\gamma^\star)}{\partial \gamma}\right|\triangle \gamma^\star\\
\approx& 0.052428.
\end{aligned}
$$

Vrijedi

$$
c^\star = \sqrt{(a^\star)^2+(b^\star)^2-2a^\star b^\star\cos\gamma^\star} = 5.4367
$$

i

$$
\triangle c^\star \approx 0.052428 = 0.052428\cdot 10^0 \leqslant 0.5 = 0.5\cdot 10^0 = 0.5\cdot 10^{0-1+1},
$$

dakle sigurna je samo prva cifra, pa je možemo zaokružiti $c^\star \approx 5$. Relativna greška je

$$
\delta c^\star \approx \frac{\triangle c^\star}{|c^\star|} \approx 0.0096433 \approx 1\%.
$$

■

■ **Primjer 1.9** Ako je poznato $x_1 = 1\pm 0.005$, $x_2 = 1\pm 0.005$, $x_3 = 0.1\pm 0.005$, izračunati vrijednost, te apsolutnu i relativnu grešku funkcije $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 e^{-2x_3}$ u tački $A(1,1,0.1)$.

Rješenje: Vrijedi

$$
\begin{aligned}
&x_1^\star = 1,\ x_2^\star = 1,\ x_3^\star = 0.1,\ \triangle x_1^\star = 0.005,\ \triangle x_2^\star = 0.005,\ \triangle x_3^\star = 0.005,\\
&f(x_1^\star,x_2^\star,x_3^\star) = f(1,1,0.1) = 1 + 1\cdot e^{-2\cdot 0.1} \approx 1.81873\\
&\frac{\partial f(x_1^\star,x_2^\star,x_3^\star)}{\partial x_1} = 1,\\
&\frac{\partial f(x_1^\star,x_2^\star,x_3^\star)}{\partial x_2} = e^{-2x_3^\star} \approx 0.81873,\\
&\frac{\partial f(x_1^\star,x_2^\star,x_3^\star)}{\partial x_3} = -2x_2^\star e^{-2x_3^\star} \approx -1.63746,
\end{aligned}
$$

dalje je

$$
\begin{aligned}
\triangle f^\star \approx& \left|\frac{\partial f(x_1^\star,x_2^\star,x_3^\star)}{\partial x_1}\right|\triangle x_1^\star + \left|\frac{\partial f(x_1^\star,x_2^\star,x_3^\star)}{\partial x_2}\right|\triangle x_2^\star + \left|\frac{\partial f(x_1^\star,x_2^\star,x_3^\star)}{\partial x_3}\right|\triangle x_3^\star\\
=& 1\cdot 0.005 + 0.81873\cdot 0.005 + 1.6375\cdot 0.005 = 0.01728.
\end{aligned}
$$

Kako je

$$\triangle f^{\star} \approx 0.01728 = 0.1728 \cdot 10^{-1} \leqslant 0.5 \cdot 10^{-1} = 0.5 \cdot 10^{0-2+1},$$

$\triangle f^{\star}$ ima dvije sigurne cifre, pa je $f^{\star} \approx 1.8$. Relativna greška je

$$\delta f^{\star} \approx \frac{f^{\star}}{|f^{\star}|} \approx 0.0095 \approx 1\%.$$

■

1.4 Inverzni (obratni) problem greške

Inverzni problem greške je određivanje granice dopustivih vrijednosti grešaka argumenata za koje greška funkcije ne prelazi unaprijed zadanu vrijednost. U slučaju funkcija jedne realne promjenljive, ako je ta funkcija diferencijabilna vrijedi

$$f(x) = f(x^{\star}) + f'(\tilde{x})(x - x^{\star}), \tag{1.27}$$

gdje je $\tilde{x}$ između x i $x^{\star}$. Sada za $f'(\tilde{x}) \neq 0$, vrijedi

$$x - x^{\star} = \frac{f(x) - f(x^{\star})}{f'(\tilde{x})}. \tag{1.28}$$

Kako ne znamo $\tilde{x}$, to je

$$\triangle x^{\star} \approx \frac{\triangle f^{\star}}{|f'(x^{\star})|}, \; f'\left(x^{\star}\right) \neq 0. \tag{1.29}$$

Ako je f funkcija od n argumenata, tj. $f(x_1, \ldots, x_n)$, onda se zadavanjem greške funkcije zadaje samo jedna veza između n nepoznatih $\triangle x_1^{\star}, \ldots, \triangle x_n^{\star}$. Ako je poznata apsolutna greška vrijednosti funkcije (1.23), dodatni uslovi koje apsolutne greške argumenata treba da zadovoljavaju obično se definišu na jedan od sljedećih načina

1. Princip jednakih uticaja (doprinosa, efekata)
   Neka vrijedi

   $$\left|\frac{\partial f(x_1^{\star}, \ldots, x_n^{\star})}{\partial x_1}\right| \triangle x_1^{\star} = \cdots = \left|\frac{\partial f(x_1^{\star}, \ldots, x_n^{\star})}{\partial x_n}\right| \triangle x_n^{\star},$$

   te zbog (1.23) vrijedi

   $$\triangle f^{\star} \approx n \left|\frac{\partial f(x_1^{\star}, \ldots, x_n^{\star})}{\partial x_k}\right| \triangle x_k^{\star},$$

   i na kraju

   $$\triangle x_k^{\star} \approx \frac{\triangle f^{\star}}{n\left|\frac{\partial f(x_1^{\star}, \ldots, x_n^{\star})}{\partial x_k}\right|}, \; k = 1, \ldots, n. \tag{1.30}$$

2. Princip jednakih apsolutnih grešaka
   Neka je sada

   $$\triangle x_1^{\star} = \cdots = \triangle x_n^{\star},$$

ponovo zbog (1.23) imamo

$$\triangle f^\star \approx \triangle x_k^\star \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^\star,\dots,x_n^\star)}{\partial x_j} \right|,$$

te dobijamo

$$\triangle x_k^\star \approx \frac{\triangle f^\star}{\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^\star,\dots,x_n^\star)}{\partial x_j} \right|}, \; k = 1,\dots,n. \tag{1.31}$$

3. Princip jednakih relativnih grešaka
   Neka je sada

$$\delta x_1^\star = \cdots = \delta x_n^\star,$$

te ponovo zbog (1.23) imamo

$$\begin{aligned}\triangle f^\star &\approx \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^\star,\dots,x_n^\star)}{\partial x_j} \right| \triangle x_j^\star \cdot \frac{\left|x_j^\star\right|}{\left|x_j^\star\right|} = \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^\star,\dots,x_n^\star)}{\partial x_j} \right| \left|x_j^\star\right| \cdot \frac{\triangle x_j^\star}{\left|x_j^\star\right|} \\ &= \frac{\triangle x_k^\star}{\left|x_k^\star\right|} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^\star,\dots,x_n^\star)}{\partial x_j} \right| \left|x_j^\star\right|, \; k = 1,\dots,n,\end{aligned}$$

pa je

$$\triangle x_k^\star \approx \frac{\triangle f^\star \left|x_k^\star\right|}{\sum_{j=1}^{n} \left| x_j^\star \frac{\partial f(x_1^\star,\dots,x_n^\star)}{\partial x_j} \right|}, \; k = 1,\dots,n. \tag{1.32}$$

■ **Primjer 1.10** Potrebno je izradi pravilnu šestostranu piramidu, dužine stranice baze $a = 3.5\,\text{cm}$ i dužine visine bočne stranice $h = 7.2\,\text{cm}$. Odrediti najveće dopuštene apsolutne greške promjenljivih a i h, tako da se površina izrađene piramide razlikuje najviše za $\triangle P^\star = 0.5$ od predviđene. Zadatak uraditi koristeći sva tri principa.

Rješenje: Površinu zadane piramide računamo po formuli

$$P = B + O = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} + 3ah.$$

1. Princip jednakih uticaja

   Vrijednost najveće dopuštene apsolutne greške argumenenata računamo po (1.30), tj.
   $\triangle x_k^\star \approx \dfrac{\triangle f^\star}{n\left|\frac{\partial f(x_1^\star,\dots,x_n^\star)}{\partial x_k}\right|}$, $k = 1,\dots,n$. U našem slučaju je

$$\begin{aligned}\triangle a^\star &\approx \frac{\triangle P^\star}{2\left|\frac{\partial P(a^\star,h^\star)}{\partial a}\right|} \\ \triangle h^\star &\approx \frac{\triangle P^\star}{2\left|\frac{\partial P(a^\star,h^\star)}{\partial h}\right|},\end{aligned} \tag{1.33}$$

i

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(a^\star,h^\star)}{\partial a} &= 3\sqrt{3}a+3h\\ \frac{\partial P(a^\star,h^\star)}{\partial h} &= 3a.\end{aligned}$$

Koristeći prethodne relacije i uvrštavajući odgovarajuće vrijednosti dobijamo

$$\begin{aligned}\triangle a^\star &\approx \frac{\triangle P^\star}{2\left|\frac{\partial P(a^\star,h^\star)}{\partial a}\right|} = \frac{0.5}{2(3\sqrt{3}\cdot 3.5+3\cdot 7.2)} = 0.0062835\\ \triangle h^\star &\approx \frac{\triangle P^\star}{2\left|\frac{\partial P(a^\star,h^\star)}{\partial h}\right|} = \frac{0.5}{2\cdot 3\cdot 3.5} = 0.0238095.\end{aligned}$$

2. Princip jednakih apsolutnih grešaka

   Vrijednost najveće dopuštene apsolutne greške argumenata računamo po (1.31), tj.

   $\triangle x_k^\star \approx \dfrac{\triangle f^\star}{\sum_{j=1}^{n}\left|\dfrac{\partial f(x_1^\star,\dots,x_n^\star)}{\partial x_k}\right|}$, $k=1,\dots,n$. Sada je

$$\begin{aligned}\triangle a^\star = \triangle h^\star &\approx \frac{\triangle P^\star}{\left|\frac{\partial P(a^\star,h^\star)}{\partial a}\right| + \left|\frac{\partial P(a^\star,h^\star)}{\partial h}\right|}\\ &= \frac{0.5}{3\sqrt{3}\cdot 3.5+3\cdot 7.2+3\cdot 3.5} = 0.0099430.\end{aligned}$$

3. Princip jednakih relativnih grešaka

   Vrijednost najveće dopuštene apsolutne greške argumenata računamo po (1.32), tj.

   $\triangle x_k^\star \approx \dfrac{\triangle f^\star |x_k^\star|}{\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^\star\dfrac{\partial f(x_1^\star,\dots,x_n^\star)}{\partial x_j}\right|}$, $k=1,\dots,n$. Sada je

$$\begin{aligned}\triangle a^\star &\approx \frac{\triangle P^\star\,|a^\star|}{\left|a^\star\frac{\partial P(a^\star,h^\star)}{\partial a}\right| + \left|h^\star\frac{\partial P(a^\star,h^\star)}{\partial h}\right|} = 0.0081451\\ \triangle h^\star &\approx \frac{\triangle P^\star\,|h^\star|}{\left|a^\star\frac{\partial P(a^\star,h^\star)}{\partial a}\right| + \left|h^\star\frac{\partial P(a^\star,h^\star)}{\partial h}\right|} = 0.0167557.\end{aligned}$$

■

1.5 Zadaci za vježbu

1. (a) Šta znači da približni broj $a^\star = b_m^\star \times 10^m + b_{m-1}^\star \times 10^{m-1} + \cdots$ ima n sigurnih cifara?
   (b) Odredi broj sigurnih cifara broja $a = 0.003527 \pm 0.0005$ i prema tome ga zaokružite.
   (c) Ako je $a = 21.537 \pm 0.0005$, koliki je broj sigurnih cifara pribliňog broja $a^\star$. Kolika je njegova apsolutna i relativna grteška?
2. (a) Definisati broj apsolutnu i relativnu grešku približnog broja $a^\star$.

(b) Ako je $a = 83722.61 \pm 0.0005$, koliki je broj sigurnih cifara približnog broja $a^\star$. Kolika je njegova apsolutna i relativna grteška?

(c) Neka je $a = 123.004567 \pm 0.00005$ i $b = 3.4567 \pm 0.0005$. Odredite broj sigurnih cifara brojeva a i b i zaokružiti ih na sigurne cifre. Procijeniti apsolutnu grešku broja $z = a + b$.

3. (a) Kako se definišu sigurne cifre aproksimacije $a^\star$ realnog broja $a \in \mathbb{R}$?

   (b) Broj $a = 21.31257$ zaokružiti na dvije, tri te na četiri decimale.

   (c) Broj $a = 61.95295$ zaokružiti na dvije, tri te na četiri decimale.

4. (a) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija i $x_i = x_i^\star \pm \triangle x_i^\star$, $i = 1, 2$. Napisati formulu za određivanje apsolutne greške funkcije.

   (b) Neka je $r = 2.537 \pm 0.005$ poluprečnik baze, a $h = 5.246 \pm 0.005$ visina pravilne kupe. Odredite apsolutnu i relativnu grešku kod izračunavanja zapremine kupe. Smatrati da je $\pi = 3.14159$ tačna vrijednost.

   (c) Sa kojom tačnošću bismo morali imati radijus baze $r^\star$, odnosno visinu $h^\star$ pravilne kupe da se kod računanja zapremine ne premaši dozvoljena apsolutna greška ε?

   (d) Neka je $a = 2.537 \pm 0.005$ dužina stranice baze, a $h = 5.246 \pm 0.005$ visina četvorostrane piramide. Odredite apsolutnu i relativnu grešku kod računavanja zapremine piramide.

   (e) S kojom tačnošću morali imati dužinu stranice baze $a^\star$, odnosno visinu $h^\star$ četvorostrane piramide da se kod računavanja volumena piramide ne premaši dozvoljena apsolutna greška ε?

5. (a) Napisati formulu za procjenu apsolutne greške vrijednosti fukcije f u tački $x^\star = (x_1^\star, \ldots, x_n^\star)$, ako je $x_i = x_i^\star \pm \triangle x_i^\star$, $i = 1, \ldots, n$.

   (b) Procijeniti apsolutnu i relativnu grešku pri računanju zapremine torusa $V = 2ar^2\pi^2$, koji nastaje rotacijom kruga radijusa r, čije je središte za a udaljeno od centra rotacije ako je $r = 25.00 \pm 0.05$, $a = 90.00 \pm 0.05$. Smatrati da je $\pi = 3.14159$ tačna vrijednost.

   (c) Kolike smiju biti apsolutne greške veličina a i r, tako da apsolutna greška zapremine torusa uz primjenu principa jednakih efekata ne bude veća od $\triangle V = 0.005$?

   (d) Procijenite apsolutnu i relativnu grešku pri računavanju površine torusa $O = 4ar\pi^2$, koji nastaje rotacijom kruga polupreñika r, čije je središte za a udaljeno od centra rotacije, ako je $r = 25.00 \pm 0.05$, $a = 90.00 \pm 0.05$. Uzeti da je $\pi = 3.14159$ tačna vrijednost.

   (e) Kolike smiju biti apsolutne greške veličina r i a, tako da apsolutna greška površine torusa uz pretpostavku da greška u r na nju utiče dva puta više od greške u a, ne bude veća od $\triangle O^\star = 0.005$?

6. (a) Napisati formule za procjenu apsolutnih grešaka $\triangle x_i^\star$ nezavisnih promjenljivih funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ u tački $x^\star = (x_1, \ldots, x_n)$ "po principu jednakih efekata", tako da apsolutna greška funkcije ne premaši broj $\triangle f^\star$.

   (b) Potrebno je izraditi pravilnu šestorostranu piramidu, dužine ivice baze $a = 3.5$ i dužine visine bočne stranice $h = 7.2$, tako da se površina dobijene piramide razlikuje najviše za $\triangle P^\star = 0.5$. Kolike su najveće dopuštene apsolutne greške promjenljivih a i h za dopuštenu vrijednost $\triangle P^\star$ (koristiti princip jednakih efekata)?

7. (a) Napisati formulu za procjenu apsolutne greške vrijednosti funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ u tački $x^\star = (x_1, \ldots, x_n)$ ako je $x_i = x_i^\star \pm \triangle x_i^\star$, $i = 1, \ldots, n$.

   (b) Neka je $a = 3.76 \pm 0.005$ dužina ivice baze i $h = 7.22 \pm 0.005$ dužina visine bočne stranice pravilne trostrane piramide. Odredite apsolutnu i relativnu grešku pri računanju površine ove piramide.

(c) Neka je $a = 3.76 \pm 0.005$ dužina ivice baze, a $H = 7.22 \pm 0.005$ dužina visine pravilne četvorostrane piramide. Odredite površinu te piramide. Procijenite apsolutne greške kod računavanja površine baze B, površine bočne stranice P_B i omotača piramide M.

(d) Neka je $a = 3.76 \pm 0.005$ dužina baze, a $k = 7.22 \pm 0.005$ dužina kraka jednakostraničnog trokuta. Procijenite apsolutnu grešku $\triangle P^\star$ kod računanja površine P tog trokuta.

(e) Ako je površinu trougla potrebno dobiti sa tačnošću $\triangle P^\star = 0.0005$, sa kojom tačnošću mora biti zadana dužina baze i dužina kraka?

2. Interpolacija

Viskoznost vode određena je eksperimentalno za neke vrijednosti temperature vode i ti podaci su u sljedećoj tabeli

temperatura	0^0	5^0	10^0	15^0
viskoznost	1.792	1.519	1.308	1.140

Iz podataka datih u prethodnoj tabeli možemo li odrediti vrijednost viskoznosti vode za temperaturu $t = 8^0$ u nekim prihvatljivim granicama greške?

2.1 Uvod

Posmatrajmo sljedeća dva problema kao motivaciju za teme koje će biti izlagane u ovom poglavlju.

Prvi problem. Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i zadana je tabelarno gdje je

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

$y_i = f(x_i),\ i = 0,\ldots,n$. Da li je moguće na osnovu podataka iz tabele, tj. iz uslova

$$p(x_i) = f(x_i),\ i = 0,1,\ldots,n. \tag{2.1}$$

dobiti analitički oblik neke fukcije p koja će biti "bliska" funkciji f u nekom određenom smislu (poslije će biti rečeno u kojem)?

Drugi problem. Posmatrajmo ponovo funkciju f iz prethodnog problema, i neka je sada poznat njen analitički oblik, ali za kalkulacije koje treba da se urade sa ovom funkcijom taj analitički oblik je suviše komplikovan.

Dakle korisno je, a nekada i neophodno zamijeniti funkciju f sa nekom funkcijom p koja je "bliska" u nekom smislu sa funkciji f, a čiji analitički oblik možemo lako izračunati, za ovakvu funkciju p kažemo da aproksimira funkciju f i pišemo $f \approx p$. Kako će se definisati bliskost ovih funkcija zavisi od metrike uvedene u prostoru kojem pripadaju funkcije, te stoga imamo različite tipove zadataka teorije aproksimacije. Funkcija p, u načelu, zavisi od parametara $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, i optimalna bliskost postiže se izborom ovih parametara. Ako je p linearna funkcija parametara a_i, $i = 0, 1, \dots, n$, aproksimacija je linearna u suprotnom je nelinearna. Pri linearnoj aproksimaciji p se traži u obliku generalisanog polinoma

$$p(x) = a_0\phi_0(x) + \dots + a_n\phi_n(x), \tag{2.2}$$

gdje su $\phi_0, \dots, \phi_n$ linearno nezavisne funkcije koje čine tzv. osnovni sistem funkcija. Funkcije $\phi_i, i = 0, \dots, n$ najčešće se biraju iz neke specijalne klase funkcija (stepene, racionalne, trigonometrijske, eksponencijalne funkcije,...). Na primjer, ako osnovni sistem čine cijeli nenegativni stepeni argumenta x, $\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x, \dots, \phi_n(x) = x^n$, funkcija p je algebarski polinom stepena n

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \tag{2.3}$$

indeks n u oznaci p_n označava stepen polinoma. Ako sada izaberemo funkcije ϕ_i, $i = 0, \dots, 2n-1$ na sljedeći način: $\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = \cos x, \phi_2(x) = \sin x, \dots, \phi_{2n-2}(x) = \cos nx, \phi_{2n-1}(x) = \sin nx$, p je trigonometrijski polinom stepena n

$$p_n(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos x + b_n \sin x. \tag{2.4}$$

Nastavak ovog poglavlja većim dijelom posvećen je aproksimaciji funkcije polinomom, a jedan od razloga primjene polinoma u apoksimaciji funkcija je uniformna aproksimacija neprekidnih funkcija. Za datu funkciju neprekidnu na segmentu $[a, b]$, postoji polinom koji je "blizu" te funkcije koliko to mi želimo. Ovaj rezultat je precizno formulisan u sljedećoj Weierstrassovoj[1] teoremi.

Teorema 2.1.1 — Weierstrass. Pretpostavimo da je funkcija f definisana i neprekidna na segmentu $[a, b]$. Za svako $\varepsilon > 0$, postoji polinom p, sa osobinom

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in [a, b]. \tag{2.5}$$

Dokaz. Vidjeti u npr. [1, str.198] ■

Na Slici 2.1 predstavljeni su funkcija f i polinom p. Vidimo da je $p(x)$ ograničen sa $f(x) + \varepsilon$ i $f(x) - \varepsilon$.

Vratimo se prvom problemu. Poznate su vrijednosti neprekidne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ u tačkama $x_0, x_1, \dots, x_n$. Cilj nam je konstruisati polinom p_n kojim ćemo aproksimirati funkciju f. Polinom p_n će biti jednak funkciji f u tačkama x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, tj.

$$p_n(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n. \tag{2.6}$$

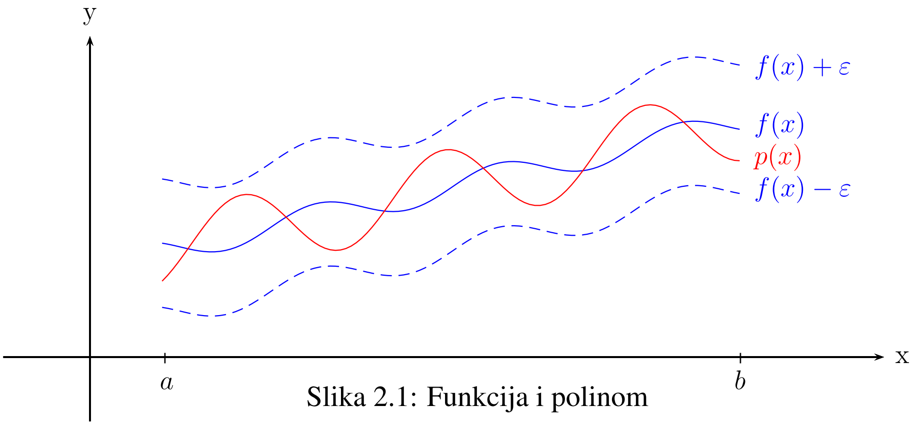
Problem određivanja funkcije p_n, (u našem slučaju polinoma) na osnovu uslova (2.6), nazivamo problem interpolacije. Tačke

$$a \leqslant x_0 < x_1 \dots < x_n \leqslant b, \tag{2.7}$$

nazivaju se čvorovi interpolacije, i vrijedi

$$x_i \neq x_j, i \neq j, \quad i, j = 0, \dots, n. \tag{2.8}$$

[1] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, (31. oktobar 1815.–19. februar 1897.) bio je njemački matematičar, često citiran kao "otac moderne analize".



Slika 2.1: Funkcija i polinom

Dakle, funkciju f aproksimiraćemo (ili interpoliraćemo) polinomom

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{2.9}$$

tako da vrijedi (2.6).

Kod interpolacije postavljaju se tri osnovna pitanja:

1. Pod kojim uslovima postoji interpolacioni polinom?
2. Kako se računaju koeficijenti a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ interpolacionog polinoma?
3. Kolika je greška aproksimacije funkcije f interpolacionim polinomom p_n?

Odgovorimo na prvo pitanje. Potrebno je izračunati nepoznate koeficijente a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ polinoma (2.9). Iskoristimo uslov (2.6), dobijamo sistem od $n+1$ linearne jednačine sa $n+1$ nepoznatom (koeficijenti $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$)

$$\begin{aligned}
a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 &= f(x_0)\\
a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 &= f(x_1)\\
&\vdots\\
a_n x_n^n + a_{n-1}x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 &= f(x_n).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Teorema 2.1.2 Postoji jedinstveno određen polinom p_n stepena n koji u $n+1$ različitoj tački x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ zadovoljava (2.6).

Dokaz. Determinanta matrice sistema (2.10) je Vandermondeova determinanta

$$D = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1\\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1\\ \vdots & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

i $D \neq 0$ uz uslov (2.7). Sistem (2.10) ima jedinstveno rješenje, tj. interpolacioni polinom p_n postoji i jedinstven je. ∎

■ **Primjer 2.1** Izračunati interpolacioni polinom čiji grafik prolazi tačkama datim u tabeli

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	7

Rješenje: Pošto su date tri tačke $n = 2$, pa ćemo računati interpolacioni polinom u obliku

$$p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Poslije uvrštavanja vrijednosti datih u tabeli u polinom p_2 dobijamo sistem

$$\begin{aligned} a_2 + a_1 + a_0 &= 1 \\ 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 3 \qquad (2.12) \\ 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= 7. \end{aligned}$$

(2.13)

Rješavanjem sistema dobijamo $a_2 = 1$, $a_1 = -1, a_0 = 1$, dakle traženi polinom je $p_2(x) = x^2 - x + 1$.
■

2.2 Lagrangeov oblik interpolacionog polinoma

Postupak korišten u Primjeru 2.1 nije najpogodniji za računanje interpolacionog polinoma, jer broj čvorova interpolacije može biti veliki, a pokazuje se da je sistem koji se dobije je loše uslovljen[2]. Poznate su nam vrijednosti funkcije f u čvorovima interpolacije x_i, $i = 0, \ldots, n$, i hoćemo da je vrijednost interpolacionog polinoma p_n jednaka vrijednosti funkcije u čvorovima interpolacije. Da bi konstruisali interpolacioni polinom p_n posmatrajmo polinome $l_0, l_1, \ldots, l_n$ stepena n definisane sa

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \tag{2.14}$$

x_i, $i = 0, \ldots, n$ su različite tačke. Primjetimo da su polinomi[3] l_i stepena n i da vrijedi

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \tag{2.15}$$

Sada, kada su poznate kardinalne fukcije l_i, $i = 0, \ldots, n$ možemo interpolirati funkciju f sa interpolacionom polinomom p_n u Lagrangeovom[4] obliku

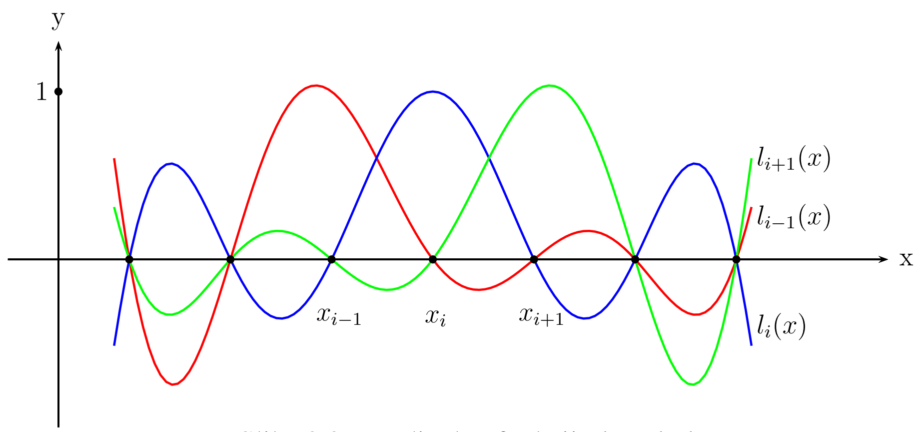
$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i). \tag{2.16}$$

■ **Primjer 2.2** Izračunati Lagrangeov interpolacioni polinom za funkciju f datu tabelarno

[2]Grubo govoreći, za male promjene vrijednosti elemenata matrice sistema ili elemenata vektora slobodnih članova dobijamo veliku promjene u rezultatu.

[3]Polinomi l_i u interpolacionoj teoriji su poznati i kao kardinalne ili Lagrangeove funkcije

[4]Joseph-Louis Lagrange (25. janura 1736.–10.april 1813.), uobičajeno se smatra da je bio francuski matematičar, mada ga u nekim italijanskim izvorima smatraju italijanskim matematičarem. Dao veliki doprinos u analizi, teoriji brojeva, mehanici i dr.



Slika 2.2: Kardinalne funkcije l_{i-1}, l_i, l_{i+1}

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	7

Rješenje: Izračunajmo prvo kardinalne funkcije l_i, $i = 0,1,2$. Vrijedi

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2}$$
$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = \frac{-(x-1)(x-3)}{1}$$
$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2},$$

sada je

$$p_2(x) = 1\cdot l_0(x) + 3\cdot l_1(x) + 7\cdot l_2(x) = x^2 - x + 1. \tag{2.17}$$

Dobili smo isti polinom kako u Primjeru 2.1. ■

■ **Primjer 2.3** Izračunati Lagrangeov interpolacioni polinom za funkciju $f(x) = \cos x$ ako su čvorovi interpolacije $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$ i $x_3 = \frac{\pi}{3}$. Zatim izračunati približnu vrijednost funkcije f u tački $x = \frac{5\pi}{180}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= \cos 0 \cdot \frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})}{(0-\frac{\pi}{6})(0-\frac{\pi}{4})(0-\frac{\pi}{3})} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{6}-0)(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})}\\
&\quad + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{4}-0)(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})} + \cos\frac{\pi}{3}\cdot\frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{3}-0)(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}\\
&= \frac{72(1-8\sqrt{2}+6\sqrt{3})x^3 + 18(1+16\sqrt{2}-14\sqrt{3})\pi x^2 + (-17-32\sqrt{2}+36\sqrt{3})\pi^2 x + 2\pi^3}{2\pi^3},
\end{aligned}$$

ili poslije zaokruživanja

$$p_3(x) = 0.0912547x^3 - 0.5665525x^2 + 0.0157556x + 1. \tag{2.18}$$

Vrijedi

$$p_3\left(\frac{5\pi}{180}\right) = 0.9971210,$$
$$\cos\frac{5\pi}{180} = 0.9961947$$

i apsolutna greška u tački $x = \frac{5\pi}{180}$ je

$$\left|p_3\left(\frac{5\pi}{180}\right) - \cos\frac{5\pi}{180}\right| = 0.0009263.$$

■

2.3 Newtonov oblik interpolacionog polinoma

Lagrangeov oblik interpolacionog polinoma nije uvijek najpogodniji za primjenu. Recimo da smo izračunali Lagrangeov oblik interpolacioni polinoma p_n kojim interpoliramo funkciju f. Za konstrukciju ovog polinoma p_n koristili smo $n+1$ tačku $A_i(x_i, f(x_i))$, $i = 0,\dots,n$. Ako sada hoćemo da dodamo još jednu tačku $A_{n+1}(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$, tačkama A_i, $i = 0,\dots,n$ i da interpoliramo funkciju f i u ovoj tački moramo ponovo računati kardinalne funkcije l_i, $i = 0,\dots,n$ te još jednu l_{n+1} kako je to već rađeno u Podpoglavlju 2.2. Međutim možemo i drugačije uraditi, što se može vidjeti iz sljedećeg primjera.

■ **Primjer 2.4** Neka je potrebno funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ interpolirati u tačkama zadanim u sljedećoj tabeli

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	7	7

Rješenje: Pođimo od prve tačke iz tabele $A_0(1,1)$. Ona nam određuje polinom nultog stepena

$$p_0(x) = 1.$$

Dodajmo sljedeću tačku $A_1(2,3)$ i potražimo polinom prvog stepena p_1 u obliku

$$p_1(x) = p_0(x) + a_1(x - x_0).$$

Koeficijent a_1 računamo iz uslova $p_1(x_1) = f(x_1)$, pa je

$$3 = 1 + a_1(2-1),$$

odnosno $a_1 = 2$. Sada je

$$p_1(x) = 1 + 2(x-1).$$

Dodajemo sljedeću tačku $A_2(3,7)$ i računamo p_2 kao

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x-x_0)(x-x_1),$$

koeficijent a_2 računamo iz uslova $p_2(x_2) = f(x_2)$, pa je

$$7 = 1 + 2(3-1) + a_2(3-1)(3-1).$$

Dobijamo $a_2 = 1$, te je

$$p_2(x) = 1 + 2(x-1) + 1\cdot(x-1)(x-2),$$

polinom p_2 možemo zapisati u obliku

$$p_2(x) = x^2 - x + 1. \tag{2.19}$$

Možemo primjetiti da je polinom u (2.19) isti kao i polinom u Primjerima 2.1 i 2.2 (iste su tačke korištene). I na kraju dodajmo i posljednju tačku $A_3(4,7)$. Tražimo polinom p_3 u obliku

$$p_3(x) = p_2(x) + a_3(x-1)(x-2)(x-3),$$

koristeći uslov $p_3(x_3) = f(x_3)$. Imamo

$$7 = 16 - 4 + 1 + a_3(4-1)(4-2)(4-3),$$

pa je $a_3 = -1$.

$$p_3(x) = x^2 - x + 1 - (x-1)(x-2)(x-3) = -x^3 + 7x^2 - 12x + 7.$$

Dobijeni polinom možemo napisati i u obliku

$$p_3(x) = 1 + 2(x-1) + (x-1)(x-2) - (x-1)(x-2)(x-3).$$

■

Izvršimo sada generalizaciju izloženog postupka u Primjeru 2.4. Neka su date različite tačke

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b,$$

i neka su poznate vrijednosti funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ u datim tačkama x_i, $i = 0,\ldots,n$ tj. u čvorovima interpolacije $f(x_i)$, $i = 0,\ldots,n$. Želimo da odredimo interpolacioni polinom

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \tag{2.20}$$

stepena n za koji vrijedi $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,\ldots,n$. Polinom p_n iz prethodne jednakosti možemo i ovako zapisati

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}). \tag{2.21}$$

Potrebno je izračunati koeficijente a_i, $i = 0,\ldots,n$, samim tim će biti određeni polinomi p_i, $i = 0,\ldots,n$ iz (2.21), respektivno.

Prvi koeficijent a_0 računamo koristeći prvu tačku $A_0(x_0, f(x_0))$ iz uslova $p_n(x_0) = f(x_0)$, a zbog oblika polinoma p_n datog u (2.20) je

$$p_n(x_0) = f(x_0) = a_0,$$

odnosno

$$p_0(x) = a_0.$$

Drugi koeficijent a_1 računamo koristeći p_0 i sljedeću tačku $A_1(x_1, f(x_1))$ iz uslova $p_n(x_1) = f(x_1)$, te je

$$p_n(x_1) = f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0),$$

i poslije računanja koeficijenta a_1 dobijamo

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0).$$

Pretpostavimo sada da smo izračunali polinom p_k, $k < n$ za koji važi $p_k(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, k$. Polinom p_{k+1}, odnosno koeficijent a_{k+1} računamo koristeći tačku $A_{k+1}(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ i uslov $p_{k+1}(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$, iz sljedeće jednakosti

$$p_{k+1}(x) = p_k(x) + a_{k+1}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_k),$$

odnosno poslije uvrštavanja $x = x_{k+1}$ i $p_{k+1}(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$

$$f(x_{k+1}) = p_k(x_{k+1}) + a_{k+1}(x_{k+1} - x_0)(x_{k+1} - x_1)\cdots(x_{k+1} - x_k).$$

Na ovaj način izračunali smo koeficijent a_{k+1}. Preostale koeficijente izračunaćemo nastavljajući izloženi postupak. Ovaj postupak je Newtonov algoritam pomoću kojeg polazeći od polinoma nultog stepena za koji je $p_0(x_0) = f(x_0)$ možemo konstruisati interpolacioni polinom p_n. Interpolacioni polinom dobijen na ovakav način naziva se interpolacioni polinom u Newtonovom[5] obliku ili Newtonov interpolacioni polinom. Ovaj polinom u opštem obliku ima oblik

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}), \quad (2.22)$$

ili kraće zapisan

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j), \quad (2.23)$$

pri čemu smatramo da je $\prod_{j=0}^{-1}(x - x_j) = 1$.

2.3.1 Podijeljene razlike

Algoritam opisan u prethodnom podpoglavlju znatno pojednostavljuje računanje interpolacionog polinoma u odnosu na računanje interpolacionog polinoma u Lagrangeovom obliku. Međutim, postoji i bolji algoritam. Algoritam kojim je moguće još lakše izračunati interpolacioni polinom.

Da bismo odredili interpolacioni polinom p_n u Newtonovom obliku

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}), \quad (2.24)$$

za funkciju f, treba da odredimo koeficijente $a_0, a_1, \dots, a_n$ tako da bude

$$p_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0, \dots, n. \quad (2.25)$$

Prethodni uslovi dovode do sistema jednačina

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= a_0\\
f(x_1) &= a_0 + a_1(x_1 - x_0)\\
f(x_2) &= a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\\
&\ \vdots\\
f(x_n) &= a_0 + a_1(x_n - x_0) + a_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}).
\end{aligned} \quad (2.26)$$

Sistem (2.26) možemo kraće zapisati

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \prod_{j=0}^{i-1}(x_k - x_j) = f(x_k),\ k = 0, \dots, n, \quad (2.27)$$

[5] Isaac Newton (25.decembar 1642. – 20.mart 1726/27. godine) bio je engleski matematičar, astronom i fizičar. Jedan od najuticajnijih naučnika svih vremena.

pri čemu je $\prod_{j=0}^{-1}(x_k - x_j) = 1$.

Nepoznate a_k, $k = 0, \ldots, n$ računamo rješavajući sistem (2.26). Vidimo da se a_0 može izračunati iz prve jednačine sistema (2.26) i da zavisi samo od $f(x_0)$. Zatim iz druge jednačine računamo a_1, ovaj koeficijent zavisi samo od $f(x_0)$ i $f(x_1)$. U opštem slučaju koeficijent a_k zavisi samo od $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_k)$. Drugim riječima a_k zavisi od vrijednosti funkcije f u čvorovima $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Uobičajeno označavanje je

$$a_k = f[x_0, \ldots, x_k],\ k = 0, \ldots, n. \tag{2.28}$$

Veličina $f[x_0, \ldots, x_k]$ naziva se podijeljena razlika funkcije f reda k. Primjetimo da su koeficijenti a_k, $k = 0, \ldots, n$ jedinstveno određeni sistemom (2.26) i da je

$$\begin{aligned}
a_0 &= f(x_0)\\
a_1 &= \frac{f(x_1) - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\\
a_2 &= \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0}\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.29}$$

pa je

$$\begin{aligned}
f[x_0] &= f(x_0)\\
f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\\
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Korištenjem oznaka za podijeljene razlike, interpolacioni polinom (2.24) možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned}
p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) +&\\
\cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})&
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Za računanje podijeljenih razlika postoji i bolji algoritam čija primjena zahtijeva manje računskog posla. Osnovu ovog algoritma data je u sljedećoj teoremi

Teorema 2.3.1 Za podijeljene razlike funkcije f vrijedi sljedeća relacija

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}. \tag{2.32}$$

Dokaz. Vidjeti u npr. Čelić [4]. ■

Osobina iskazana u sljedećoj teoremi može se iskoristiti za postizanje veće stabilnosti, to se postiže izmjenom indeksa. Ako je, na primjer, potrebno izračunati vrijednost nekog intepolacionog polinoma u nekoj tački x, tada se preporučuje permutovanje indeksa tako da vrijedi

$$|x - x_0| \leqslant |x - x_1| \leqslant \cdots \leqslant |x - x_n|.$$

Vrijedi sljedeća teorema

Teorema 2.3.2 Podijeljena razlika $f[x_0,x_1,\dots,x_k]$ se ne mijenja ako čvorovi $x_0,x_1,\dots,x_k$ permutiraju.

Dokaz. Vidjeti u npr. Čelić [4]. ■

Kako su čvorovi $x_0,x_1,\dots,x_k$ i k proizvoljni, rekurzivnu relaciju (2.32) možemo zapisati u sljedećem obliku

$$f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_j] = \frac{f[x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_j] - f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{j-1}]}{x_j - x_i}. \tag{2.33}$$

Sada prve tri podijeljene razlike izgledaju ovako

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f(x_i) \\ f[x_i,x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \\ f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}] &= \frac{f[x_{i+1},x_{i+2}] - f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+1} - x_i}. \end{aligned}$$

Koristeći (2.33) možemo konstruisati tabelu podijeljenih razlika za funkciju f. Predstavljena je tabela podijeljenih razlika za 4 čvora

x	$f[\ ]$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

Koeficijenti koji leže na gornjoj dijagonali su koeficijenti koje trebamo izračunati da bi dobili interpolacioni polinom u Newtonovom obliku. (magenta).

■ **Primjer 2.5** Funkciju $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ interpolirati u tačkama zadanim u sljedećoj tabeli

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	7	7

koristeći podijeljene razlike.

Rješenje: Formirajmo tabelu podijeljenih razlika

x	$f[\ ]$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$
1	1			
		2		
2	3		1	
		4		-1
3	7		-2	
		0		
4	7			

Pa je traženi polinom $p_3(x) = 1 + 2\cdot(x-1) + 1\cdot(x-1)(x-2) - 1\cdot(x-1)(x-2)(x-3)$. A ovo isti polinom kao u Primjeru 2.4. ■

2.4 Procjena greške interpolacije

Kako se interpolacioni polinom p_n koristi za aproksimaciju funkcije f, važno je znati procijeniti grešku te aproksimacije koju nazivamo greška interpolacije.

Neka je polinom p_n određen na osnovu različitih čvorova $x_0, x_1, \dots, x_n$ iz segmenta $[a,b]$, te neka je x proizvoljna tačka tog segmenta. Označimo sa

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) \tag{2.34}$$

grešku interpolacije u tački x.

U slučaju kada je f polinom stepena ne većeg od n, tada je $f(x) = p_n(x)$, pa je $R_n(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$. U slučaju da f nije prethodno pomenuti polinom, tada zbog uslova $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ vrijedi

$$R_n(x_i) = 0,\ i = 0, \dots, n, \tag{2.35}$$

pa se greška može zapisati u obliku

$$R_n(x) = \omega_{n+1}(x) \cdot k, \tag{2.36}$$

gdje je $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$, a k ćemo naknadno odrediti.

Vrijedi teorema

Teorema 2.4.1 Neka je $f \in C^{n+1}[a,b]$ funkcija čije su vrijednosti poznate u $n+1$ tački x_i, $i = 0, \dots, n$,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

i neka je p_n odgovarajući interpolacioni polinom. Tada za svaki $x \in [a,b]$ postoji $\xi \in (a,b)$, tako da je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x). \tag{2.37}$$

Dokaz. Za $x = x_i$ tvrdnja je očigledna. Za $x \neq x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ definišimo pomoćnu funkciju

$$g(t) := f(t) - p_n(t) - \omega_{n+1}(t) \cdot k, \quad t \in [a,b] \tag{2.38}$$

k ćemo odrediti tako da bude $g(x) = 0$. Na ovaj način funkcija g ima barem $n+2$ nule na segmentu $[a,b]$ i to u tačkama $x, x_0, x_1, \dots, x_n$. Sada prema Rolleovoj teoremi

funkcija g' ima barem $n+1$ nulu,

funkcija g'' ima barem n nula,

$\vdots$

funkcija $g^{(n+1)}$ ima barem 1 nulu, i neka je to za $\xi \in (a,b)$.

Vrijedi i $\frac{\mathrm{d}^{n+1} p_n(t)}{\mathrm{d}t^{n+1}} = 0$, te $\frac{\mathrm{d}^{n+1} \omega_{n+1}(t)}{\mathrm{d}t^{n+1}} = (n+1)!$ (ω_{n+1} je normirani polinom stepena $n+1$). Sada je

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k \cdot (n+1)!, \tag{2.39}$$

pa je

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{2.40}$$

Sada iz (2.40), (2.39) i (2.38) vrijedi (2.37). ■

Ako označimo $M_{n+1} := \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$, onda iz (2.36) dobijamo sljedeću procjenu interpolacije u tački x

$$|R_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_{n+1}(x)|, \tag{2.41}$$

kao i procjenu maksimalnu greške interpolacije na $[a,b]$

$$\max_{x\in[a,b]} |R_n(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{x\in[a,b]} |\omega_{n+1}(x)|. \tag{2.42}$$

■ **Primjer 2.6** Korištenjem interpolacionog polinoma drugog stepena na segmentu $[-1,1]$ izračunati $e^{0.9}$ i procijeniti grešku (korisiti ekvidistantno raspoređene čvorove).
Rješenje. Čvorovi interpolacije su $x_0 = -1, x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Tabela vrijednosti je

x	-1	0	1
$f(x)$	0.367879	1.000000	2.718282

Interpolacioni polinom ima oblik

$$\begin{aligned} p_2(x) =& f(x_0)\cdot l_0(x) + f(x_1)\cdot l_1(x) + f(x_2)\cdot l_2(x) \\ =& f(x_0)\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ =& 1 + 1.175201x + 0.543080x^2 \end{aligned}$$

Tražena vrijednost je

$$p_2(0.9) = 2.497576555,$$

procjena greške

$$|f(0.9) - p_2(0.9)| \leq \left|\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(0.9-(-1))(0.9-0)(0.9-1)\right| \leq \frac{e}{3!}|1.9\cdot 0.9\cdot(-0.1)| \leq 0.0775.$$

■

■ **Primjer 2.7** Funkciju $f(x) = \cos\pi x$ na segmentu $[0,1]$ interpolirati koristeći 9 čvorova podjednako raspoređenih, te procijeniti grešku interpolacije.

Rješenje:

Odgovarajuća tabela sa vrijednostima funkcije f u čvorovima je

x	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x)$	1	0.7071068	0	-0.70701068	-1	-0.7071068	0	0.7071068	1

Dobijeni interpolacioni polinom je

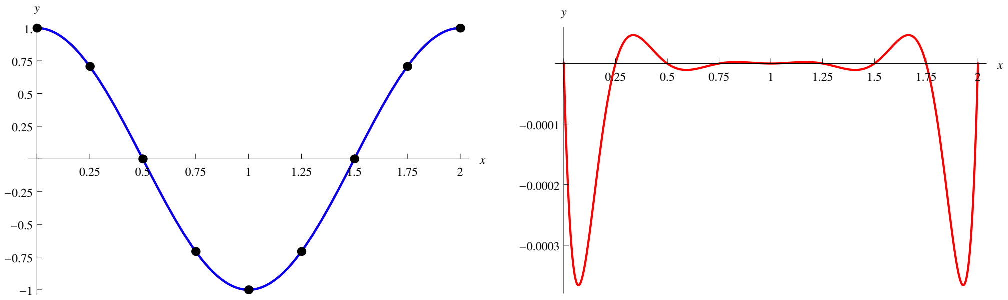
$$\begin{aligned} p_8(x) = & -0.19139x^8 + 1.53111x^7 - 4.04790x^6 + 2.85184x^5 \\ & + 2.21342x^4 + 0.71481x^3 - 5.08467x^2 + 0.01279x + 1. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Vrijednost greške računamo prema (2.42), a kako je

$$\left|f^{(IX)}(x)\right| = \pi^9 |\sin x| \leqslant \pi^9,$$

to je sada vrijednost greške

$$|f(x) - p_8(x)| \leqslant \frac{\pi^9}{9!} |x(x-0.25)(x-0.5)\cdots(x-0.75)(x-2)| \leqslant 0.00165. \tag{2.44}$$



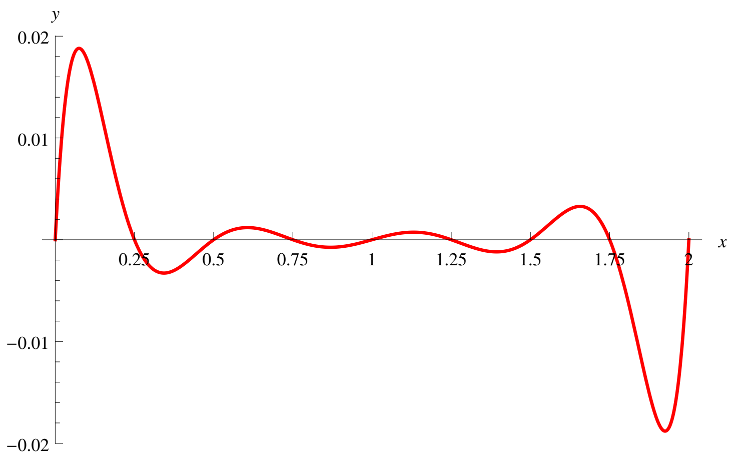
Slika 2.3: Grafici funkcije f, polinoma p_8 i razlike ove dvije funkcije

■

Na slici (2.3) lijevo su grafici funkcije $f(x) = \cos x$ i dobijenog interpolacionog polinoma $p_8(x)$. Prvo je nacrtan grafik interpolacionog polinoma p_8 crvenom bojom, a zatim grafik funkcije f plavom bojom. Razlika između ova dva grafika je veoma mala i samo se vidi grafik predstavljen plavom bojom, grafik funkcije f. Desno je grafik razlike funkcije f i interpolacionog polinoma p_8. Vidimo sa tog grafika da je vrijednost greške manja od 0.0004, što se slaže sa izračunatom vrijednošću greške (2.44).

2.4.1 Nule Čebiševljevih polinoma kao čvorovi interpolacije

Sa grafika greške iz prethodnog primjera vidimo da je vrijednost greške najveća (uzeto po apsolutnoj vrijednosti) na prvom i posljednjem podsegmentu, segmenta u ovom slučaju $[0,2]$. Na sljedećoj slici dat je grafik funkcije ω_9 iz prethodnog primjera, koja se pojavljuje u izrazu za procjenu greške (2.37) i (2.42).



Slika 2.4: Grafik polinoma ω_9

Lako je i sa ovog grafika polinoma ω_9, primjetiti da je vrijednost greške najmanja na sredini segmenta na kome se vrši interpolacija, a da se greška povećava kako se približavamo krajevima segmenta. Cilj nam smanjiti vrijednost greške. Jedno od mogućih rješenja je redistribucija čvorova. Drugim riječima zahtijevamo da rastojanje između čvorova nije isto, nego da se postepeno smanjuje kako idemo od sredine segmenta ka krajnjim tačkama. Ovu osobinu imaju nule Čebiševljenih[6] polinoma. Čebiševljev polinom T_n definisan je sa

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.45}$$

pri čemu uzimamo da je $x \in [-1, 1]$. Iz identiteta

$$\cos(n+1)\phi + \cos(n-1)\phi = 2\cos\phi \cos n\phi,$$

za $\phi(x) = \arccos x$ dobijamo

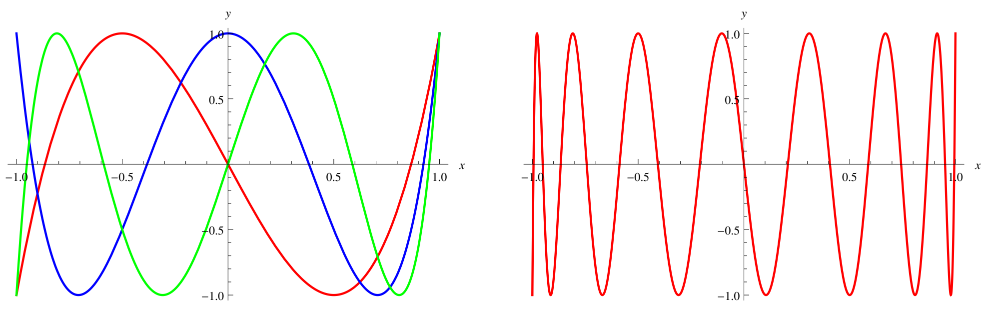
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \, n = 1, 2, \ldots \tag{2.46}$$

Za $n = 0$ i $n = 1$ iz (2.45) dobijamo

$$T_0(x) = 1; \, T_1(x) = x. \tag{2.47}$$

Sada uvrštavajući (2.47) u (2.46) lako dobijamo ostale Čebiševljeve polinome T_n, $n \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.48}$$



Slika 2.5: Grafici Čebiševljevih polinoma, lijevo T_3 (crvena), T_4 (plava), T_5 (zelena), a desno T_{15}

Možemo primjetiti da vrijede osobine

1. Koeficijent uz najveći stepen x^n polinoma T_n jednak je 2^{n-1}, $n \geqslant 1$;
2. T_{2n} su parne funkcije;
3. T_{2n+1} su neparne funkcije;

[6] Pafnutij Čebišov (16.maj 1821. – 09.12.1894.godine), bio je ruski matematičar, dao značajan doprinos u teoriji brojeva, teoriji vjerovatnoće i numeričkoj matematici

4. $|T_n(x)| \leqslant 1, \; \forall x \in [-1,1]$.

Iz (2.45) vidi se da $T_n(x)$ za $x \in [-1,1]$ ne može biti veći od 1 niti manji od -1 (tj. vrijedi osobina 4.). Polinom dostiže vrijednost ± 1 u $n+1$ tački

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n}, \; k = 0,\ldots,n. \tag{2.49}$$

Čebiševljevi polinomi imaju minimimaks osobinu, koja ima značajnu primjenu u Numeričkoj matematici. Posmatrajmo sljedeći primjer.

■ **Primjer 2.8** Odrediti parametre a i b tako da je $\max|x^2+ax+b|$ minimalan za $x \in [-1,1]$. Drugim riječima, treba odrediti parametre a i b tako da kvadratna funkcija, čiji je koeficijent uz x^2 jedinica, najmanje odstupa od x–ose.
Rješenje. Geometrijski možemo provjeriti da je traženi polinom $q(x) = x^2 - \frac{1}{2}$, a ovo je $\frac{1}{2}T_2(x)$. ■

Ovaj rezultat možemo poopštiti. Neka je

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_n,\ldots,a_0$ realni parametri. Pokažimo sada da normirani polinom

$$\overline{T}_n(x) = 2^{1-n}\cdot T_n(x), \tag{2.50}$$

najmanje odstupa od nule za $\forall x \in [-1,1]$. Vrijedi teorema

Teorema 2.4.2 Ako je P_n normirani polinom stepena n, onda je

$$\max_{x\in[-1,1]}|P_n(x)| \geqslant \max_{x\in[-1,1]}\left|\overline{T}_n(x)\right| = 2^{1-n}, \; n \geqslant 1. \tag{2.51}$$

Dokaz. Predpostavimo da važi suprotno, tj. da je

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|\overline{T}_n(x)\right| > \max_{x\in[-1,1]}|P_n(x)|. \tag{2.52}$$

Posmatrajmo pomoćni polinom

$$Q(x) = \overline{T}_n(x) - P_n(x). \tag{2.53}$$

Izračunajmo vrijednost ovog polinoma za $x = x_k$, gdje je x_k dato u (2.49). Za $x = x_0$ je $\overline{T}_n(x_0) = 1$, pa je, s obzirom na pretpostavku (2.52), $Q(x_0) > 0$. Za $x = x_1$ je $T_n(x_1) = -1$, pa je $Q(x_1) < 0$ na osnovu (2.52). Dakle između tačaka x_k i x_{k+1} nalazi se bar jedna nula polinoma $Q(x)$. Kako ovih intervala ima n, zaključujemo da $Q(x)$ mora imati bar n nula. Međutim, najstariji stepeni i kod $\overline{T}_n(x)$ i kod $P_n(x)$ su x^n. Ovi stepeni se anuliraju, te je Q polinom stepena najviše $n-1$. Na ovaj način došli smo do apsurda jer polinom stepena $n-1$ ne može imati n realnih nula. ■

Možemo zaključiti da od svih normiranih polinoma stepena n, od nule na segmentu $[-1,1]$ najmanje odstupa polinom $\overline{T}_n$.

Vratimo se polinomu ω_{n+1} iz relacije za procjenu greške (2.37)

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

Da bi greška data u (2.37) bila što manja, izraz

$$\max_{x\in[-1,1]}|\omega_{n+1}(x)|$$

treba da ima minimalnu vrijednost. A ovo ćemo postići ako su $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nule Čebiševljevog polinoma T_{n+1}. Vrijednosti čvorova x_i, $i = 0, \ldots, n$ određujemo iz jednačine

$$T_{n+1}(x) = 0 \Leftrightarrow \cos((n+1)\arccos x) = 0,$$

dobijamo

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)},\ k = 0, \ldots, n. \tag{2.54}$$

Za ovako izabrane čvorove interpolacije, na osnovu (2.42) i (2.51), vrijedi sljedeća procjena maksimalne vrijednosti greške interpolacije

$$\max_{x\in[a,b]} |R_n(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{x\in[a,b]} |\omega_{n+1}(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2^{1-(n+1)} = \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}. \tag{2.55}$$

Prethodna analiza je urađena za slučaju interpolacije na segmentu $[-1,1]$. Ako želimo nule Čebiševljevog polinoma T_{n+1} iskoristiti za interpolaciju funkcije $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, na segmentu $[a,b]$, samo trebamo nule x_k, $k = 0, \ldots, n$ preslikati linearnom funkcijom $u(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x$. U ovom slučaju čvorove interpolacije dobijamo iz sljedeće relacije

$$u_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.56}$$

Sada je

$$\max_{x\in[a,b]} |\omega_{n+1}(x)| = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}, \tag{2.57}$$

pa procjenu maksimalne vrijednosti greške interpolacije računamo

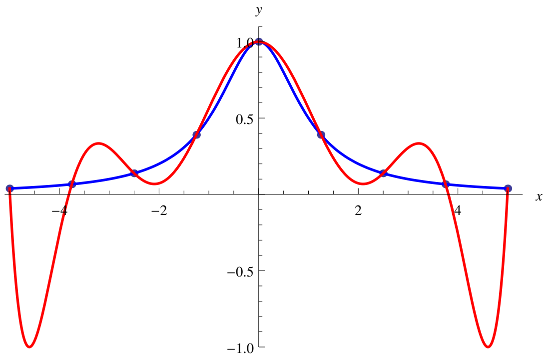
$$\max_{x\in[a,b]} |R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \tag{2.58}$$

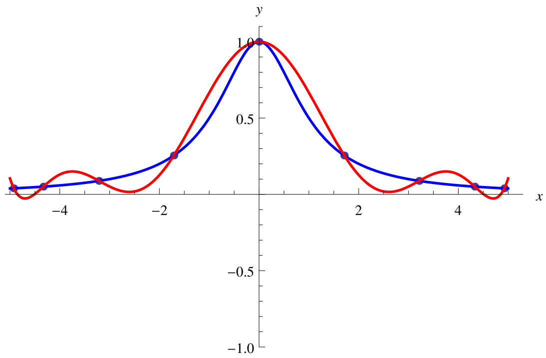
■ **Primjer 2.9** Predstaviti grafike Rungeove[7] funkcije i interpolacionih polinoma koji su dobijeni korištenjem 9 čvorova

1. Ekvidistantno raspoređenih;
2. Nule Čebiševljevog polinoma T_9.

Rješenje.

[7] Carl David Tolmé Runge (30. avgust 1856.–3.januar 1927. godine) bio je njemački matematičar i fizičar. Dao veliki doprinos u razvoju Numeričke matematike.





Slika 2.6: Plavom bojom predstavljen je grafik Rungeove funkcije, a crvenom bojom grafik interpolacionog polinoma. Na lijevoj slici je interpolacioni polinom sa ekvidistanim čvorovima, a na desnoj slici za vrijednosti čvorova korištene su nule Čebiševljevog polinoma T_9.

■

2.5 Hermiteov interpolacioni polinom

Do sada smo pretpostavljali da su u čvorovima interpolacije zadane samo vrijednosti funkcije f. Zadatak interpolacije može se uopštiti tako da su u nekim (ili svim) čvorovima zadaju i vrijednosti prvog izvoda funkcija f (mogu se u uključiti vrijednosti izvoda i višeg reda od prvog vidjeti npr. Stoer i Bulirsch [9]).

Neka su zadane vrijednosti funkcije $f(x_i)$ i vrijednosti prvog izvoda $f'(x_i), i = 0,\dots,n$ u čvorovima interpolacije. Interpolacioni polinom p_m koji zadovoljava uslove

$$p_m(x_i) = f(x_i) \text{ i } p'_m(x_i) = f'(x_i),\ i = 0,\dots,n, \tag{2.59}$$

naziva se Hermiteov[8] interpolacioni polinom. Kako u (2.59) imamo $2n+2$ uslova, stepen polinoma p_m je $m \leqslant 2n+1$. Vrijedi sljedeća teorema

Teorema 2.5.1 Ako je $f \in C^1[a,b]$, za date čvorove interpolacije $x_0, x_1, \dots, x_n$ koji su različiti, vrijednosti $f(x_0),\dots,f(x_n)$ i $f'(x_0),\dots,f'(x_n)$ postoji jedinstven polinom stepena ne većeg od $2n+1$ sa osobinom

$$p_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad p'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0,\dots,n. \tag{2.60}$$

Ovaj Hermiteov interpolacioni polinom dat je sa

$$p_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)H_i^0(x) + f'(x_i)H_i^1(x), \tag{2.61}$$

gdje su

$$H_i^0(x) = \left[1 - 2(x - x_i)l_i'(x_i)\right] l_i^2(x)$$

[8] Charles Hermite (24. decembar 1822.–14.januar 1901. godine) bio je francuski matematičar. Dao je veliki doprinos u mnogim područjima matematike.

i

$$H_i^1(x) = (x - x_i) l_i^2(x).$$

Štaviše, ako je $f \in C^{2n+2}[a,b]$ vrijedi

$$f(x) - p_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2 \tag{2.62}$$

za neko $\xi \in (a,b)$.

N Sa l_i označene su Lagrangeove funkcije (2.14).

Dokaz. Vidjeti u Burden i Faires [3]. ■

■ **Primjer 2.10** Izračunati Hermiteov interpolacioni polinom za funkciju f datu tabelom

x	1	2
$f(x)$	1	0
$f'(x)$	-1	2

zatim izračunati približnu vrijednost funkcije f u tački $x = 1.2$, koristeći dobijeni polinom.
Rješenje. Izračunajmo prvo kardinalne fukcije l_0 i l_1 i njihove izvode, vrijedi

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-2}{1-2} = -(x-2)\\
l_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x-1}{2-1} = x-1\\
l_0'(x) &= -1\\
l_1'(x) &= 1.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
H_3(x) =& f(x_0)\cdot[1 - 2(x-x_0)l_0'(x_0)]l_0^2(x) + f(x_1)\cdot[1-2(x-x_1)l_1'(x_1)]l_1^2(x)\\
&+ f'(x_0)\cdot(x-x_0)l_0^2(x) + f'(x_1)\cdot(x-x_1)l_1^2(x)\\
=& 1\cdot[1-2(x-1)(-1)][-(x-2)]^2 + 0\cdot[1-2(x-2)\cdot 1](x-1)^2\\
&- 1\cdot(x-1)[-(x-2)]^2 + 2\cdot(x-2)(x-1)^2\\
=& 3x^3 - 12x^2 + 14x - 4\\
H_3(1.2) =& 0.704 \approx f(1.2)
\end{aligned}$$

■

■ **Primjer 2.11** Koristeći Hermitski interpolacioni polinom izračunati približnu vrijednost funkcije $f(1.5)$ date tabelarno

x_i	1.3	1.6	1.9
$f(x_i)$	0.6200860	0.4554022	0.2818186
$f'(x_i)$	-0.5220232	-0.5698959	-0.5811571

Rješenje.

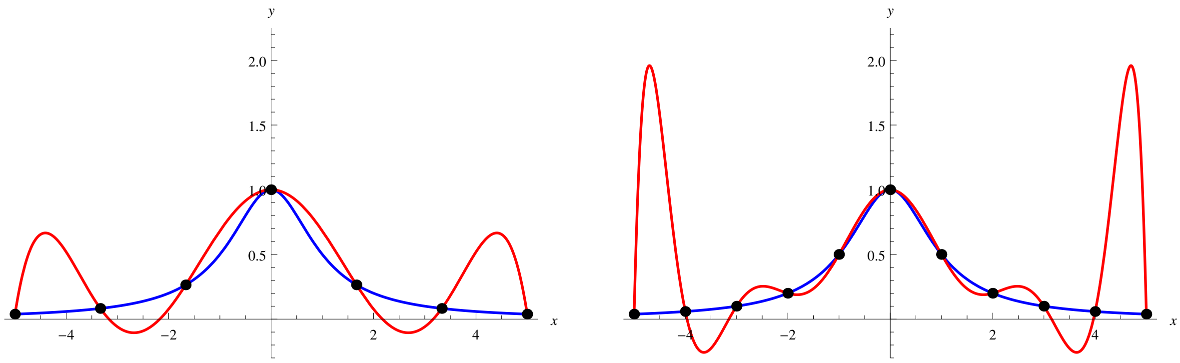
$$\begin{aligned}
l_0(x) =& \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = 16.88888889 - 19.44444444x + 5.555555556x^2\\
l_1(x) =& \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -27.44444444 + 35.55555556x - 11.11111111x^2\\
l_2(x) =& \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = 11.55555556 - 16.11111111x + 5.555555556x^2\\
l_0'(x) =& -19.44444444 + 11.11111111x\\
l_1'(x) =& 35.55555556 - 22.22222222x\\
l_2'(x) =& -16.11111111 + 11.11111111x\\
H_0^0(x) =& -3422.814815 + 10733.82716x - 13356.79012x^2 + 8250x^3\\
& -2530.864198x^4 + 308.6419753x^5\\
H_1^0(x) =& 753.1975309 - 1951.604938x + 1874.074074x^2 - 790.1234568x^3 +\\
& 123.4567901x^4 + 5.482582838 \cdot 10^{-13}x^5\\
H_2^0(x) =& 2670.617284 - 8782.222222x + 11482.71605x^2 - 7459.876543x^3 +\\
& 2407.407407x^4 - 308.6419753x^5\\
H_0^1(x) =& -370.8049383 + 1139.061728x - 1392.253086x^2 + 846.6049383x^3 -\\
& 256.1728395x^4 + 30.86419753x^5\\
H_1^1(x) =& -1205.116049 + 3875.765432x - 4950.123457x^2 + 3138.271605x^3 -\\
& 987.654321x^4 + 123.4567901x^5\\
H_2^1(x) =& -253.708642 + 840.9876543x - 1109.475309x^2 + 728.0864198x^3 -\\
& 237.654321x^4 + 30.86419753x^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_5(x) =& 1.001944065 - 0.008229223457x - 0.2352161698x^2 - 0.01455608025x^3\\
& + 0.02403179012x^4 - 0.002774691358x^5\\
H_5(1.5) =& 0.5118277017 \approx f(1.5).
\end{aligned}$$

■

2.6 Spline interpolacija

Aproksimacija funkcija predstavlja jedan od glavnih zadataka numeričke matematike. Vidjeli smo da se taj zadatak može riješiti primjenom interpolacionih polinoma. Mada se svaka neprekidna funkcija f na $[a,b]$ može aproksimirati polinomom sa proizvoljnom tačnošću (Teorema 2.1.1), primjena interpolacionog polinoma ne daje uvijek zadovoljavajuće rezultate. Primjer za to je interpolacija Rungeove funkcije. Grafici funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ i odgovarajući interpolacioni polinomi predstavljeni su na sljedećoj slici (Slika 2.7). Povećanjem broja čvorova interpolacije očekivali smo da se smanji vrijednost greške, međutim to se nije dogodilo, nego baš naprotiv, što se može vidjeti sa predstavljenih grafika. Ovi problemi se mogu ponekad prevazići specijalnim izborom čvorova, zatim upotrebom Hermiteovog polinoma.



Slika 2.7: I na lijevoj i desnoj slici plavom bojom predstavljen je grafik Rungeove funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, a crvenom bojom grafik interpolacionog polinoma. Na lijevoj slici korišteno je $n = 7$ tačaka za interpolaciju, dok je na desnoj slici za interpolaciju korišteno $n = 11$ tačaka.

Najbolji način da se prevaziđu nedostaci aproksimacije funkcije f interpolacionim polinomom na $[a,b]$ je da se koriste spline–funkcije za aproksimaciju, odnosno interpolaciju funkcija. Spline–funkcije predstavljaju dio po dio polinomske funkcije. Spline je engleska riječ i označava dugi, elastični lenjir koji su tehnički crtači koristili tako što pričvrste lenjir u zadanim tačkama, a onda pomoću njega crtaju krivu koja prolazi kroz date tačke. Pokazuje se da funkcija φ koja opisuje položaj lenjira pričvršćenog u tačkama (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$, ima sljedeća svojstva:

1. Između svaka dva susjedna čvora funkcija φ predstavlja kubni polinom;

2. φ je dva puta neprekidno–difrencijabilna na oblasti defininisanosti.

Funkcije φ predstavlja primjer spline–funkcije. Riječ je o tzv. interpolacionom kubnom splineu koji ima niz interesantnih svojstava zbog kojih se često primjenjuje u praksi. Jedna od tih svojstava je da, za razliku od niza interpolacionih polinoma (npr. Lagrangeovih ili Newtonovih), niz interpolacionih kubnih splineova za neprekidnu funkcije f sa ekvidistantnim čvorovima uvijek konvergira ka funkciji f, pri čemu se brzina konvergencije povećava povećanjem diferencijabilnosti funkcije f. Osim zbog brze konvergencije, primjena splineova za interpolaciju funkcija bila je uslovljena i jednostavnom realizacijom algoritama za konstruisanje splineova.

Splineovi se u opštem slučaju definišu na sljedeći način. Neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n$ različiti čvorovi interpolacije na segmentu $[a,b]$, takvi da je $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Za funkciju φ definisanu na segmentu $[a,b]$ kažemo da je spline k–tog reda u odnosu na čvorove x_i, $i = 0, \ldots, n$ ako ima sljedeće osobine

1. φ je polinom k–tog stepena na svakom od segmenata $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$;

2. $\varphi \in C^{k-1}[a,b]$,

gdje je sa $C^{k-1}[a,b]$ je skup svih funkcija definisanih na segmentu $[a,b]$, koje na tom skupu imaju neprekidan izvod $(k-1)$–og reda.

2.6.1 Linearni interpolacijski spline

Najjednostavniji i najranije korišteni spline je linearni interpolacijski spline, tj. spline prvog reda odnosno stepena. Grafik ovog splinea je izlomljena linija. Ovaj spline je neprekidna dio po dio linearna funkcija. U nastavku biće data konstrukcija linearnog interpolacijskog spline i procjena greške. Pretpostavimo da je $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ neprekidna funkcija i da poznajemo njene vrijednosti $f(x_i)$, $i=0,1,\dots,n$ u $n+1$ jednom čvoru

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b. \tag{2.63}$$

Funkciju f interpoliraćemo neprekidnom po dijelovima linearnom funkcijom $\varphi:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$. Lako se vidi da takva funkcija postoji i da je jedinstvena. Za $i=1,\dots,n-1$ definišimo

$$\begin{aligned} \varphi|_{[x_i,x_{i+1}]} &= \varphi_i, \\ \varphi_i(x) &= f(x_i) + \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i), \quad x\in[x_i,x_{i+1}]. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Kako je

$$\varphi_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) = \varphi_{i+1}(x_{i+1}), \quad i=0,\dots,n-2,$$

funkcija φ je neprekidna na čitavom segmentu $[a,b]$, a linearna je na svakom podsegmentu $[x_i,x_{i+1}]$. Kako je osim toga

$$\varphi(x_0) = \varphi_0(x_0) = f(x_0), \quad \varphi(x_n) = \varphi_{n-1}(x_n) = f(x_n),$$

ona interpolira funkciju f u čvorovima $x_0,x_1,\dots,x_n$. Nazivamo je linearni interpolacijski spline. Linearni interpolacijski spline nije diferencijabilna funkcija u čvorovima $x_0,x_1,\dots,x_n$ što joj znatno ograničava upotrebu.

Odredimo sada grešku linearnog interpolacijskog splinea. Uz pretpostavku da je funkcija $f\in C^2[a,b]$, prema Teoremi 2.4.1, za svaki $x\in[x_i,x_{i+1}]$ vrijedi

$$f(x)-\varphi_i(x) = \frac{1}{2}f''(\xi_i)(x-x_i)(x-x_{i+1}), \quad i=0,\dots,n-1. \tag{2.65}$$

Označimo $h_i := x_i - x_{i-1}$. Budući da kvadratna funkcija $x\mapsto(x-x_i)(x-x_{i+1})$ dostiže minimum u tački $x_{max_i} = \frac{x_i+x_{i+1}}{2}$, onda za svaki $x\in[x_i,x_{i+1}]$ vrijedi

$$|(x-x_i)(x-x_{i+1})| \leqslant \left|\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-x_i\right)\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-x_{i+1}\right)\right| = \frac{h_i^2}{4},$$

pa je

$$|f(x)-\varphi_i(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left|f''(\xi_i)\right|\cdot\frac{h_i^2}{4} = \frac{1}{8}\left|f''(\xi_i)\right|h_i^2.$$

Ako označimo $h_{max} := \max\limits_{i=0,\dots,n} h_i$ i $M_2 := \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|$, tada prema (2.65) vrijedi procjena greške za linearni interpolacioni spline

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-\varphi(x)| \leqslant \frac{M_2}{8}h_{max}^2. \tag{2.66}$$

2.6.2 Kubni interpolacioni spline

Linearni interpolacijski spline i kvadratni interpolacijski spline (spline drugog stepena) nisu pogodni za primjenu zato što nisu glatke, odnosno dovoljno glatke funkcije u čvorovima interpolacije. Zato se u praksi koriste i splineovi većeg reda. Posebno je značajan kubni interpolacioni spline (spline trećeg stepena), kratko kubni spline. Ovo su splineovi najmanjeg mogućeg stepena koji imaju neprekidan drugi izvod. Kroz primjene pokazalo se da splineovi većeg stepena rijetko daju bitnija poboljšanja.

Cilj nam je da neprekidnu funkciju $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$, čije vrijednosti $f(x_i)$, $i=0,\dots n$ znamo u $n+1$ čvoru

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b,$$

interpolirati funkcijom $C:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$,

$$C(x)=C_i(x),\quad x\in[x_i,x_{i+1}],\quad i=0,\dots,n-1, \tag{2.67}$$

gdje su C_i, $i=0,\dots,n-1$, kubni polinomi. Na svakom podsegmentu $[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,\dots,n-1$ kubni polinomi su oblika $C_i(x)=c_{i,3}x^3+c_{i,2}x^2+c_{i,1}x+c_{i,0}$, dakle treba na svakom od n podsegmenata odrediti 4 koeficijenta, ukupno $4n$ koeficijenata na $[a,b]$, tj. treba nam $4n$ uslova postaviti za sistem od $4n$ jednačine. Ovo ćemo uraditi na sljedeći način, svaki kubni polinom C_i u krajnjim tačkama podsegmenta $[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,\dots,n-1$ je jednak vrijednosti funkcije f, tj. zadovoljava interpolacione uslove, zatim prvi i drugi izvodi funkcije C su neprekidni u unutrašnjim čvorovima, tj. u $x_1,\dots,x_{n-1}$. Prethodne uslove možemo i ovako zapisati

(U1) $C_i(x_i)=f(x_i)$, $i=0,\dots,n-1$;

(U2) $C_i(x_{i+1})=f(x_{i+1})$, $i=0,\dots,n-1$;

(U3) $C_i'(x_{i+1})=C_{i+1}'(x_{i+1})$, $i=0,\dots,n-2$;

(U4) $C_i''(x_{i+1})=C_{i+1}''(x_{i+1})$, $i=0,\dots,n-2$.

(U1) i (U2) daju $2n$ jednačina, (U3) i (U4) po $n-1$, sada ukupno imamo $4n-2$ jednačine, dakle nedostaju dvije jednačine. Dodatne dvije jednačine dobijamo ispunjavanjem jednog od sljedeća tri uslova

(U5a) $C_0''(x_0)=C_{n-1}''(x_n)=0$;

(U5b) f i C su periodične funkcije na $[a,b]$;

(U5c) $C_0'(a)=f'(a),\quad C_{n-1}'(b)=f'(b)$.

Konstrukcija prirodnog kubnog splinea

Označimo vrijednosti funkcije u čvorovima interpolacije sa f_i, tj.

$$f_i=f(x_i),\ i=0,\dots,n,$$

zatim dužinu podsegmenta sa

$$h_{i+1}=x_{i+1}-x_i,\ i=0,\dots,n-1,$$

te sa M_i momente traženog splinea C

$$M_0:=C_0''(x_0),\quad M_n:=C_{n-1}''(x_n),\quad M_i:=C_i''(x_i),\quad i=1,\dots,n-1.$$

Na svakom od podsegmenata $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$, funkcija C_i'' je linearna, te je potpuno određena svojim vrijednostima M_i i M_{i+1} na krajevima podsegmenta

$$C_i''(x) = M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_{i+1}}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{2.68}$$

Integracijom (2.68) dobijamo da je na $[x_i, x_{i+1}]$

$$\begin{aligned} C_i'(x) &= -M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_{i+1}} + A_i \\ C_i(x) &= M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_{i+1}} + A_i(x - x_i) + B_i, \end{aligned} \tag{2.69}$$

gdje su A_i i B_i konstante integracije. One su rješenja sistema linearnih jednačina

$$\begin{aligned} M_i \frac{h_{i+1}^2}{6} + B_i &= f_i \\ M_{i+1} \frac{h_{i+1}^2}{6} + A_i h_{i+1} + B_i &= f_{i+1}, \end{aligned}$$

određenog uslovima $C_i(x_i) = f(x_i)$ i $C_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$, tj.

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(M_{i+1} - M_i) \\ B_i &= f_i - M_i \frac{h_{i+1}^2}{6}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Uobičajeni način zapisivanja splinea na segmentu $[x_i, x_{i+1}]$ je

$$C_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i(x - x_i)^2 + \delta_i(x - x_i)^3, \tag{2.71}$$

gdje je na osnovu (2.68), (2.69) i (2.70)

$$\begin{aligned} \alpha_i &= C_i(x_i) = f_i \\ \beta_i &= C_i'(x_i) = -M_i \frac{h_{i+1}}{2} + A_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(2M_i + M_{i+1}) \\ \gamma_i &= \frac{1}{2} C_i''(x_i) = \frac{1}{2} M_i \\ \delta_i &= \frac{1}{6} C_i'''(x_i) = \frac{1}{6h_{i+1}}(M_{i+1} - M_i). \end{aligned}$$

Svi koeficijenti splinea su izraženi u funkciji momenta, pa momente treba izračunati. Sada koristimo uslov (U3), vrijedi

$$C_i'(x_i) = C_{i-1}'(x_i), \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{2.72}$$

Uslov (2.72) određuju $n - 1$ jednačinu po momentima M_i. Na osnovu (2.69) i (2.70) na segmentu $[x_i, x_{i+1}]$ je

$$C_i'(x) = -M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_{i+1}} + \frac{f_{i+1} + f_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(M_{i+1} - M_i),$$

dok je na $[x_{i-1}, x_i]$

$$C_{i-1}'(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{f_i + f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}),$$

pa poslije uvrštavanja $x = x_i$ u prethodne izraze dobijamo

$$
\begin{aligned}
C'_{i-1}(x_i) &= \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + \frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i}{3} M_i \\
C'_i(x_i) &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1}.
\end{aligned}
$$

Uslov (2.72) se stoga svodi na sistem linearnih jednačina po M_i

$$
\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{2.73}
$$

koji se može zapisati i u obliku

$$
\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \nu_i M_{i+1} = \lambda_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{2.74}
$$

gdje je

$$
\nu_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad \mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} = 1 - \nu_i \tag{2.75}
$$

$$
\lambda_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right) = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], \ i = 1, \ldots, n-1 \tag{2.76}
$$

Sistem (2.74) je sistem od $n-1$ jednačine sa $n+1$ nepoznatom. Preostale dvije veze između momenata dobijaju se iz uslova (U5a,b ili c). Korištenjem uslova (U5a) dobijamo prirodni kubni spline i u ovom slučaju je

$$
M_0 = M_n = 0, \tag{2.77}
$$

pa je

$$
\mu_0 = \nu_0 = \lambda_0 = 0 \text{ i } \mu_n = \nu_n = \lambda_n = 0.
$$

Sada sistem linearnih jednačina (2.74) zbog (2.77) možemo zapisati i matričnom obliku

$$
\begin{pmatrix}
2 & \nu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu_2 & 2 & \nu_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mu_3 & 2 & \nu_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \vdots & & & & & \\
0 & & 0 & 0 & \cdots & \mu_{n-3} & 2 & \nu_{n-3} & 0 \\
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_{n-2} & 2 & \nu_{n-2} \\
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mu_{n-1} & 2
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_{n-3} \\ \lambda_{n-2} \\ \lambda_{n-1}
\end{pmatrix}
\tag{2.78}
$$

Vrijedi sljedeća teorema

Teorema 2.6.1 Sistem (2.78) ima jedinstveno rješenje pri proizvoljnoj podjeli (2.63) segmenta $[a, b]$.

Dokaz. Vidjeti u Radunović [7] ■

N Prirodni kubni spline C, koji interpolira funkciju f u čvorovima $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ima svojstvo da za svaku funkciju $g \in C^2[a,b]$, koja takođe interpolira funkciju f u navedenim čvorovima, vrijedi

$$\int_a^b \left(g''(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geq \int_a^b \left(C''(x)\right)^2 \mathrm{d}x, \tag{2.79}$$

odnosno

$$||g''||_2 \geq ||C''||_2,$$

tj. između svih funkcija interpolirajućih funkcija prirodni kubni spline C ima najmanju L_2–normu drugog izvoda. Svojstvo (2.79) nazivamo minimalno svojstvo prirodnog kubnog splinea. Ovo svojstvo imaju i kubni splineovi sa drugačijom rubnim uslovima.

■ **Primjer 2.12** Izračunati odgovarajući spline ako su zadane vrijednosti funkcije sljedećom tabelom

x_i	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	0	1	0

Rješenje. Pošto je $n = 4$, treba izračunati M_1, M_2 i M_3 koristeći $\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \nu_i M_{i+1} = \lambda_i, \quad i = 1,\ldots,3$. Izračunajmo prvo koeficijente μ_i, ν_i i λ_i, $i = 1,2,3,$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
h_1 &= h_2 = h_3 = x_1 - x_0 = 1, \text{ (čvorovi ekvidistantni)}\\
\mu_1 &= \mu_2 = \mu_3 = \frac{h_i}{h_{i+1} + h_i} = \frac{1}{2}\\
\nu_1 &= \nu_2 = \nu_3 = 1 - \mu_1 = \frac{1}{2}\\
\lambda_1 &= \frac{6}{h_1 + h_2}\left(\frac{f_2 - f_1}{h_2} - \frac{f_1 - f_0}{h_1}\right) = -9\\
\lambda_2 &= \frac{6}{h_2 + h_3}\left(\frac{f_3 - f_2}{h_3} - \frac{f_2 - f_1}{h_2}\right) = 9\\
\lambda_3 &= \frac{6}{h_3 + h_4}\left(\frac{f_4 - f_3}{h_4} - \frac{f_3 - f_2}{h_3}\right) = -6.
\end{aligned}$$

Odgovarajući sistem je

$$\begin{aligned}
2M_1 + \frac{1}{2}M_2 &= -9\\
\frac{1}{2}M_1 + 2M_2 + \frac{1}{2}M_3 &= 9\\
\frac{1}{2}M_2 + 2M_3 &= -6,
\end{aligned}$$

rješenje sistema je $(M_1, M_2, M_3) = \left(-\frac{177}{28}, \frac{51}{7}, \frac{-135}{28}\right)$. Sada C_i (poslije uvrštavanja u 2.71 izraza za α_i, β_i, γ_i, δ_i izraženih preko M_i i M_{i+1} i sređivanja) računamo po formuli

$$C_i(x) = M_i\frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_{i+1}} + M_{i+1}\frac{(x - x_i)^3}{6h_{i+1}} + \left[\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(M_{i+1} - M_i)\right](x - x_i) + f_i - M_i\frac{h_{i+1}^2}{6}. \tag{2.80}$$

Dobijamo

$$
\begin{aligned}
C_0(x) &= \frac{1}{56}\left(56+115x-59x^3\right)\\
C_1(x) &= \frac{1}{56}\left(-130+673x-558x^2+127x^3\right)\\
C_2(x) &= \frac{1}{56}\left(1790-2207x+882x^2-113x^3\right)\\
C_3(x) &= \frac{1}{56}\left(-2476+2059x-540x^2+45x^3\right),
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
C(x) = \begin{cases}
\frac{1}{56}\left(56+115x-59x^3\right), & 0 \leqslant x \leqslant 1\\
\frac{1}{56}\left(-130+673x-558x^2+127x^3\right), & 1 \leqslant x \leqslant 2\\
\frac{1}{56}\left(1790-2207x+882x^2-113x^3\right), & 2 \leqslant x \leqslant 3\\
\frac{1}{56}\left(-2476+2059x-540x^2+45x^3\right), & 3 \leqslant x \leqslant 4.
\end{cases}
$$

■

2.7 Trigonometrijska interpolacija

Za interpolaciju periodičnih funkcija bolje je koristiti trigonometrijske funkcije. Jedna od takvih formula za interpolaciju 2π–periodične funkcije je Hermiteova formula

$$
f(x) \approx \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}} \frac{\sin(x-x_j)}{\sin(x_i-x_j)}\right) f(x_i). \tag{2.81}
$$

Ona odgovara Lagrangeovoj formuli (2.14)-(2.16) za neperiodične funkcije, i koristi se za proizvoljan raspored čvorova interpolacije.

Problem trigonometrijske interpolacije prvi je riješio Gauß, koji je izveo nekoliko formula sličnih Hermiteovoj. Formula koja se obično naziva Gaußova, razlikuje se od formule (2.81) po faktoru $\frac{1}{2}$ koji se pojavljuje u argumentu sinusa. Interpolaciona formula se traži u obliku trigonometrijskog polinoma

$$
p_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \tag{2.82}
$$

čiji su koeficijenti određeni uslovima interpolacije $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, 2n$, u čvorovima

$$
0 \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} \leqslant 2\pi.
$$

Oni su stoga, rješenja sistema linearnih jednačina

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) \\ f(x_1) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_1 + b_k \sin kx_1) \\ &\vdots \\ f(x_{2n}) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_{2n} + b_k \sin kx_{2n}). \end{aligned} \tag{2.83}$$

Determinanta sistema (2.83)

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \dots & \cos nx_0 & \sin nx_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \dots & \cos nx_1 & \sin nx_1 \\ & & \vdots & & & \\ 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \dots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} \end{vmatrix} = 2^{n^2} \prod_{0 \le p < q \le 2n} \sin \frac{x_q - x_p}{2} \tag{2.84}$$

je različita od nule, jer je $0 < x_q - x_p < 2\pi$, pa je $\sin \frac{x_q - x_p}{2} \neq 0$ za svako p i q.

Sistemu (2.83) dodajmo jednačinu (2.82) napisanu za $x \neq x_k$, $k = 0, \dots, 2n$

$$-p_n(x) + a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 0$$

$$-f(x_0) + a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) = 0 \tag{2.85}$$

$$\vdots \tag{2.86}$$

$$-f(x_{2n}) + a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_{2n} + b_k \sin kx_{2n}) = 0. \tag{2.87}$$

Ako ovaj sistem posmatramo kao sistem od $2n+2$ jednačine po $2n+2$ koeficijenata a_0, a_k, b_k, $k = 1, \dots, 2n$, i po koeficijentu $c = -1$ uz $p_n(x)$ i $f(x_k)$, $k = 0, \dots, 2n$, onda njegova determinanta mora biti jednaka nuli

$$\begin{vmatrix} p_n(x) & 1 & \cos x & \sin x & \dots & \cos nx & \sin nx \\ f(x_0) & 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \dots & \cos nx_0 & \sin nx_0 \\ & & \vdots & & & & \\ f(x_{2n}) & 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \dots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.88}$$

jer je sistem homogen a ima netrivijalno rješenje. Razvijanjem determinante po elementima prve kolone i izražavanjem $p_n(x)$ iz (2.88) dobijamo Gaußovu formulu za trigonometrijsku interpolaciju.

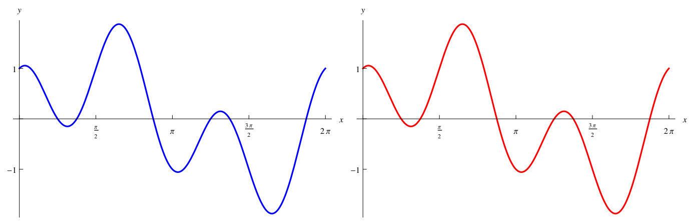
■ **Primjer 2.13** Interpolirati funkciju $f(x) = \sin x + \cos 3x$ trigonometrijskim polinomom. Za čvorove uzeti tačke $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, 2\pi$.

Rješenje. Odgovarajuća tabela je

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	2π
$f(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}-1$	1	$\sqrt{2}$	1

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\cdot\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(x-2\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\pi\right)}\\
&+1\cdot\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(x-2\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\pi\right)}\\
&+\sqrt{2}\cdot\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(x-2\pi\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}-2\pi\right)}\\
&+1\cdot\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2\pi-\frac{3\pi}{4}\right)}\\
&=\frac{8\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x}{1+\sqrt{3}}+2\sqrt{\frac{2}{3}}\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\\
&+\frac{8\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\cos x\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\sqrt{3}}-2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

■



Slika 2.8: Lijevo je grafik funkcije $f(x) = \sin x + \cos 3x$, a desno je grafik odgovarajućeg trigonometrijskog interpolacionog polinoma

2.8 Zadaci za vježbu

1. Odrediti interpolacioni polinom koji interpolira funkciju $f(x) = \sin x$ zadana tabelom

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1

   (a) Zadatak riješiti korištenjem sistema linearnih algebarskih jednačina dobijenog iz uslova $p_3(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, 3$.

   (b) Zadatak riješiti koristeći interpolacioni polinom u Lagrangeovom obliku.

   (c) Zadatak riješiti koristeći interpolacioni polinom u Newtonovom obliku i koristeći podijeljene razlike.

2. Odrediti interpolacioni polinom koji interpolira funkciju f zadana tabelom

x	-2	0	2	4
$f(x)$	1	2	-4	2

(a) Zadatak riješiti korištenjem sistema linearnih algebarskih jednačina dobijenog iz uslova $p_3(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, 3$.

(b) Zadatak riješiti koristeći interpolacioni polinom u Lagrangeovom obliku.

(c) Zadatak riješiti koristeći interpolacioni polinom u Newtonovom obliku i koristeći podijeljene razlike.

3. Izračunati interpolacione polinome za funkcije zadane tabelarno

(a)

x	-0.2	0.3	1.2	2.4
$f(x)$	1.2	2.32	-4.43	2

(b)

x	-2.3	1.3	1.8	2.4	3
$f(x)$	-0.342	-2.232	-4.143	2	-3

(c)

x	-3	-1.5	0.8	1.4	3.3	4
$f(x)$	-1.342	1.232	-2.143	2.4	-3	-2

4. Izračunati interpolacioni polinom za funkciju $f(x) = e^{-x} \cos 2x$. Za čvorove izabrati

(a) nule Čebiševljevog polinoma T_4.

(b) nule Čebiševljevog polinoma T_5.

(c) nule Čebiševljevog polinoma T_6.

5. (a) Kako se računa greška interploacionog polinoma u tački $x \in [a, b]$, $a = x_0$, $b = x_N$.

(b) Interpolirati funkciju $f(x) = e^x$, na $[0.5, 2]$, koristiti dva čvora $x_0 = 0.5$, $x_1 = 2$. Odrediti gre sku interpolacije.

(c) Izračunati $p_1(e)$.

6. Odrediti Hermiteov interpolacioni polinom ako je poznato

(a)

x	1	2
$f(x)$	0	-1
$f'(x)$	-2	1

(b)

x	-1	0	2
$f(x)$	1	0	-2
$f'(x)$	1	-1	3

7. Izračunati linearni spline za funkciju datu tabelarno

x	-0.2	0.3	0.8	1.3
$f(x)$	1.2	2.32	-4.43	2

Kolika je greška interpolacije?

8. Odrediti prirodni kubni spline za funkciju zadanu tabelarno

(a)

x	-0.2	0.3	1.2	2.4
$f(x)$	1.2	2.32	-4.43	2

(b)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$ -1.15	2.32	-0.32	-2.13	2.13	

9. Odrediti trigonometrijski interpolacioni polinom za

(a) funkciju $f(x) = \cos x + \sin 3x$, za čvorove uzeti tačke $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$;

(b) funkciju zadanu tabelarno

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x)$	7	3	2	4	2

3. Rješavanje nelinearnih jednačina i sistema

U ovom poglavlju biće razmatrane metode za približno rješavanje nelinearnih jednačina

$$f(x) = 0, \tag{3.1}$$

gdje je $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, nelinearna funkcija, za koju ćemo pretpostaviti da je neprekidna na $[a,b]$. Te na kraju poglavlja biće razmatrano i numeričko rješavanje odgovarajućih nelinearnih sistema.

Za broj $\xi \in [a,b]$ za koji je $f(\xi) = 0$ kažemo da je rješenje (korijen) jednačine (3.1). Tako su na primjer, 1 i 2 rješenja jednačine

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

u šta se možemo uvjeriti uvrštavanjem 1 i 2 u jednačinu. Riješiti jednačinu znači odrediti sva njena rješenja. Može se desiti da jednačina nema rješenja, da ima jedno, više (konačno ili beskonačno), te da su neka rješenja višestruka.

U zavisnosti od toga da li je funkcija f algebarska ili transcedentna, nelinearne jednačine (3.1) dijele se na algebarske ili transcedentne.

Rješavanje jednačina (3.1) sastoji se od dva koraka, i to

1. Lokalizacija (razdvajanje, izolacija) korijena ξ te jednačine, tj. određuju se disjunktni intervali unutar kojih se nalazi tačno po jedan korijen jednačine. Ovako se određuje i broj rješenja jednačine.

2. Drugi korak je određivanje aproksimativne vrijednosti korijena ξ na svakom od dobijenih intervala u prethodnom koraku sa unaprijed zadanom tačnošću.

Važna karakteristika svake iterativne metode je njena brzina (red) konvergencije. To je broj koji je usko povezan sa brojem potrebnih iteracija za postizanje tražene tačnosti u iterativnom procesu.

Kažemo da niz (x_n), generisan nekom numeričkom metodom, konvergira ka rješenju ξ brzinom (ili da je red konvergencije) $p \in \mathbb{R}^+$ ako postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$|x_{n+1} - \xi| \leqslant C|x_n - \xi|^p \text{ za sve } n \geqslant n_0, \tag{3.2}$$

gdje je n_0 cio broj. U ovom slučaju za metodu kojim je generisan niz (x_n) kaže se da je metoda reda p.

Specijalno, ako je $p = 1$, kažemo da je metoda linerna, a ako je $p = 2$ da ima kvadratnu brzinu konvergencije.

3.1 Lokalizacija rješenja

Lokalizacija korijena može se uraditi raznim analitičkim i grafičkim metodama. Određivanje korijena analitičkim putem zasnovana je primjeni sljedećih teorema.

Neka je ξ rješenje jednačine (3.1) koji je izolovan na intervalu (a,b) i neka je $\bar{x} \in (a,b)$ aproksimacija tog rješenja određena nekim od numeričkih metoda. Pretpostavimo da je $f \in C^1[a,b]$. Tada važi sljedeća teorema

Teorema 3.1.1 Ako je $|f'(x)| \geq m_1 > 0$ za sve $x \in (a,b)$, tada je

$$|\xi - \bar{x}| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}. \tag{3.3}$$

Dokaz. Na osnovu Lagrangeove teoreme je

$$f(\bar{x} - f(\xi) = f'(c)(\bar{x} - \xi),$$

gdje je c neka tačka koja se nalazi između tačaka ξ i $\bar{x}$. Imajući u vidu da je $f(\xi) = 0$ i $f'(c) \geq m_1 > 0$, dobijamo

$$|f(\bar{x})| = |f'(c)| \cdot |\bar{x} - \xi| \geq m_1 |\bar{x} - \xi|,$$

odakle slijedi ocjena (3.3). ■

Teorema 3.1.2 Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$ i ako ona na krajevima tog segmenta ima vrijednosti različitog znaka, tj. ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$, tada jednačina $f(x) = 0$ ima bar jedan korijen na intervalu (a,b).

Uslov $f(a) \cdot f(b) < 0$ kaže da $f(x) = 0$ ima barem jedan korijen na (a,b), ali ostaje pitanje da li je to jedini korijen ili ih ima više. Sljedeća teorema daje uslov pod kojim posmatrana jednačina ima tačno jedan korijen.

Teorema 3.1.3 Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$ na čijim krajevima ima vrijednosti različitog znaka i ako izvod f' ima stalan znak na intervalu (a,b), tada jednačina $f(x) = 0$ ima tačno jedan korijen na intervalu (a,b).

N Kada kažemo da funkcija g ima stalan znak na intervalu (a,b), onda to znači da je $g(x) > 0$ ili $g(x) < 0$ za svaki $x \in (a,b)$.

Za lokalizaciju rješenja korisna je i sljedeća teorema, a koja predstavlja neposrednu posljedicu Rolleove teoreme

Teorema 3.1.4 Između dvije uzastopne ekstremne tačke funkcije f nalazi se najviše jedan korijen jednačine $f(x) = 0$.

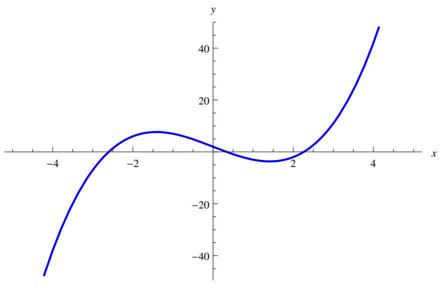
N Pod ekstremnom tačkom u prethodnoj teoremi podrazumijeva se vrijednost argumenta za koju funkcija ima ekstremnu vrijednost.

■ **Primjer 3.1** Razdvojiti korijene jednačine $x^3 - 6x + 2 = 0$

Rješenje. Posmatrajmo funkciju $f(x) = x^3 - 6x + 2$. Vrijedi $f'(x) = 3x^2 - 6$. Nule f' su u tačkama $\pm\sqrt{2}$, u okolini ovih tačaka f' mijenja znak pa možemo zaključiti da funkcija f ima ekstremne vrijednosti za $x = \pm\sqrt{2}$, zatim znak f' je konstantan za $x < -\sqrt{2}$ i $x > \sqrt{2}$, pa na osnovu prethodnih teorema dobijamo sljedeću tabelu

x	4	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	4
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Možemo zaključiti da $f(x) = 0$ ima tri korijena na intervalima $(-4, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i $(\sqrt{2}, 4)$. A što se može vidjeti na Slici 3.1



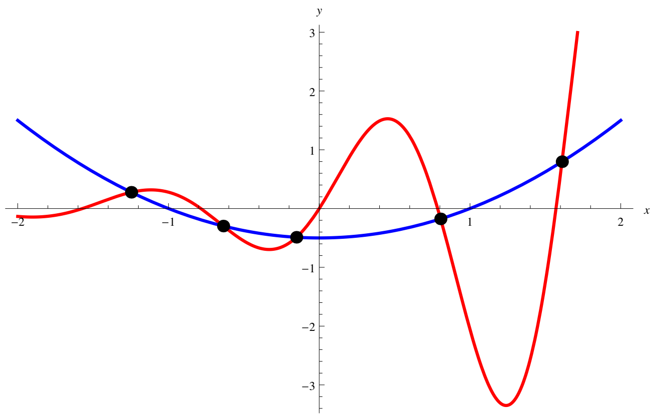
Slika 3.1: Grafik funkcije $f(x) = x^3 - 6x + 2$

■

Kako je danas dostupan software sa odličnim grafičkim mogućnostima (Mathematica, Matlab, i dr.), grafičkom metodom je lako uraditi lokalizaciju rješenja. Ova metoda biće ilustrovana na sljedećem primjeru.

■ **Primjer 3.2** Grafičkom metodom lokalizovati rješenja jednačine $e^x \sin 4x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = 0$.

Rješenje. Jednačinu možemo napisati u sljedećem obliku $e^x \sin 4x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$. Zatim neka su $f(x) = e^x \sin 4x$ i $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$. Nacrtajmo grafike funkcija f i g, te sa grafika odredimo intervale u kojima se nalaze rješenja date jednačine, tj. odredimo intervale u kojime se sijeku grafici funkcija f i g



Slika 3.2: Grafici fukcija $f(x) = e^x \sin 4x$ i $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

Traženi intervali su $(-1.5,-1)$, $(-0.8,-0.4)$, $(-0.4,0)$, $(0.6,1)$ i $(1.4,1.8)$. ■

3.2 Metoda polovljenja segmenta

Pretpostavimo da je izvršeno razdvajanje korijena jednačina (3.1) i da je određen neki segment $[a,b]$ na kome se nalazi tačno jedan korijen ξ te jednačine. S obzirom na ono što je rečeno u prethodnom dijelu o lokalizaciji korijena, za funkciju f vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Metoda se sastoji u sljedećem:

1. Segment $[a,b]$ podijelimo na dva jednaka dijela tačkom $x_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, gdje je $a_0 = a$, $b_0 = b$;

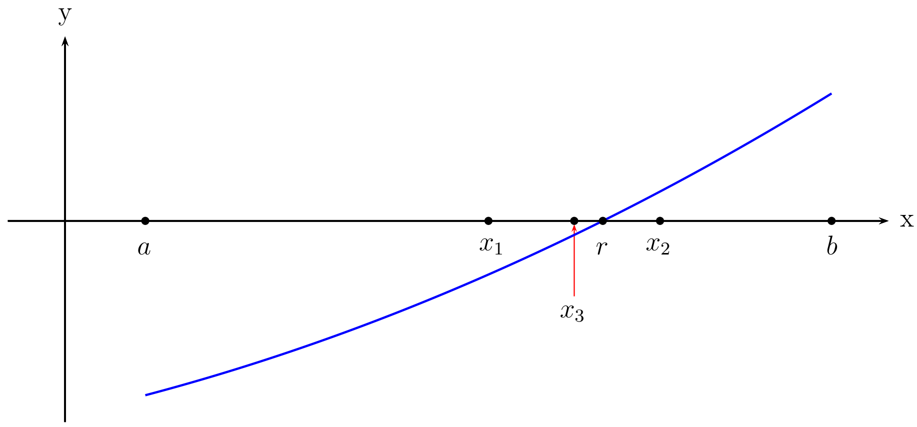
2. Ispitujemo znak $f(a_0) \cdot f(x_1)$ i $f(x_1) \cdot f(b_0)$,

   (a) Ako je $f(a_0) \cdot f(x_1) < 0$, postupak nastavljamo na segmentu $[a_1,b_1]$, gdje je $a_1 = a_0$ i $b_1 = x_1$;

   (b) A, ako je $f(x_1) \cdot f(b_0) < 0$, postupak nastavljamo na segmentu $[a_1,b_1]$, ali sada $a_1 = x_1$ i $b_1 = b_0$;

3. Opisani postupak nastavljamo sa segmentom $[a_1,b_1]$, dobijamo segment $[a_2,b_2],\ldots$

Ako nekom momentu dobijemo $f(x_n) = 0$, to bi značilo da je $\xi = x_n$, a ako se ovo ne desi, postupak bi nastavili dok se ne dobije dovoljna tačnost (o koje će biti riječi u nastavku).



Slika 3.3: Dijeljenje segmenta $[a, b]$

Ovako opisani metod omogućava generisanje niza (umetnutih ili iščezavajućih) segmenata

$$\cdots \subset [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \cdots \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$$

takvih da je $b_n - a_n = \frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}$ i $f(a_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Niz (x_n) predstavlja niz sukcesivnih aproksimacija korijena ξ, pa metoda polovljenja segmenata predstavlja iteracioni metod.

Ako je ε zadana tačnost sa kojom treba odrediti aproksimaciju korijena ξ opisani postupak računanja aproksimacija treba zaustaviti na koraku na kome je

$$b_n - a_n \leqslant 2\varepsilon$$

jer je

$$|\xi - x_{n+1}| \leqslant \frac{b_n - a_n}{2}.$$

Kako se na svakom koraku vrši polovljenje segmenta, imamo

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b - a}{2^n},$$

pa važi sljedeća ocjena greške aproksimacije x_{n+1}

$$|\xi - x_{n+1}| \leqslant \frac{b - a}{2^{n+1}}. \tag{3.4}$$

Iz ove ocjene slijedi

$$\lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \xi,$$

što znači da metod polovljenja intervala konvergira.

Ako je željena tačnost ε zadana, moguće je unaprijed odrediti broj koraka potrebnih za dostizanje te tačnosti. Naime, da bi bilo $|\xi - x_{n+1}| \leqslant \varepsilon$, dovoljno je da bude

$$\frac{b - a}{2^{n+1}} \leqslant \varepsilon,$$

pa je

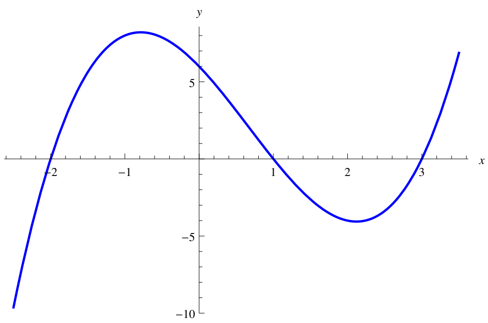
$$n \geqslant \frac{\log(b-a) - \log(2\varepsilon)}{\log 2}. \tag{3.5}$$

N Relacija (3.5) je tako dobijena, da se prvi korak smatra samo određivanje segmenta $[a,b]$, jer je prva aproksimacija tačnog rješenja upravo $x_1 = \frac{b-a}{2}$. Dakle, potrebno je napraviti još n koraka da bi se dobila potrebna tačnost.

Metoda je veoma jednostavna, ali iz relacije za procjenu greške (3.4), može se primjetiti da je računanje segmenta gdje se nalazi korijen ξ prilično spor proces. U slučaju zahtjeva za većom tačnošću potrebno je izvršiti veći broj koraka. Pa se ova metoda koristi u slučajevima kada se ne traži veća tačnost ili da se smanji segment na kojem se nalazi korijen ξ jednačine, pa da se onda taj korijen izračuna nekom efikasnijom metodom.

■ **Primjer 3.3** Koristeći metod polovljenja segmenta izračunati približnu vrijednost jednog korijena jednačine $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, sa tačnošću $\varepsilon = 0.005$.

Rješenje. Izvršimo prvo lokalizaciju rješenja grafičkom metodom.



Slika 3.4: Grafik funkcije $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Sa grafika funkcije f vidimo da se korijeni jednačine nalaze u intervalima $(-2.5,-1.5)$, $(0.25,1.5)$ i $(2.5,3.5)$. Izračunajmo korijen iz intervala $(0.25,1.5)$. Potrebno je

$$\frac{\log(1.5-0.25) - \log(2\cdot 0.005)}{\log 2} \approx 6.97 \leqslant 7,$$

dakle potrebno je poslije određivanja prvog aproksimativnog rješenja x_1 uraditi još 7 koraka da bi dobili aproksimaciju rješenja sa zadanom tačnoću. Dobijene vrijednosti su u tabeli.

n	a_n	b_n	$x_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$	ε_n
0	0.25000	1.50000	0.87500	0.62500
1	0.87500	1.50000	1.18750	0.31250
2	0.87500	1.18750	1.03125	0.15625
3	0.87500	1.03125	0.95312	0.07812
4	0.95312	1.03125	0.99219	0.03906
5	0.99219	1.03125	1.01172	0.01953
6	0.99219	1.01172	1.00195	0.00977
7	0.99219	1.00195	0.99707	**0.00488**

■

3.3 Metoda jednostavnih iteracija

Za tačku $\xi \in [a,b]$ kažemo da je fiksna tačka neke funkcije $\varphi : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ ako je $\varphi(\xi) = \xi$. Računanje nule funkcije $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ na segmentu $[a,b]$ može se povezati sa računanjem fiksne tačke funkcije $\varphi : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := x - f(x), \tag{3.6}$$

na tom segmentu. Lako se vidi da je $x_0 \in [a,b]$ nula funkcije f onda i samo onda ako je x_0 fiksna tačka funkcije φ, a rješavanje jednačine $f(x) = 0$ ekvivalentno je računanju fiksne tačke funkcije φ, tj. rješavanju jednačine

$$x = \varphi(x). \tag{3.7}$$

Za funkciju φ obično postoji više izbora. Na primjer, jednačinu $e^x - x - \frac{5}{4} = 0$ za $x > \frac{5}{4}$ možemo napisati u obliku

$$x = e^x - \frac{5}{4} \text{ ili } x = \ln\left(x + \frac{5}{4}\right). \tag{3.8}$$

Geometrijski gledano, umjesto rješavanja jednačine $f(x) = 0$, tražimo presječnu tačku grafika funkcija $f_1(x) = x$ i $f_2(x) = \varphi(x)$. Nakon što se odrediti segment $I = [a,b]$ u kome se nalazi presječna tačka, odredimo početnu aproksimaciju x_0 iz ovog segmenta. Sljedeću aproksimaciju biramo tako da je $x_1 = \varphi(x_0)$, ponavljajući ovaj postupak dobijamo niz

$$x_0, x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \ldots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \ldots \tag{3.9}$$

Na Slici 3.5 i 3.6 predstavljeni su opisani procesi. Ovako definisani niz može a i ne mora konvergirati, što se vidi iz sljedećeg primjera.

■ **Primjer 3.4** Izračunati rješenje jednačine $2x^2 - 3x + 1 = 0$ na segmentu $[0.5, 1.5]$ primjenom metode jednostavnih iteracija rješavanjem jednačina

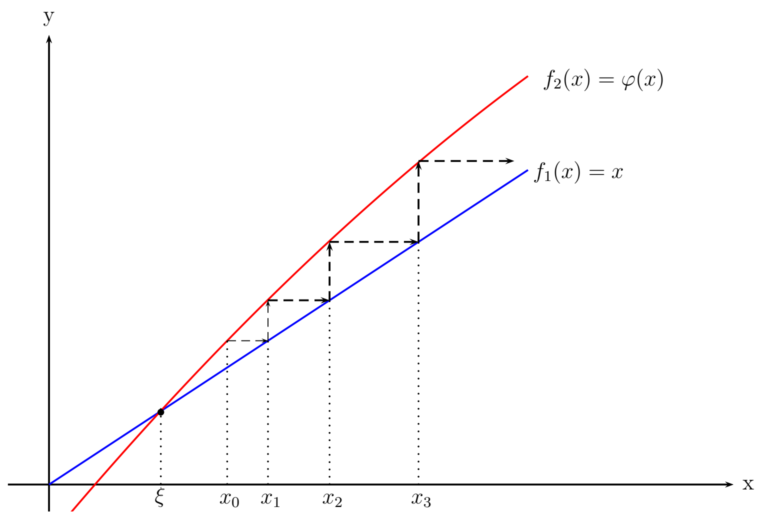
(a) $x = f_1(x), \quad f_2(x) = \varphi(x) = 2x^2 - 2x + 1,$

(b) $x = f_1(x), \quad f_2(x) = \varphi(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2}}.$

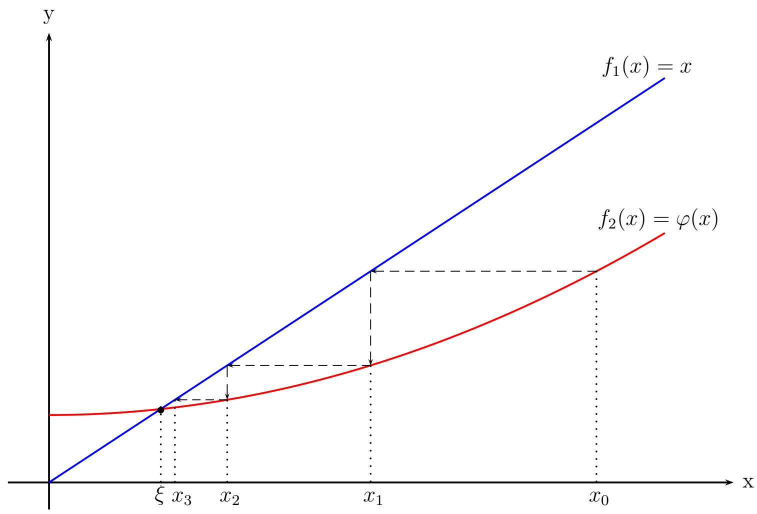
Rješenje. Uzmimo za $x_0 = 1.25$, odgovarajući nizovi dati su u tabeli

	k	0	1	2	3	4	5	6	7
(a)	$\varphi(x_k)$	1.62500	3.03125	13.3144	328.920	2×10^5	9×10^{10}	1×10^{22}	6×10^{44}
(b)	$\varphi(x_k)$	1.17260	1.12200	1.08766	1.06372	1.04670	1.03443	1.02550	1.01894

Iz tabele vidimo da je drugi izbor funkcije φ dobar, dok prvi izbor nije. ■



Slika 3.5: Grafici funkcija $f_1(x) = x$ i $f_2(x) = \varphi(x)$, koje nisu dobro izabrane



Slika 3.6: Grafici funkcija $f_1(x) = x$ i $f_2(x) = \varphi(x)$, koje su dobro izabrane

Kao što se može vidjeti izbor funkcije pod (a) daje divergentan niz, a pod (b) konvergentan. Mogu se postaviti sljedeća pitanja:

1. Je li niz definisan sa (3.9) konvergentan? Ako nije, je li moguće novim izborom funkcije φ dobiti konvergentan niz?
2. Ako je niz (3.9) konvergentan, da li konvergira ka prema rješenju jednačine (3.7)?
3. Ako je niz (3.9) konvergentan i ako konvergira rješenju jednačine (3.7), kakva je brzina konvergencije?
4. Pošto rješenje jednačine (3.7) nije poznato, kako procijeniti grešku aproksimacije x_n?

Odgovora na sva pitanja daje sljedeća teorema

Teorema 3.3.1 Neka je $\varphi : I = [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna funkcija za koju vrijedi

(1) $\varphi(x) \in I$ za svaki $x \in I$;

(2) $\exists q \in (0,1)$, takav da je $|\varphi'(x)| \leq q$ za svaki $x \in (a,b)$.

Tada postoji jedinstven $\xi \in I$ takav da je $\varphi(\xi) = \xi$. Osim toga, za proizvoljni $x_0 \in I$, niz definisan sa

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1,2,\ldots \tag{3.10}$$

konvergira prema ξ i vrijede sljedeće procjene greške aproksimacije

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|, \tag{3.11}$$

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|. \tag{3.12}$$

Metoda ima linearnu brzinu konvergencije, tj. vrijedi

$$|\xi - x_{n+1}| \leq q|\xi - x_n|. \tag{3.13}$$

Dokaz. Kako je $x_n = \varphi(x_{n-1})$ i $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, prema Lagrangeovoj teoremi postoji $c \in (a,b)$, tako da je

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}) = \varphi'(c)(x_n - x_{n-1}).$$

Sada je

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq q^n|x_1 - x_0|. \tag{3.14}$$

Konstruišimo sljedeći red

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots \tag{3.15}$$

Niz njegovih parcijalnih suma jednak je nizu (x_n), tj. $s_n = x_n$. Zbog (3.14) jedna majoranta ovog niza je red

$$|x_0| + |x_1 - x_0| + q|x_1 - x_0| + \cdots + q^{n-1}|x_1 - x_0| + \cdots \tag{3.16}$$

kojeg možemo zapisati ovako

$$|x_0| + |x_1 - x_0|(1 + q + \cdots + q^{n-1} + \cdots). \tag{3.17}$$

Kako je $q < 1$, geometrijski red iz zagrade u prethodnom izrazu je konvergentan, pa je i red (3.16). Na ovaj način pronašli smo jednu konvergentnu majorantu reda (3.15), što znači da je i taj red konvergentan. Po definiciji konvergencije reda, odgovarajući niz (s_n) parcijalnih suma (3.15) je konvergentan. Kako je $s_n = x_n$, to znači da je i niz (x_n) konvergentan, tj. postoji realan broj ξ, takav da je $\xi = \lim x_n$. Zbog uslova (1) čitav niz (x_n) je sadržan u I, a kako je I zatvoren skup, takođe je $\xi \in I$.

Ako u (3.10) pustimo da $n \to \infty$, onda zbog neprekidnosti funkcije φ imamo da $\xi = \varphi(\xi)$, što znači da je ξ korijen jednačine (3.7).

Dokažimo sada da je ξ jedino rješenje jednačine (3.7) na segmentu I. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je $\overline{\xi}$ takođe rješenje jednačine (3.7) i da vrijedi $\overline{\xi} = \varphi(\overline{\xi})$. Sada prema Lagrangeovoj teoremi mora postojati neki $c \in (a,b)$, takav da je

$$\overline{\xi} - \xi = \varphi(\overline{\xi}) - \varphi(\xi) = \varphi'(c)(\overline{\xi} - \xi),$$

odakle slijedi

$$(\overline{\xi} - \xi)(1 - \varphi'(c)) = 0.$$

Budući da je $1 - \varphi'(c) \neq 0$ zbog uslova (2) mora biti $\overline{\xi} = \xi$. Dakle, ξ je jedino rješenje jednačine (3.7) .

Dokažimo sada procjenu (3.11). Za funkciju $f(x) = x - \varphi(x)$ zbog uslova (2) vrijedi $f'(x) = 1 - \varphi'(x) \geqslant 1 - q > 0$. Zato uz korištenje Lagrangeove teoreme dobijamo

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |f(x_n)| = |f(x_n) - f(\xi)| = |(x_n - \xi)f'(c)| \geqslant (1-q)|x_n - \xi|,$$

odakle, ponovo koristeći Lagrangeovu teorenu dobijamo traženu procjenu (3.11)

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|x_n - \varphi(x_n)|}{1-q} = \frac{|\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n)|}{1-q} \leqslant \frac{q|x_n - x_{n-1}|}{1-q}.$$

Procjenu (3.12) dobijamo iz (3.11) koristeći (3.14)

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|.$$

Još treba dokazati da metoda ima linearnu brzinu konvergencije. Koristeći $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ i $\xi = \varphi(\xi)$ i Langrangeovu teoremu, zaključujemo da postoji neki $c \in (a,b)$, takav da je

$$|\xi - x_{n+1}| = |\varphi(\xi) - \varphi(x_n)| = |(\xi - x_n)\varphi'(c)| \leqslant q|\xi - x_n|,$$

odakle neposredno slijedi (3.13). ■

▪ **Primjer 3.5** ▪

3.4 Newtonova metoda i modifikacije Newtonove metode

Pretpostavimo da smo odredili segment $I = [a,b]$, kome pripada rješenje jednačine

$$f(x) = 0, \tag{3.18}$$

gdje je f neprekidna i dovoljno glatka funkcija za koju vrijedi $f'(x) \neq 0$, za svaki $x \in I$, te neka su $f'(x)$, $f''(x)$ konstantnog znaka za $\forall x \in [a,b]$.

Izaberimo početnu aproksimaciju $x_0 \in I$, te aproksimirajmo funkciju f linearnom funkcijom u okolini tačke x_0 koristeći Taylorov razvoj

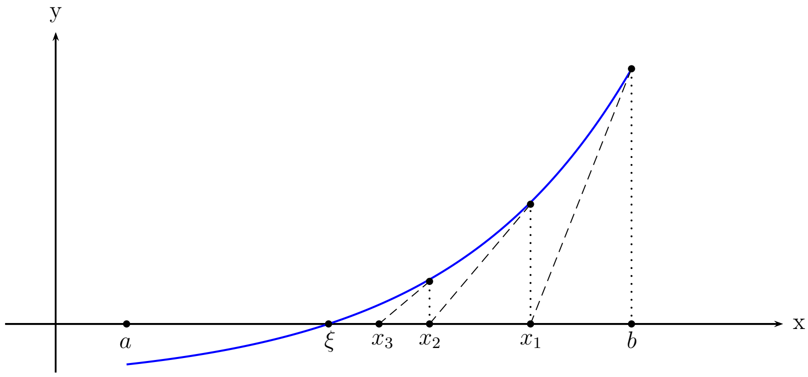
$$f_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0). \tag{3.19}$$

Grafik funkcije f_1 je tangenta na grafik funkcije f u tački $(x_0, f(x_0))$. Umjesto jednačine (3.18) rješavaćemo jednačinu $f_1(x) = 0$. Geometrijski gledano, umjesto određivanja tačke presjeka grafika funkcije f sa x–osom, određivaćemo tačku presjeka tangenta f_1 sa x–osom. Zbog toga se ova metoda zove metoda tangenti. Rješenje jednačine $f_1(x) = 0$ označimo sa x_1, sada možemo pisati

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{3.20}$$

Ponavljajući ovaj postupak, dobijamo niz $x_0, x_1, \ldots$ zadan rekurzivnom formulom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.21}$$



Slika 3.7: Newtonova metoda

Teorema 3.4.1 Neka je funkcija $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ima neprekidan drugi izvod na segmentu $I = [a, b]$. Neka je dalje, $f(a) \cdot f(b) < 0$, a prvi i drugi izvod izvod funkcije f na segmentu I imaju stalan predznak.

Tada, ako je $x_0 \in I$ izabran tako da je

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0, \tag{3.22}$$

onda niz definisan sa (3.21) konvergira prema jedinstvenom rješenju ξ jednačine $f(x) = 0$. Pri tome vrijedi procjena greške aproksimacije

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2, \tag{3.23}$$

gdje je

$$m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in I} |f''(x)|, \tag{3.24}$$

i metoda ima kvadratnu brzinu aproksimacije, tj. vrijedi

$$|\xi - x_{n+1}| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(\xi - x_n)^2. \tag{3.25}$$

Dokaz. Razmotrimo slučaj[1]

$$f(a) < 0,\ f(b) > 0,\ f'(x) > 0,\ f''(x) > 0 \text{ za svaki } x \in I.$$

Primjetimo prvo da postoji jedinstveni $\xi \in I$ takav da je $f(\xi) = 0$ i izaberimo $x_0 \in I$ tako da je ispunjeno (3.22). Kako je po pretpostavci $f''(x_0) > 0$, onda je i $f(x_0) > 0$, pa je $x_0 > \xi$ jer je f rastuća funkcija.

[1] Ostali slučajevi se dokazuju analogno

Primjenom matematičke indukcije pokazaćemo da je niz definisan sa (3.21) monotono opadajući i ograničen odozdo sa ξ.

1. Pretpostavimo da je $x_n > \xi$. Prema Taylorovoj formuli je

   $$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(c_1)(x - x_n)^2,$$

   gdje je c_1 između x i x_n. Specijalno, za $x = \xi$ imamo

   $$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2} f''(c_2)(\xi - x_n)^2,$$

   gdje je c_2 između ξ i x_n. Kako je $f''(c_2) > 0$ i $\xi - x_n \neq 0$, (zbog $x_n > \xi$), onda je

   $$f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) < 0.$$

   Odavde je

   $$\xi < x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1},$$

   pa je i $x_{n+1} > \xi$. Dakle niz (x_n) je ograničen odozdo sa ξ.

2. Kako je $x_n > \xi$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda zbog strogog monotonog rasta funkcije f mora biti i $f(x_n) > f(\xi) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Osim toga, po pretpostavci je i $f'(x_n) > 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zato iz (3.21) slijedi

   $$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0,$$

   što znači da je niz (x_n) monotono opadajući.

Budući da je niz (x_n) monotono opadajući i ograničen odozdo, on je konvergentan i čitav se nalazi u I, pa zbog toga postoji realan broj $\overline{\xi} \in I$, takav da je $\overline{\xi} = \lim x_n$. Ako sada u (3.21) pustimo $n \to \infty$, dobijamo

$$\overline{\xi} = \overline{\xi} - \frac{f(\overline{\xi})}{f'(\overline{\xi})},$$

odakle (zbog $f'(\overline{\xi}) > 0$) slijedi $f(\overline{\xi}) = 0$. Kako je $\overline{\xi}$ jedinstvena nula funkcije na segmentu I, mora biti $\overline{\xi} = \xi$.

Dokažimo sada (3.23). Prema Taylorovoj postoji realan broj c između x_n i x_{n-1}, takav da vrijedi

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2} f''(c)(x_n - x_{n-1})^2.$$

Zbog (3.21), ostaje samo

$$f(x_n) = \frac{1}{2} f''(c)(x_n - x_{n-1})^2,$$

odakle je

$$|f(x_n)| \leq \frac{1}{2} M_2 (x_n - x_{n-1})^2. \tag{3.26}$$

Kako je po Lagrangeovoj teoremi

$$f(\xi) - f(x_n) = (\xi - x_n) f'(c_1),\ c_1 \in I,$$

te

$$|f(x_n)| = |\xi - x_n| \cdot |f'(c_1)| \geqslant m_1 \cdot |\xi - x_n,|$$

a zbog stroge monotonosti funkcije f slijedi

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m_1},\ \text{gdje je } 0 < m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|. \tag{3.27}$$

Sada iz (3.27) koristeći (3.26) dobijamo (3.23).

Na kraju treba dokazati kvadratnu brzinu konvergencije metode, tj. dokazati nejednakost (3.25). Prema Taylorovoj formuli postoji realan broj c između ξ i x_n, takav da vrijedi

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2} f''(c)(\xi - x_n)^2.$$

Dijeljenjem sa $f'(x_n)$, dobijamo

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \xi - x_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c)}{f'(x_n)} (\xi - x_n)^2.$$

Koristeći sada (3.21), imamo da je

$$x_{n+1} - \xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c)}{f'(x_n)} (\xi - x_n)^2,$$

odakle slijedi (3.25). ■

■ **Primjer 3.6** ■

3.4.1 Modifikacije Newtonove metode

U svakom koraku Newtonove metode moramo izračunati i vrijednost funkcije i njenog izvoda, što u nekim slučajevima otežava primjenu ove metode. U sljedećim modifikacijama izbjegnuto je računanje vrijednosti izvoda u svakoj iteraciji.

Metoda sječice Neka je lokalizovano rješenje $f(x) = 0$, gdje je $f \in C[a,b]$, tako da vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \text{ i neka } f' \text{ i } f'' \text{ imaju stalan znak na } [a,b]. \tag{3.28}$$

Posmatrajmo slučaj $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$. Sada na segmentu $[a,b]$ izaberimo dvije početne aproksimcije x_0, x_1 i neka je $x_0 = b$. Povucimo pravu kroz tačke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$. Sljedeću aproksimaciju dobićemo kao apscisu presječne tačke ove prave i x–ose

$$x_2 = x_0 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_0),\ \text{ako je } f(x_1) \neq f(x_0).$$

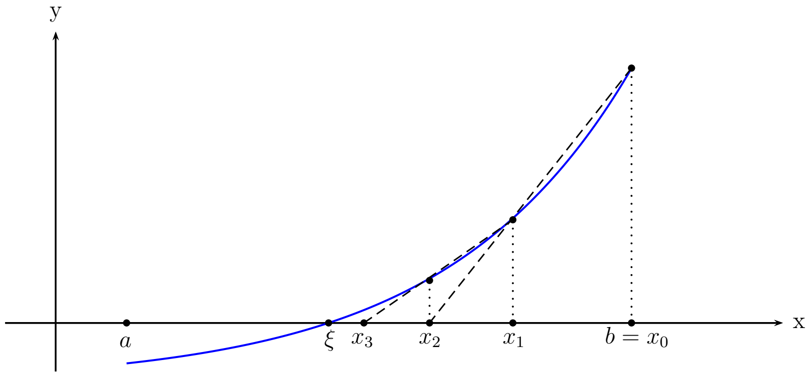
Ponavljajući postupak, dobijamo niz definisan rekurzivnom formulom

$$x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1}), \quad f(x_n) \neq f(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots \tag{3.29}$$

ili

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad f(x_n) \neq f(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots \tag{3.30}$$

Ako su početne aproksimacije x_0, x_1 dovoljno blizu rješenja ξ, onda uz uslove $f'(\xi) \neq 0$ i $f''(\xi) \neq 0$, metoda sječice ima brzinu konvergencije $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.



Slika 3.8: Metoda sječice

Metoda regula falsi[2].

Neka je lokalizovano rješenje $f(x) = 0$, gdje je $f \in C[a,b]$, tako da vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0. \tag{3.31}$$

Odredimo pravu koja prolazi kroz tačke sa koordinatama $(a, f(a))$ i $((b, f(b))$, jednačina ove prave je

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Odredimo gdje ova prava siječe x–osu, tj. $f_1(x) = 0 \Longleftrightarrow f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) = 0$, pa dobijamo

$$x_1 = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Dobili smo dva podsegmenta $[a, x_1]$ i $[x_1, b]$, za nastavak postupka biramo onaj na kojem je ispunjen uslov $f(a) \cdot f(x_1) < 0$ ili $f(x_1) \cdot f(b) < 0$. Poslije reindeksiranja neka je to segment $[a_1, b_1]$. Opet povlačimo pravu kroz tačke sa koordinatama $(a_1, f(a_1))$ i $(b_1, f(b_1))$, odredimo gdje dobijena prava siječe x–osu, itd.

Nastavljajući navedeni postupak formiramo niz aproksimacija (x_n) rješenja ξ jednačine $f(x) = 0$. Postupak prekidamo kada dobijemo segment $[a_n, b_n]$ za koji vrijedi $b_n - a_n \leq \varepsilon$, gdje je ε zadana tačnost. Ovaj metod ima globalnu konvergenciju.

Slučaj kada f' i f'' imaju stalan znak na $[a,b]$. Neka je lokalizovano rješenje $f(x) = 0$, gdje je $f \in C[a,b]$, tako da vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \text{ i neka } f' \text{ i } f'' \text{ imaju stalan znak na } [a,b]. \tag{3.32}$$

Posmatrajmo slučaj $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$.

Označimo sa $x_0 = a$, te povucimo pravu kroz tačke $(x_0, f(x_0))$, $(b, f(b))$. Prava siječe x–osu u tački

$$x_1 = x_0 - \frac{b - x_0}{f(b) - f(x_0)} f(x_0).$$

[2] U literaturi metoda regula falsi se smatra modifikacijom Newtonove metode, odnosno jednom varijantom metode sječice, pa čak specijalnim slučajem metode jednostavnih iteracija

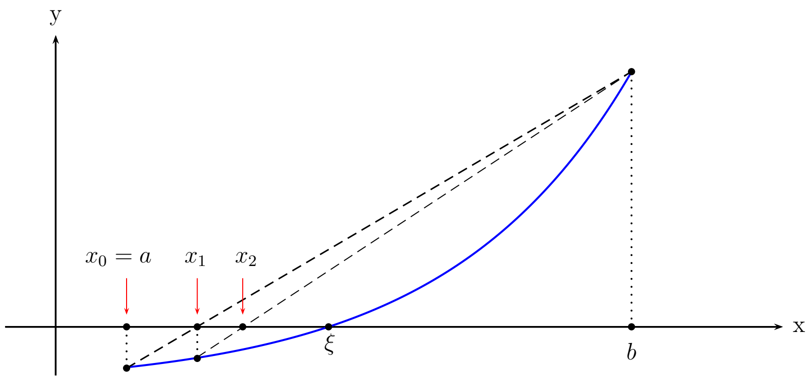
Zatim povucimo pravu kroz tačke $(x_1, f(x_1))$ i $(b, f(b))$, ova prava siječe x–osu u tački

$$x_2 = x_1 - \frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)} f(x_1).$$

Ponavljajući postupak, dobijamo niz (x_n) definisan rekurzivnom formulom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n),\ n = 1, 2, \ldots \tag{3.33}$$

Niz dobijen primjenom formule (3.33) konvergira linearnom brzinom ka jednom rješenju jednačine $f(x) = 0$ na $[a, b]$. Postupak se može se vidjeti na slici 3.9



Slika 3.9: Metoda regula falsi ili metoda pogrešnog položaja. Za iste uslove niz aproksimativnih vrijednosti (x_n) prilazi ka tačnom rješenju ξ sa suprotne strane u odnosu na Newtonovu metodu

N Za ocjenu greške obje modifikacije može se koristiti procjena data u Teoremi 3.1.1.

3.5 Kombinovana metoda

Pokazuje se da primjenom metoda regula falsi i Newtonovom metodom dobijaju aproksimacije sa raznih strana izolovanog rješenja ξ jednačine $f(x) = 0$. Zbog toga je moguće kombinovati ove dvije metode. Tako se na svakom koraku određuju dvije aproksimacije, jedna sa lijeve a druga sa desne strane tačke ξ. Kako se rješenje ξ nalazi između ove dvije aproksimacije, da bismo odredili približnu vrijednost rješenja ξ za zadanom tačnošću ε, postupak se završava na koraku na kome razlika između dvije određene aproksimacije nije veća od ε.

Posmatrajmo slučaj kada je $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ na $[a, b]$. Ostali slučajevi razmatraju se analogno. Označavaćemo sa x_n aproksimacije određene metodom regula falsi. One u našem slučaju računaju se na sljedeći način

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

U ovom slučaju x_{n+1} predstavlja tačku u kojoj prava kroz tačke $(x_n, f(x_n)), (b, f(b))$ siječe x–osu. Aproksimacije određene Newtonovom metodom označavaćemo sa $\bar{x}_n$. U na našem slučaju je

$$\bar{x}_0 = b, \quad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Kako metod regula falsi sporije konvergira od Newtonovog metoda, aproksimacije x_n su lošije od aproksimacija $\overline{x}_n$. Da bismo ubrzali konvergenciju metoda regula falsi, aproksimacije x_n računamo na sljedeći način

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{\overline{x}_{n+1} - x_n}{f(\overline{x}_{n+1}) - f(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

To znači da će sada x_{n+1} predstavljati tačku u kojoj prava koja prolazi kroz tačke $(x_n, f(x_n))$ i $(\overline{x}_{n+1}, f(\overline{x}_{n+1}))$ siječe x–osu. Prema onome što je ranije rečeno, važi

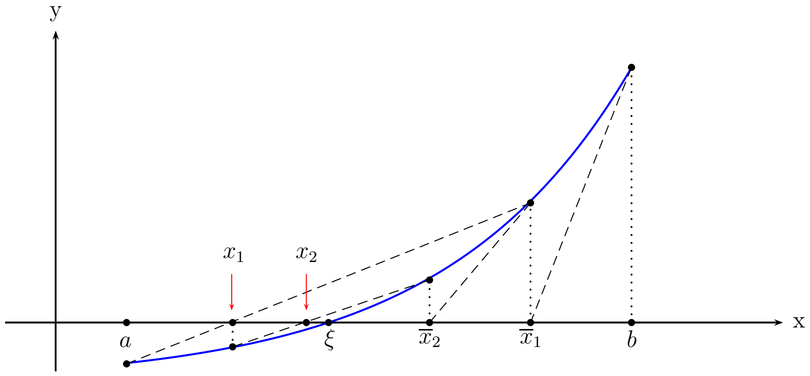
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to} \overline{x}_n = \xi.$$

Kako $\xi \in [x_n, \overline{x}_n]$ za aproksimaciju rješenja ξ možemo uzeti

$$\tilde{x}_n = \frac{x_n + \overline{x}_n}{2}.$$

Za grešku te aproksimacije važi ocjena

$$|\xi - \tilde{x}_n| \leqslant \frac{1}{2}|\overline{x}_n - x_n|.$$



Slika 3.10: Kombinovana metoda

■ **Primjer 3.7** ■

3.6 Rješavanje sistema nelinearnih jednačina

Metodi koji su korišteni za rješavanje nelinearnih jednačina mogu se uopštiti i primjeniti za rješavanje sistema nelinearnih jednačina.

Sistem od n nelinearnih jednačina sa n nepoznatih može se u opštem slučaju zapisati i u obliku

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Koristeći vektorski zapis možemo ovaj sistem zapisati u kraćem obliku

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

gdje su $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^T$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. S obzirom na ovaj zapis, imamo sljedeći zadatak

$$\text{za datu funkciju } \mathbf{f}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \text{ odrediti } \mathbf{x}^\star \in \mathbb{R}^n \text{ tako da je} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{0}. \tag{3.35}$$

3.6.1 Newtonov metod

Pretpostavimo da je poznata neka aproksimacija $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ rješenja $\mathbf{x}^\star = (x_1^\star, x_2^\star, \dots, x_n^\star)$ sistema (3.34). Ako uvedemo oznake

$$\tilde{h}_1^0 = x_1^\star - x_1^0,\ \tilde{h}_2^0 = x_2^\star - x_2^0, \dots, \tilde{h}_n^0 = x_n^\star - x_n^0,$$

vrijedi

$$f_i(x_1^0 + \tilde{h}_0^1, x_2^0 + \tilde{h}_0^2, \dots, x_0^n + \tilde{h}_n^0) = 0,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Koristeći Taylorovu formulu dobijamo

$$\begin{aligned} 0 = f_i(x_1^0 + \tilde{h}_1^0, x_2^0 + \tilde{h}_2^0, \dots, x_n^0 + \tilde{h}_n^0) &= f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ &+ \tilde{h}_1^0 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \tilde{h}_2^0 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \cdots + \tilde{h}_n^0 \frac{\partial f_i}{\partial x_n} + o_i(\tilde{h}_1^0, \tilde{h}_2^0, \dots, \tilde{h}_n^0),\ i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{3.36}$$

pri čemu se parcijalni izvodi računaju u tački $(x_1^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$. Ovdje su navedeni samo članovi koji su linearni u odnosu na $\tilde{h}_i^0$. Odbacujući članove višeg reda dobijamo

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \tilde{h}_1^0 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \tilde{h}_2^0 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + \tilde{h}_n^0 \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \approx 0,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Neka su sada h_i^0 aproksimacije grešaka $\tilde{h}_i^0$ takve da je

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + h_1^0 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + h_2^0 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + h_n^0 \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Tako smo dobili linearni sistem u kojem se kao nepoznate javljaju veličine h_i^0, $i = 1, 2, \dots, n$, koji možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} h_1^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + h_2^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \cdots + h_n^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_n} &= -f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ h_1^0 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + h_2^0 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + h_n^0 \frac{\partial f_2}{\partial x_n} &= -f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ &\vdots \\ h_1^0 \frac{\partial f_n}{\partial x_1} + h_2^0 \frac{\partial f_n}{\partial x_2} + \cdots + h_n^0 \frac{\partial f_n}{\partial x_n} &= -f_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Matrica ovog sistema je

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

a ovo je Jacobijeva matrica funkcija $f_1, f_2, \ldots, f_n$ u tački $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ (svi parcijalni izvodi izračunati su u ovoj tački). Ovu matricu kraće ćemo označavati sa $J_{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}$ ili sa $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)$. Sistemu (3.37) odgovara matrični zapis

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)\mathbf{h}^0 = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^0),$$

gdje je $\mathbf{h}^0 = (h_1^0, h_2^0, \ldots, h_n^0)^T$. Ako pretpostavimo da je Jacobijeva matrica $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)$ regularna, tada gornji sistem ima jedinstveno rješenje

$$\mathbf{h}^0 = -[\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)]^{-1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}^0). \tag{3.39}$$

Uvrštavajući

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \mathbf{h}^0$$

u (3.39) dolazimo do nove aproksimacije rješenja $\mathbf{x}^\star$

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 - [\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)]^{-1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}^0).$$

U opštem slučaju imamo

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - [\mathbf{f}'(\mathbf{x}^k)]^{-1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}^k),\ k = 0, 1, \ldots$$

U praksi se ne preporučuje invertovanje Jacobijeve matrice $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^k)$, već se rješava linearni sistem

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}^k)\mathbf{h}^k = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^k),$$

pa se nova iteracija računa po formuli

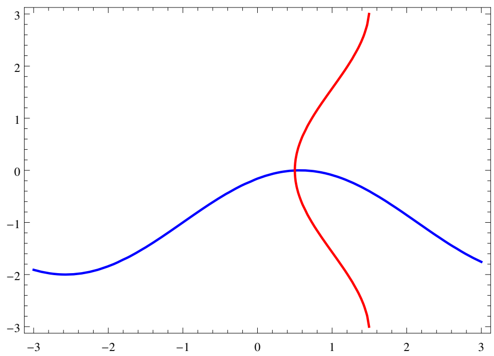
$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{h}^k.$$

Na osnovu izloženog rješavanje problema (3.35) Newtonovom metodom možemo podijeliti u sljedeće korake

1. Izabrati vektor početnih vrijednosti $\mathbf{x}^0$;
2. Riješiti sistem linearnih jednačina $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^k)\mathbf{h}^k = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$;
3. Izračunati $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{h}^k$.

■ **Primjer 3.8** Koristeći Newtonov metod riješiti sljedeći sistem nelinearnih jednačina $\sin(x+y) - y - 1 = 0 \wedge 2x + \cos y - 2 = 0$.

Rješenje. Neka je $f_1(x,y) = \sin(x+y) - y - 1$ i $f_2(x,y) = 2x + \cos y - 2$.



Slika 3.11: Grafici funkcija f_1 i f_2

Odredimo sa Slike 3.11 početne uslove, $\mathbf{x}^0 = (1, 0.5)$.

n	$\mathbf{x}^n$
0	(1.0000,0.5000)
1	(0.4723,0.1289)
2	(0.4956,-0.0025)
3	(0.500,-0.0025)

■

3.6.2 Metoda iteracija

Sistem $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, možemo zamijeniti ekvivalentim sistemom

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Sada se rješavanje sistema

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

svodi na odrađivanje fiksne tačka preslikavanja $\mathbf{g}$, tj. tačke $\mathbf{x}^\star$ takve da je $\mathbf{g}(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{x}^\star$. Ovaj postupak se sastoji od sljedećeg: polazimo od početnog vektora $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, zatim računamo niz vektora $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ po formuli

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^k),\ k = 0, 1, \ldots \tag{3.41}$$

Ovako dobijen niz konvergira[3], pod određenim uslovima, ka fiksnoj tački preslikavanja $\mathbf{g}$. Da bi vidjeli koji su to uslovi potreban nam je pojam kontrakcije preslikavanja.

Za preslikavanje $\mathbf{g} : D_f \mapsto \mathbb{R}^n$, $(D_f \subset \mathbb{R}^n)$ kažemo da je kontrakcija na zatvorenom skupu $D_0 \subset D_f$ ako postoji broj $q < 1$ takav da za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_0$ vrijedi

$$||\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})|| \le q||\mathbf{x} - \mathbf{y}||,$$

gdje je $||\cdot||$ neka vektorska norma. Konstanta q naziva se faktor kontrakcije.

Sljedeća teorema govori o egzistenciji i jedinstvenosti fiksne tačke preslikavanja $\mathbf{g}$.

Teorema 3.6.1 Ako je preslikavanje $\mathbf{g}$ kontrakcija na zatvorenom skupu $D_0 \subset D_f$ i ako je $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in D_0$ za sve $\mathbf{x} \in D_0$, tada preslikavanje ima jedinstvenu fiksnu tačku $\mathbf{x}^\star \in D_0$ i ona predstavlja graničnu vrijednost niza određenog sa (3.41) pri čemu je $\mathbf{x}^0 \in D_0$.

Sljedeća teorema daje dovoljne uslove za konvergenciju iteracionog postupka (3.41).

Teorema 3.6.2 Neka preslikavanje $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)^T$ ima fiksnu tačku $\mathbf{x}^\star$, koja je unutrašnja tačka skupa D_f, i neka su g_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, neprekidno–diferencijabilne funkcije u okolini tačke $\mathbf{x}^\star$. Ako je $\rho\left(\mathbf{g}'(\mathbf{x}^\star)\right) < 1$, tada postoji okolina $\mathcal{O}$ tačke $\mathbf{x}^\star$ takva da je $\mathcal{O} \subset D_f$ i za sve $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{O}$, vektori $\mathbf{x}^k$ određeni iteracionom metodom (3.41) pripadaju skupu D_f i za njih vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^\star.$$

[3] Kažemo da niz vektora $(\mathbf{x}^k)$ konvergira ka vektoru $\mathbf{x}^\star$ ako za neku vektorsku normu $||\cdot||$ vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} ||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^\star|| = 0$.

Kako je za svaku kvadratnu matricu A i svaku matričnu normu $||\cdot||$ ispunjen uslov

$$\rho(A) \leqslant ||A||,$$

gdje je sa $\rho(A)$ označen spektralni radijus matrice A, da bi imali konvergenciju iteracionog postupka (3.41) dovoljno je da bude ispunjen uslov

$$||\mathbf{g}'(\mathbf{x})|| < 1, \text{ za svako } \mathbf{x} \in D_f.$$

N Newtonov metod iz Podsekcije 3.6.1 predstavlja specijalan slučaj opšteg iteracionog postupka (3.41) kod koga je iteraciona funkcija

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \left(\mathbf{f}'(\mathbf{x})\right)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

3.7 Zadaci za vježbu

(1) Lokalizovati rješenja sljedećih jednačina
(a) $x^2 - 2e^{-x^2} = 0$; (b) $-3x^3 - x^2 - 5x + 1 = 0$; (c) $\ln(x-1) - x^2 + 3 = 0$.

(2) Metodom polovljenja segmenta izračunati aproksimativna rješenja sljedećih jednačina sa tačnošću $\varepsilon = 0.001$.
(a) $\ln x + 3x - 4 = 0$ na $[1, 1.5]$; (b) $x^6 - 3x^5 + 4x^2 - 11x + 1 = 0$ na $[-0.5, 0.5]$;
(c) $3x - e^{-4x+1} = 0$ na $[0, 0.5]$.

(3) Metodom jednostavnih iteracija izračunati aproksimativna rješenja sljedećih jednačina sa tačnošću $\varepsilon = 0.001$.
(a) $\operatorname{tg} x - e^x \sin x + 2 = 0$ na $[-1.5, -1]$; (b) $e^{2x-5} - 7x = 0$ na $[-0.05, 0.05]$;
(c) $2.23x^3 - \cos x + 3 = 0$.

(4) Newtonovom, njenim modifikacijama i kombinovanom metodom izračunati aproksimativna rješenja sljedećih jednačina sa tačnošću $\varepsilon = 0.001$.
(a) $\operatorname{ctg} x - \sin x = 0$; (b) $\ln x - 2x + 7 =; 0$ (c) $\operatorname{tg} x - 0.5x = 0$.

(5) Newtonovom i iteracionom metodom izračunati aproksimativna rješenja sljedećih sistema nelinearnih jednačina.

$$(a) \begin{cases} x^2 - 2y^2 + 1 = 0 \\ -x^2 + 2y - 1 = 0; \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} \sin(x+y) - y - 1 = 0 \\ 2x + \cos y - 2 = 0; \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 16 = 0 \\ xy^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

4. Numeričko diferenciranje i integracija

4.1 Numeričko diferenciranje

Koristeći tablicu izvoda baznih funkcija i pravila za diferenciranje možemo izračunati izvod proizvoljne elementarne funkcije. Međutim kada je analitički oblik funkcije f suviše komplikovan, ovakav način računanja može biti nepraktičan. Ako je funkcija zadana tabelarno, onda se pogotovo ne može odrediti njen izvod na prethodno opisani način. Zbog toga se javila potreba za numeričkim diferenciranjem, tj. određivanjem aproksimacije izvoda funkcije f u nekim tačkama ili na nekom segmentu odnosno intervalu. Osim ova dva pomenuta razloga za upotrebom numeričkog diferenciranja, ništa manje važan razlog, naprotiv možda i najvažniji je upotreba aproksimacija izvoda u numeričkom rješavanju običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina.

U nastavku koristićemo najjednostavniju metodu, koja je zasnovana na samoj definiciji izvode, te Taylorov razvoj za procjenu greške tako dobijene aproksimacije izvoda neke fukcije.

Dakle, potrebno je izvršiti numeričko diferenciranje funkcije f, koja je definisana na nekom segmentu $[a,b]$, i dovoljno je **glatka**. Na segmentu $[a,b]$ izaberimo čvorove

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n, \tag{4.1}$$

gdje je $x_0 = a$, $x_n = b$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Pretpostavimo sada, da funkcija f ima izvod u čvoru x_i, tada vrijedi

$$f'(x_i) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h}.$$

S obzirom na prethodnu relaciju, za malu vrijednost koraka $h > 0$ vrijedi

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}, \; i = 0, \ldots, n-1. \tag{4.2}$$

Ako umjesto x_i uvrstimo x dobijamo

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Primjetimo, geometrijsko tumačenje formule (4.2) je da sada koeficijent pravca tangente na grafik funkcije f u tački $(x_i, f(x_i))$ zamijenjen sa pravcem sječice koja prolazi kroz tačke $(x_i, f(x_i))$ i $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.

Da bismo odredili grešku aproksimacije dobijenu u (4.2), iskoristimo Taylorov razvoj, prema kojem je

$$f(x_i+h) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{h^2}{2} f''(\xi_i),\ x_i < \xi_i < x_i + h.$$

Sada je

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi_i),$$

pa je greška aproksimacije u (4.2) jednaka

$$f'(x_i) - \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h} = -\frac{h}{2} f''(\xi_i), \tag{4.3}$$

što znači da je greška reda $\mathcal{O}(h)$.

Na isti način može se izvesti i formula

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_i-h)}{h} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h},\ i = 1, \ldots, n. \tag{4.4}$$

U ovom slučaju greška aproksimacije je

$$f'(x_i) - \frac{f(x_i) - f(x_i-h)}{h} = \frac{h}{2} f''(\xi_i),\ x_i - h < \xi_i < x_i, \tag{4.5}$$

što znači da je greška ponovo reda $\mathcal{O}(h)$.

Pokazaćemo sada kako se može dobiti aproksimacija izvoda $f'(x_i)$, čija je greška reda $\mathcal{O}(h^2)$. Prema Taylorov razvoju je

$$\begin{aligned} f(x_i+h) &= f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(x_i) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_i^+),\ x_i < \xi_i^+ < x_i + h, \\ f(x_i-h) &= f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(x_i) - \frac{h^3}{6} f'''(\xi_i^-),\ x_i - h < \xi_i^- < x_i. \end{aligned}$$

Oduzimanjem ovih relacija dobijamo

$$f(x_i+h) - f(x_i-h) = 2hf'(x_i) + \frac{h^3}{6}[f'''(\xi_i^+) + f'''(\xi_i^-)],$$

pa je

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} \cdot \frac{f'''(\xi_i^+) + f'''(\xi_i^-)}{2}. \tag{4.6}$$

Tako dolazimo do aproksimacije

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}, \tag{4.7}$$

iz (4.6) slijedi da je greška aproksimacije $\mathcal{O}(h^2)$.

Ako umjesto x_i uvrstimo x, dobijamo

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \tag{4.8}$$

Kako $\frac{f'''(\xi_i^+)+f'''(\xi_i^-)}{2}$ predstavlja aritmetičku sredinu dvije vrijednosti funkcije f''', ta vrijednost leži između minimalne i maksimalne vrijednosti funkcije $f'''(x)$, $x \in [x_i - h, x_i + h]$. Pretpostavili smo da je f dovoljno glatka, pa je f''' neprekidna na $[x_i - h, x_i + h]$, te postoji tačka ξ_i na tom segmentu takva da je $\frac{f'''(\xi_i^+)+f'''(\xi_i^-)}{2} = f'''(\xi_i)$, pa se greška aproksimacije (4.7), a s obzirom na (4.6) može zapisati u obliku

$$f'(x_i) - \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h} = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi_i). \tag{4.9}$$

Primjenom Tajlorovog razvoja na sličan način može se dobiti aproksimacija drugog izvoda višeg reda tačnosti u odnosu na korak h, kao i aproksimacije izvoda višeg reda. Pretpostavili smo da je f dovoljno glatka, u ovom slučaju $f \in C^4[a,b]$. Primjenimo sada Taylorov razvoj

$$\begin{aligned}
f(x_i+h) &= f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(x_i) + \frac{h^3}{6} f'''(x_i) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_i^+),\ x_i < \xi_i^+ < x_i + h \\
f(x_i-h) &= f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(x_i) - \frac{h^3}{6} f'''(x_i) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_i^-),\ x_i - h < \xi_i^- < x_i + h.
\end{aligned}$$

Sabiranjem prethodnih relacija dobijamo

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i+h) - 2f(x_i) + f(x_i-h)}{h^2} - \frac{h^2}{24}\left[f^{(4)}(\xi_i^+) + f^{(4)}(\xi_i^-)\right],$$

pa za aproksimaciju drugog izvoda možemo koristiti formulu

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_i+h) - 2f(x_i) + f(x_i-h)}{h^2} = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2},\ i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.10}$$

Na isti način kao u slučaju trećih izvoda, vrijedi

$$\frac{f^{(4)}(\xi_i^+) + f^{(4)}(\xi_i^-)}{2} = f^{(4)}(\xi_i),\ x_i - h < \xi_i < x_i + h,$$

pa je greška aproksimacije (4.10) jednaka

$$f''(x_i) - \frac{f(x_i+h) - 2f(x_i) + f(x_i-h)}{h^2} = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi_i), \tag{4.11}$$

što znači da greška aproksimacije $\mathcal{O}(h^2)$.

4.2 Osnovni pojmovi numeričke integracije

U nastavku ovog poglavlja bavićemo se numeričkim metodama za računanje određenog integrala

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.12}$$

U matematičkoj analizi ovaj integral se računa pomoću Newton–Leibnitzove formule

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

gdje je F primitivna funkcija funkcije f, tj. $F'(x) = f(x)$. Poznato je da je veoma često računanje određenog integrala na ovaj način teško ili nemoguće. Na primjer funkcije
$e^{-x^2}, \sin x^2, \cos x^2, \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}, \frac{1}{\ln x}$ nemaju primitivne funkcije u klasi elementarnih funkciji. Integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

ima određenu numeričku vrijednost koja predstavlja površinu ograničenu pravim $y = 0, x = 0, x = 1$ i grafikom funkcije $f(x) = e^{-x^2}$, iako ne postoji ni jedna elementarna funkcija F takva da je $F'(x) = e^{-x^2}$. Takođe ako je podintegralna funkcija f zadana tablično ne može se koristiti Newton–Leibnitzova formula. Zbog ovih razloga potrebne su metode za približno računanje integrala (4.12), bez obzira da li je podintegralna funkcija f zadana analitički ili tabelarno, kao i nezavisno od toga da li podintegralna funkcija f ima ili nema primitivnu funkciju u klasi elementarnih funkcija.

Svaka eksplicitna formula koja omogućava aproksimaciju integrala (4.12) naziva se kvadraturna formula ili formula za numeričku integraciju. Do kvadraturne formule možemo doći, na primjer tako što ćemo funkciju f aproksimirati funkcijom f_n, $n = 0, 1, \ldots$, a onda ćemo $I(f)$ aproksimirati sa $I_n(f) = I(f_n)$, tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.13}$$

Pri tome je

$$E_n(f) = I(f) - I(f_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x, \tag{4.14}$$

greška kvadraturne formule (4.13). Ako su f i f_n neprekidne funkcije na segmentu $[a, b]$, tada za $E_n(f)$ važi sljedeća procjena greške

$$|E_n(f)| \leqslant \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \cdot (b - a). \tag{4.15}$$

Ako za neko n vrijedi $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$, tada je $|E_n(f)| \leqslant \varepsilon(b - a)$.

Kvadraturna formula (4.13) ima smisla ako se integral funkcije f_n može lako izračunati. Zbog toga bilo bi zgodno uzeti za f_n polinom stepena ne većeg od n, jer je integracija polinoma jednostavna. Dakle uzmimo za funkciju f_n, na primjer Lagrangeov interpolacioni polinom p_n koji interpolira funkciju f u čvorovima

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b. \tag{4.16}$$

Imajući u vidu, (2.16), dobijamo

$$I_n(f) = \int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.17}$$

Ovako dobijena kvadraturna formula

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.18}$$

naziva se Lagrangeova kvadraturna formula. To je specijalni slučaj kvadraturne formule

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i), \tag{4.19}$$

kod koje je

$$\alpha_i = \int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x.$$

Brojeve α_i nazivamo koeficijenti (težine), a tačke x_i čvorovi kvadraturne formule.

Primjetimo da je kvadraturna formula (4.18) tačna u slučaju kada je funkcija f polinom stepena ne većeg od n. U ovom slučaju je $p_n = f$, pa je $\int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zbog upravo izloženog definiše se stepen tačnosti kvadraturne formule.

Definicija 4.2.1 Stepen tačnosti kvadraturne formule je najveći cio broj r takav da je

$$I_n(f) = I(f) \text{ za sve } f,$$

gdje je f polinom stepena ne većeg od r.

S obzirom na ovu definiciju, Lagrangeova kvadraturna formula (4.18) ima stepen tačnosti ne manji od n. Stepen tačnosti u nekim slučajevima je upravo n a nekada može biti i veći od n.

4.3 Pravougaono i trapezno pravilo

4.3.1 Pravougaono pravilo

Kvadraturnu formulu, koristeći pravougaono pravilo dobijamo na sljedeći način: funkciju f na segmentu $[a,b]$ aproksimiramo Lagrangeovim interpolacionim polinomom p_0 određenim na osnovu jednog čvora (funkciju f aproksimiramo sa konstantnom funkcijom). Neka je to čvor koji ima vrijednost $x_0 = \frac{a+b}{2}$, tj. $p_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, pa je sada

$$I_0(f) = \int_a^b p_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a).$$

Kvadraturna formula

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\cdot f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \tag{4.20}$$

naziva se formula pravougaonika, jer se površina lika ograničenog sa pravim $x=a$, $x=b$, $y=0$ i grafikom funkcije f aproksimira sa pravougaonikom čije su dužine stranica $b-a$ i $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Da bi izračunali vrijednost greške kvadraturne formule (4.20) pretpostavimo da je funkcija f dovoljno glatka (u ovom slučaju potrebno je da f ima neprekidan drugi izvod). Koristićemo teoremu o srednjoj vrijednosti i razvoj u Taylorov polinom funkcije f. Za funkciju f vrijedi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(c(x))}{2}(x-x_0)^2,$$

gdje je $c = c(x)$ neka tačka između tačaka x i x_0 i koja zavisi od x. Sada integracijom prethodne jednakosti dobijamo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0)(b-a) + f'(x_0)\int_a^b (x-x_0)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{f''(c(x))}{2}(x-x_0)^2.$$

Prema teoremi o srednjoj vrijednosti vrijedi

$$\int_a^b \frac{f''(c(x))}{2}(x-x_0)^2\,\mathrm{d}x = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-x_0)^2\,\mathrm{d}x = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3,\ a<\xi<b,$$

i kako je $\int_a^b (x-x_0)\,\mathrm{d}x = 0$, dobijamo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - f(x_0)(b-a) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3.$$

Ako označimo sa $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I(f)$, $f(x_0)(b-a) = I_0(f)$ i $h = \frac{b-a}{2}$, možemo pisati

$$E_0(f) = I(f) - I_0(f) = f''(\xi)\frac{h^3}{3.} \tag{4.21}$$

Ako segment $[a,b]$ nije dovoljno mali, vrijednost greške date sa (4.21) zbog izraza h^3 postaje takođe velika. Ovaj problem se može riješiti dijeljenjem segmenta $[a,b]$ na potreban broj podsegmenata i na svakom podsegmentu primijenimo pravougaonu formulu odnosno pravilo. Zatim se dobijeni rezultati po pojedinim podsegmentima saberu i taj zbir predstavlja aproksimaciju integrala na $[a,b]$.

Podijelimo segment $[a,b]$ na m jednakih podsegmenata čija je dužina $h = \frac{b-a}{m}$, $m \geqslant 1$ i uvedimo čvorove $x_i = a + (2i+1)\frac{h}{2}$, $i = 0,1,\ldots,m-1$. Funkciju f aproksimiraćemo na segmentu $[a,b]$ sa dio po dio konstantnom funkcijom, koja ima vrijednost $f(x_i)$ na svakom podsegmentu $\left[x_i - \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}\right]$, $i = 0,1,\ldots,m-1$.

Kako je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

i zbog formule pravougaonika

$$\int_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx hf(x_i)$$

dobijamo formulu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h\sum_{i=0}^{m-1} f(x_i), \tag{4.22}$$

koja se naziva uopštena formula pravougaonika. Sada integral $I(f)$ aproksimiramo sa

$$I_{0,m} = h\sum_{i=0}^{m-1} f(x_i). \tag{4.23}$$

Greška uopštene formule pravougaonika jednaka je zbiru grešaka formule pravougaonika na podsegmentima $\left[x_i - \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}\right]$, $i = 0,1,\ldots,m-1$, tj.

$$E_{0,m}(f) = I(f) - I_{0,m}(f) = \sum_{i=o}^{m-1} \frac{h^3}{24} f''(\xi_i), \quad x_i - \frac{h}{2} < \xi_i < x_i + \frac{h}{2}.$$

Ako je $f \in C^2[a,b]$, tada postoji tačka $\xi \in [a,b]$ takva da je

$$f''(\xi) = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} f''(\xi_i),$$

pa je dalje

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^3}{24} f''(\xi_i) = m \cdot \frac{h^3}{24} \cdot \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f''(\xi_i),$$

i kako je $mh = b - a$, dobijamo izraz za grešku uopštene formule pravougaonika

$$E_{0,m}(f) = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi). \tag{4.24}$$

Ako je

$$\max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \leqslant M_2,$$

tada za (4.24) vrijedi procjena greške

$$|E_{0,m}(f)| \leqslant \frac{(b-a)h^2}{24} M_2. \tag{4.25}$$

4.3.2 Trapezno pravilo

Aproksimirajmo sada funkciju f sa Lagrangeovim interpolacionom polinom prvog stepena, tj. iskoristimo dva čvora za interpolaciju i to $x_0 = a$ te $x_1 = b$. Koristeći (2.16) dobijamo

$$p_1(x) = f(x_0) l_0(x) + f(x_1) l_1(x) = f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a},$$

te je sada

$$\begin{aligned} I_1(f) &= \int_a^b p_1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(a)}{a-b} \int_a^b (x-b)\,\mathrm{d}x + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{f(a)}{a-b} \cdot \frac{(x-b)^2}{2} \bigg|_a^b + \frac{f(b)}{b-a} \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \bigg|_a^b \\ &= \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]. \end{aligned}$$

Kvadraturna formula

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \tag{4.26}$$

naziva se trapezna kvadraturna formula. Vrijednost integrala $I_1(f)$ jednaka je površini trapeza ograničenog grafikom polinoma p_1 i pravim $y = 0$, $x = a$ i $x = b$. Ako uvedemo oznake $h = b - a$, $x_0 = a$ i $x_1 = b$, trapeznu formulu (4.26) možemo pisati u obliku

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

Grešku trapezne formule možemo odrediti na sljedeći način

$$E_1(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b p_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - p_1(x))\,\mathrm{d}x.$$

Po procjeni (2.37) iz Teoreme 2.4.1 vrijedi

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2} (x-a)(x-b),$$

pa je

$$E_1(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x.$$

Sada na osnovu teoreme o srednjoj vrijednosti dobijamo

$$E_1(f) = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x, \quad a < \xi < b,$$

a kako je

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x = -\frac{(b-a)^3}{6},$$

na kraju grešku trapezne formule računamo po sljedećoj formuli

$$E_1(f) = -\frac{f''(\xi)}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{6} = -f''(\xi)\frac{h^3}{12}. \tag{4.27}$$

Trapezna formula tačna je za sve polinome stepena ne većeg od 1, tj. stepen tačnosti joj je 1 kao i kod formule pravougaonika.

U cilju smanjenja greške možemo podijeliti segment $[a,b]$ i koristiti uopštenu trapeznu formulu. Neka su čvorovi tačke $x_i = a + ih$, $i = 0,1,\ldots,m$, gdje je $h = \frac{b-a}{m}$, sada na svakom dobijenom podsegmentu $[x_i, x_{i+1}]$ aproksimirajmo funkciju f sa Lagrangeovim interpolacionim polinomom prvog stepena. Kako je po (4.26)

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})],$$

to vrijedi

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{m-1}\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] = I_{1,m}(f),$$

pa uopštena trapezna formula

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{m-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})]. \tag{4.28}$$

Prethodnu formulu možemo pisati i u obliku

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{m-1}) + \frac{1}{2}f(x_m)\right], \tag{4.29}$$

odakle se vidi da je ovo kvadraturna formula oblika (4.19), gdje su $\alpha_0 = \alpha_m = \frac{1}{2}$ i $\alpha_i = h$, $i = 1,2,\ldots,m-1$.

Greška uopštene trapezne formule na segmentu $[a,b]$ je zbir grešaka trapeznih formula na segmentima $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,m-1$, pa za $f \in C^2[a,b]$ dobijamo

$$E_{1,m}(f) = I(f) - I_{1,m}(f) = -\sum_{i=0}^{m-1}\frac{h^3}{12}f''(\xi_i), \quad x_i < \xi_i < x_{i+1}.$$

Postupajući na isti način kao i pri izvođenju formule (4.25) dobijamo grešku uopštene trapezne formule

$$E_{1,m}(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \quad a \leqslant \xi \leqslant b, \tag{4.30}$$

kao i procjena greške

$$|E_{1,m}| \leqslant M_2 \frac{(b-a)h^2}{12}, \quad \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leqslant M_2. \tag{4.31}$$

Red greške je reda $\mathcal{O}\left(h^2\right)$, dok je stepen tačnosti 1.

4.4 Simpsonovo pravilo

Simpsonovo pravilo ili formulu dobijamo na taj način tako što funkciju f na segmentu $[a,b]$ aproksimiramo interpolacionim polinomom stepena 2. Za čvorove interpolacije uzimamo $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ i $x_2 = b$. Polinom p_2 dobijamo koristeći formulu (2.16), te je

$$\begin{aligned} p_2(x) =& f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) \\ =& f(a)\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)} + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} + f(b)\frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}, \end{aligned}$$

poslije računanja prethodnog integrala, dobijamo

$$I_2(f) = \int_a^b p_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]. \tag{4.32}$$

Kvadraturna formula

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \tag{4.33}$$

naziva se Simpsonova formula.

Ako uvedemo $\frac{b-a}{2} = h$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{b+a}{2}$, $x_2 = b$ dobijamo sljedeći oblik Simpsonove formule

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]. \tag{4.34}$$

Pretpostavimo sada da je $f \in C^4[a,b]$. Da bi odredili grešku Simpsonove formule (4.34) koristićemo sljedeću notaciju $x_1 - h = x_0$, $x_2 = x_1 + h$, vrijedi

$$E_2(f) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{h}{3}[f(x_1-h) + 4f(x_1) + f(x_1+h)], \tag{4.35}$$

te funkciju E_2 smatraćemo funkcijom koraka h, tj. $E(h) = E_2(f)$. Diferencirajući E_2 tri puta, po h, dobijamo

$$\begin{aligned} E'(h) =& \frac{2}{3}[f(x_1-h) + f(x_1+h)] - \frac{4}{3}f(x_1) - \frac{h}{3}\left[-f'(x_1-h) + f'(x_1+h)\right] \\ E''(h) =& \frac{1}{3}\left[-f'(x_1-h) + f'(x_1+h)\right] - \frac{h}{3}\left[f''(x_1-h) + f''(x_1+h)\right] \\ E'''(h) =& -\frac{h}{3}\left[f'''(x_1+h) - f'''(x_1-h)\right]. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Koristeći Lagrangeovu teoremu za E''', dobijamo

$$E'''(h) = -\frac{2h^2}{3} f^{(4)}(\xi_1), \tag{4.37}$$

gdje je $\xi_1 = \xi_1(h) \in [x_1 - h, x_1 + h]$. Iz (4.36) možemo primijetiti da je $E(0) = E'(0) = E''(0) = 0$. Kako je

$$\int_0^h E'''(t)\,\mathrm{d}t = E''(h) - E''(0) = E''(h),$$

te koristeći (4.37) i Teoremu o srednjoj vrijednosti za integrale, dobijamo

$$\begin{aligned} E''(h) &= \int_0^h E'''(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^h \frac{2t^2}{3} f^{(4)}(\xi_1(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2}{3} f^{(4)}(\xi_2) \int_0^h t^2\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{9} h^3 f^{(4)}(\xi_2), \end{aligned}$$

gdje je $\xi_2 = \xi_2(h) \in (x_1 - h, x - 1 + h)$. Na sličan način dobijamo

$$E'(h) = \int_0^h E''(h)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{9}\int_0^h t^3 f^{(4)}(\xi_2(t)\,\mathrm{d}t) = -\frac{h^4}{18} f^{(4)}(\xi_3),$$

gdje je $\xi_3 = \xi_3(h) \in (x_1 - h, x_1 + h)$, te i

$$E(h) = \int_0^h E'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{18}\int_0^h t^4 f^{(4)}(\xi_3(t)) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi),$$

gdje je je $\xi \in (x_1 - h, x_1 + h) = (a, b)$.

Pa je greška Simpsonove kvadraturne formule

$$E_2(f) = I(f) - I_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi),\ \xi \in (a, b). \tag{4.38}$$

Da bi dobili Simpsonovu uopštenu formulu, podijelimo segment $[a, b]$, čvorovima $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, 2m$, vrijedi $h = \frac{b-a}{2m}$. Sada ćemo na svakom podsegmentu $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, $i = 0, \ldots, m-1$ aproksimirati funkciju f njenim Lagrangeovim interpolacionim polinomom p_2 (stepena 2), formiranim na osnovu čvorova x_{2i}, x_{2i+1} i x_{2i+2}. Kako prema (4.33) vrijedi

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})],$$

te je

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\approx \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{3}[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] = I_{2,m}(f), \end{aligned}$$

pa je uopštena Simpsonova formula

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{m-1} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})]. \tag{4.39}$$

Greška uopštene Simpsonove formule predstavlja zbir grešaka Simpsonove formule na podsegmentima $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, $i = 0, 1, \dots, m-1$. Ako je $f \in C^4[a,b]$, tada je zbog (4.38)

$$E_{2,m}(f) = I(f) - I_{2,m}(f) = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i),\ \xi_i \in (x_{2i}, x_{2i+2}).$$

Ako uzmemo u obzir da je $\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} f^{(4)}(\xi_i) = f^{(4)}(\xi)$, gdje je $\xi \in [a,b]$ i ako je $mh = \frac{b-a}{2}$, dobijmo grešku uopštene Simpsonove formule

$$E_{2,m}(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi). \tag{4.40}$$

Stepen tačnost uopštene Simpsonove formule je 3. A kako je

$$|E_{2,m}(f)| \leqslant M_4 \frac{b-a}{180} h^4, \quad \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)| \leqslant M_4, \tag{4.41}$$

greška uopštene Simpsonove formule je reda $\mathcal{O}\left(h^4\right)$.

4.5 Newton–Cotesove formule

Prethodna formule (pravila) su specijalni slučajevi Newton–Cotesovih formula. Postoje dva tipa ovih formula, Newton–Cotesove zatvorene i otvorene formule.

Neka su čvorovi interpolacije $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$ ekvidistantno raspoređeni, tj. segment $[a,b]$ podijeljen je na n jednakih podsegmenata dužine h, gdje je $h = \frac{b-a}{n}$ i $x_0 = a$, $x_n = b$. Formula se naziva zatvorena pošto su krajnje tačke segmenta $[a,b]$ takođe čvorovi. Tražena formula ima oblik

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i), \tag{4.42}$$

gdje je

$$a_i = \int_{x_0}^{x_n} l_i(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,\mathrm{d}x.$$

U sljedećoj teoremi data je greška Newton–Cotesove formule.

Teorema 4.5.1 Pretpostavimo da je $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ zatvorena Newton-Cotesova formula, gdje je $x_0 = a$, $x_n = b$ i $h = \frac{b-a}{n}$. Tada postoji $\xi \in (a,b)$ za koje je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)\,\mathrm{d}t,$$

ako je n parno i $f \in C^{n+2}[a,b]$, i

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)\cdot(t-n)\,\mathrm{d}t,$$

ako je n neparno i $f \in C^{n+1}[a,b]$.

Dokaz. Može se vidjeti u Issacson [6, str. 313]. ■

N Primjetimo kada je n parno, stepen tačnosti je $n+1$, iako je interploacioni polinom stepena najviše n. U slučaju kada je n neparno, stepen tačnosti je n.

Ponovimo dvije i navedimo nove dvije zatvorene Newton-Cotesove formule sa pripadajućim greškama

n=1: Trapezoidno pravilo

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f''(\xi), \quad \text{gdje je} \quad x_0 < \xi < x_1, \tag{4.43}$$

n=2: Simpsonovo pravilo

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \quad \text{gdje je} \quad x_0 < \xi < x_2, \tag{4.44}$$

n=3: Simpsonovo 3–8 pravilo

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)] - \frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi), \quad \text{gdje je} \quad x_0 < \xi < x_3, \tag{4.45}$$

n=4: Boolevo pravilo

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2h}{45}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)]+32f(x_3)+7f(x_4) - \frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi), \quad \text{gdje je} \quad x_0 < \xi < x_4. \tag{4.46}$$

Otvorene Newton-Cotesove formule dobijamo koristeći čvorove $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, gdje je $h = \frac{b-a}{n+2}$ i $x_0 = a+h$. Zbog ovoga je $x_n = b-h$, pa ćemo označiti krajnje tačke sa $x_{-1} = a$ i $x_{n+1} = b$. Dakle, otvorena formule ne sadrže krajnje tačke segmenta $[a,b]$. Vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i), \tag{4.47}$$

gdje je ponovo

$$a_i = \int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vrijednost greške otvorene Newton–Cotesove formule data je u sljedećoj teoremi

Teorema 4.5.2 Pretpostavimo da je $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ otvorena Newton–Cotesova formula, gdje je $x_{-1} = a$, $x_{n+1} = b$ i $h)\frac{b-a}{n+2}$. Tada postoji $\xi \in (a,b)$ za koje je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_{-1}^{n+1} t^2(t-1)\cdots(t-n)\,\mathrm{d}t, \tag{4.48}$$

ako je n parno i $f \in C^{n+2}[a,b]$, i

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{-1}^{n+1} t(t-1)\cdots(t-n)\,\mathrm{d}t, \tag{4.49}$$

ako je n neparno i $f \in C^{n+1}[a,b]$.

Dokaz. Može se vidjeti u Issacson [6, str. 313]. ∎

Vrijede sljedeće otvorene Newton–Cotesove formule

n=0: Pravougaono pravilo (pravilo srednje tačke)

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi), \quad \text{gdje je} \quad x_{-1} < \xi < x_1, \tag{4.50}$$

n=1:

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi), \quad \text{gdje je} \quad x_{-1} < \xi < x_2, \tag{4.51}$$

n=2:

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4h}{3}[2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x-2)] - \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi), \quad \text{gdje je} \quad x_{-1} < \xi < x_3, \tag{4.52}$$

n=3:

$$\int_{x_{-1}}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5h}{24}[11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] + \frac{95h^5}{144} f''(\xi), \quad \text{gdje je} \quad x_{-1} < \xi < x_4. \tag{4.53}$$

4.6 Rombergov metod

Osnovna ideja Rombergove metode je u tome da se pomoću formula manje tačnosti dobije rezultat veće tačnosti. Koristi se sljedeća Euler–MacLaurinova formula

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(f(x_n) - f(x_0)) + \frac{h}{12}(f'(x_n) - f'(x_0)) - \frac{h^3}{720}(f'''(x_n) - f'''(x_0)) + \cdots \tag{4.54}$$

Ova formula se može prikazati u drugom obliku

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right) \\ - \frac{h^2}{12}(f'(x_n) - f'(x_0)) + \frac{h^4}{720}(f'''(x_n) - f'''(x_0)) - \cdots\end{aligned} \tag{4.55}$$

Prvi sabirak na desnoj strani ove jednakosti je približna vrijednost integrala dobijena po trapeznom pravilu, koje će u nastavku biti označeno sa $T_n^{(0)}$. Formulu možemo napisati i u sljedećem obliku

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = T_n^{(0)} + \alpha_2 h^2 + \alpha_4 h^4 + \alpha_6 h^6 + \cdots, \tag{4.56}$$

gdje su α_2, α_4, $\alpha_6,\ldots$ konstante nezavisne od koraka h. Više o Euler–MacLaurinovoj formuli može se vidjeti u npr. Tošić [10, str.107–110])

Neka treba numerički izračunati integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.57}$$

Podijelimo segment $[a,b]$ sa čvorovima $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$, dužina svakog podsegmenta je $h_n = \frac{b-a}{n}$. Primjenom uopštene trapezne kvadraturne formule vrijedi

$$I(f) = \frac{h_n}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + f(x_n)] + E(h_n),$$

odnosno

$$I(f) = T_n^{(0)} + E(h_n), \tag{4.58}$$

gdje je $E(h_n)$ greška, a $T_n^{(0)}$ približna vrijednost integrala (4.57). Za grešku $E(h_n)$, na osnovu Euler–MacLaurinove formule (4.56), vrijedi

$$E(h_n) = \alpha_2 h_n^2 + \alpha_4 h_n^4 + \alpha_6 h_n^6 + \cdots,$$

tj. greška je reda h_n^2 i koeficijenti α_2, $\alpha_4,\ldots$, ne zavise od dužine koraka. Pa možemo pisati

$$I(f) = T_n^{(0)} + E(h_n). \tag{4.59}$$

Ako sada povećamo broj tačaka, tako da je nova dužina koraka $h_{2n} = \frac{h_n}{2} = \frac{b-a}{2n}$, vrijediće

$$I(f) = T_{2n}^{(0)} + E(h_{2n}) = T_n^{(0)} + E\left(\frac{h_n}{2}\right),$$

gdje je

$$E(h_{2n}) = E\left(\frac{h_n}{2}\right) = \alpha_2\frac{h_n^2}{4} + \alpha_4\frac{h_n^4}{16} + \alpha_6\frac{h_n^6}{64} + \cdots$$

Oduzmimo sada od jednakosti (4.59) jednakost (4.58) tako se eliminišu izrazi sa α_2, poslije sređivanja dobijamo

$$I(f) = \frac{4\cdot T_{2n}^{(0)} - T_n^{(0)}}{3} + \beta_4 h_n^4 + \beta_6 h_n^6 + \cdots, \tag{4.60}$$

odnosno

$$I(f) = T_{2n}^{(1)} + \beta_4 h_n^4 + \beta_6 h_n^6 + \cdots \tag{4.61}$$

Iz posljednje relacije vidimo da je sada greška reda h_n^4. Ponovimo sada postupak, tj. ponovo smanjimo dužinu koraka na isti način, $h_{4n} = \frac{h_{2n}}{2} = \frac{b-a}{4n}$, te je

$$\begin{aligned} I(f) =& T_{4n}^{(1)} + \beta_4\frac{h_n^4}{16} + \beta_6\frac{h_n^6}{64} + \cdots, \\ I(f) =& T_{2n}^{(1)} + \beta_4 h_n^4 + \beta_6 h_n^6 + \cdots \end{aligned}$$

Eliminacijom β_4 iz posljednje dvije jednakosti dobijamo

$$I(f) = \frac{16\cdot T_{4n}^{(1)} - T_{2n}^{(1)}}{15} + \gamma_6 h_n^6 + \gamma_8 h^8 + \cdots = T_{4n}^{(2)} + \gamma_6 h_n^6 + \beta_8 h_n^8 + \cdots \tag{4.62}$$

Greška kvadraturne formule $\frac{16T_{4n}^{(1)}-T_{2n}^{(1)}}{15}$ je reda h_n^6. Nastavljajući opisani postupak dolazimo do Rombergovih formula

$$T_{2^k n}^{(m)} = \frac{4^m \cdot T_{2^k n}^{(m-1)} - T_{2^{k-1}n}^{(m-1)}}{4^m - 1}, \tag{4.63}$$

gdje je $m = 1, 2, \ldots$ i $k = 1, 2, \ldots$

Određivanje numeričke vrijednosti integrala (4.57) svodi se na formiranje tabele u čijoj se prvoj koloni nalaze približne vrijednsoti dobijene primjenom uopštene trapezne formule n, $2n$, $4n$, … broj podsegmenata. U drugoj, trećoj, itd. koloni nalaze se približne vrijednosti dobijene pomoću Rombergovih formula (4.63). Prethodno opisani postupak dat je u sljedećoj tabeli

$$\begin{array}{ccccc}
T_n^{(0)} & & & & \\
 & T_{2n}^{(1)} & & & \\
T_{2n}^{(0)} & & T_{4n}^{(2)} & & \\
 & T_{4n}^{(1)} & & T_{8n}^{(3)} & \cdots \\
T_{4n}^{(0)} & & T_{8n}^{(2)} & & \\
 & T_{8n}^{(1)} & & & \\
T_{8n}^{(0)} & & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Tablica 4.1: Šema za Rombergovu metodu

4.7 Zadaci za vježbu

(1) Koristeći pravilo pravougaonika izračunati sljedeće integrale sa tačnošću 10^{-3}

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$; (b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; (c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

(2) Koristeći trapezno pravilo izračunati sljedeće integrale sa tačnošću 10^{-3}

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; (b) $\int_1^2 x\ln x\,dx$; (c) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$; (d) $\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx$; (e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x}\,dx$.

(3) Koristeći Simpsonovo pravilo izračunati sljedeće integrale sa tačnošću 10^{-3}

(a) $\int_0^{0.2} \cos\frac{\pi x^2}{2}\,dx$; (b) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$; (c) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$; (d) $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-0.25x^2)}}\,dx$.

(4) Razni zadaci (koristiti prethodna pravila i razne tačnosti)

(a) $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-0.75x^2)}}$; (b) $\int_0^{0.5} \cos\frac{x^2}{4}\,dx$; (c) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$;

(d) $\int_0^{0.5} \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{x}\,dx$; (e) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-0.25\sin^2 x}\,dx$; (f) $\int_0^{0.5} \sqrt{\frac{1-0.25x^2}{1-x^2}}\,dx$;

(g) $\int_0^{0.5} \sqrt{\frac{1-0.75x^2}{1-x^2}}\,dx$; (h) $\int_0^1 \sqrt{x}\sin x\,dx$; (i) $\int_0^1 \sqrt{x}\cos x\,dx$; (j) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+x+\sin x}\,dx$;

(k) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{\cos x}}$; (l) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{\ln x}}$; (m) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$; (n) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$;
(o) $\displaystyle\int_0^1 e^{-5x^2+x+0.5}\,\mathrm{d}x$; (p) $\displaystyle\int_0^1 e^{-4x^3+2x+1}\,\mathrm{d}x$; (q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x+1}\,\mathrm{d}x$;
(r) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$; (s) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0.5\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

5. ODJ - Cauchyevi i rubni problemi

Veoma često se nailazi na diferencijalne jednačine koje se ili ne mogu elementarno riješiti ili bi računanje elementarnog rješenja bilo prekomplikovano. U ovakvim slučajevima pribjegava se računanju numeričkog rješenja. U nastavku ovog poglavlja biće razmatrane numeričke metode, čijom primjenom na rješavanje diferencijalnih jednačina sa zadanim početnim ili rubnim uslovima, dobijamo aproksimativne vrijednosti nepoznate funkcije u zadanim čvorovima. Drugim riječima dobijamo tabelerno zadanu funkciju. Prvo ćemo se baviti sljedećim problemom.

Neka je zadana funkcija $f(x,y)$, treba odrediti funkciju $y(x)$, $x \in [x_0, X]$, koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$y' = f(x,y), \tag{5.1}$$

uz početni uslov

$$y(x_0) = y_0. \tag{5.2}$$

Problem (5.1)–(5.2) nazivamo Cauchyjev[1] ili inicijalni problem[2].

Za numeričku metodu za približno rješavanje Cauchyjevog problema, kažemo da je jednokoračna, ako za svako $i \geqslant 0$ omogućava određivanje aproksimacije y_{i+1} samo na osnovu poznate približne vrijednosti y_i. U slučaju kada za određivanje približne vrijednosti u čvoru x_i, koristimo približne vrijednosti u čvorovima $x_{i-m+1}, x_{i-m+2}, \ldots, x_{i-1}, x_i$ $(m > 0)$, onda za takvu metodu kažemo da je višekoračna.

Takođe, numeričke metode za numeričko rješavanje inicijanih problema možemo podijeliti na eksplicitne i implicitne. Za numeričku metode, kažemo da je eksplicitna ako se y_{i+1} može izračunati direktno korištenjem jedne ili više vrijednosti y_j, $j \leqslant i$, u protivnom metoda je implicitna.

[1] Augustin–Louis Cauchy (21. avgust 1789.–23. maj 1857.godine), bio je francuski matematičar i fizičar. Dao veliki doprinos u mnogim oblastima matematike.

[2] eng. initial value problem (IVP)

5.1 Eulerova metoda

5.1.1 Eulerova eksplicitna metoda

Pretpostavimo da je funkcija f neprekidna po x, tada za rješenje Cauchyjevog problema (5.1)–(5.2), vrijedi

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t. \tag{5.3}$$

Obrnuto, ako je y funkcija koja zadovoljava (5.3), tada je ona diferencijabilna na $[x_0, X]$ i za nju važi (5.1)–(5.2). Drugim riječima, ako je funkcija f neprekidna na $[x_0, X]$, tada Cauchyjev problem (5.1)–(5.2) ekvivalentan integralnoj jednačini (5.3). Ako sada u (5.3) prvo uvrstimo $x = x_{i+1}$, a zatim $x = x_i$, te oduzmemo jednu od druge dobijene jednakosti dobijamo

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t. \tag{5.4}$$

Ako nam je vrijednost $y(x_i)$ poznata, mogli bismo prethodnu relaciju iskoristiti za računanje $y(x_{i+1})$, naravno uz pretpostavku da znamo izračunati integral u pomenutoj relaciji. Kako nije poznat analitički oblik funkcije y, to ovaj integral možemo samo numerički riješiti. Iskoristimo varijantu pravougaonog pravila za numeričko rješavanje integrala u (5.4)

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \approx f(x_i, y(x_i)) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathrm{d}x = f(x_i, y(x_i))(x_{i+1} - x_i),$$

i ako je $h = x_{i+1} - x_i$ (rastojanje između čvorova je ekvidistantno), dobijamo

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)). \tag{5.5}$$

Opisani postupak možemo iskoristiti, numeričko rješavanje Cauchyjevog problema (5.1)–(5.2), dakle

$$y_0 = y(x_0) \tag{5.6}$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y(x_i)), \quad i = 0, 1, \ldots \tag{5.7}$$

gdje je $y_i \approx y(x_i)$. Ovo je Eulerova eksplicitna metoda. Polazeći od početne vrijednosti y_0, korištenjem ove metode dobijamo vrijednsoti $y_1, y_2, \ldots$, a koje predstavljaju približno rješenja problema (5.1)–(5.2) u čvorovima mreže, tj. rješenja se dobija u obliku tabele. Inače ova metoda se rijetko koristi. Kada korak h nije veoma mali greška se brzo akumulira. Zato metoda ima teorijski značaj i proučava se najviše iz istorijskih razloga.

5.1.2 Poboljšana Eulerova metoda

Ako sada za numeričko računanje integrala $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$, umjesto korištene varijante, iskoristimo sljedeće pravilo pravougaonika

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \approx hf(x_{i+1/2}, y(x_{i+1/2})), \tag{5.8}$$

gdje je

$$x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2} \text{ odonosno } x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2},$$

dobijamo

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_{i+1/2}, y(x_{i+1/2})). \tag{5.9}$$

Koristeći sada prethodnu relaciju, dobijamo novu numeričku metodu za rješavanje Cauchyjevog problema (5.1)–(5.2)

$$y_0 = y(x_0) \tag{5.10}$$

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \tag{5.11}$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1/2}, y(x_{i+1/2})),\ i = 0, 1, \dots \tag{5.12}$$

Ovo je poboljšana Eulerova metoda. Neka je poznata vrijednost y_i, do vrijednosti y_{i+1} dolazimo u dva koraka. Prvo, izračunamo $y_{i+1/2}$ primjenom Eulerove eksplicitne metoda sa korakom $\frac{h}{2}$, a zatim korištenjem ove vrijednosti računamo y_{i+1}.

5.2 Runge-Kutta metodi

Metode Runge–Kutta[3] spadaju u red najčešće korištenih metoda za rješavanje Cauchyjevih problema. Runge-Kutta metoda prvog reda poklapa se sa Eulerovom eksplicitnom metodom. Zato će postupak dobijanja Runge–Kutteovih formula biti pokazan za metode drugog reda. Poslije će biti dat pregled najčešće korištenih Runge–Kutteovih metoda u praksi.

5.2.1 Runge–Kuttaove metode drugog reda

Posmatrajmo ponovo Cauchyjev inicijalni problem (5.1)–(5.2). Neka je $x_k = x_0 + kh$. Hoćemo da aproksimativnu vrijednost koja odgovara čvoru x_{i+1}, dobijemo na sljedeći način

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2, \tag{5.13}$$

gdje su

$$k_1 = h f(x_i, y_i), \quad k_2 = h f(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1). \tag{5.14}$$

Potrebno je odrediti parametre a_1, a_2, α i β, tako da se desna strana jednakosti (5.13) poklopi sa Taylorovim razvojem $y(x_{i+1})$ do člana što je moguće višeg reda.

N Sa $y(x_{i+1})$ označeno je vrijednost tačnog rješenja u čvoru x_{i+1}, dok je sa y_{i+1} označena vrijednost aproksimativnog rješenja takođe u čvoru x_{i+1}.

Za $y(x_{i+1}) = y(x_i + h)$ vrijedi razvoj

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!} h + \frac{y''(x_i)}{2!} h^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!} h^3 + \cdots \tag{5.15}$$

Kako je $y'(x) = f(x, y)$ i pravila o složenom izvode višeg reda, to (5.15) možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) = y(x_i) + fh + \frac{1}{2!}(f_x + f_y f)h^2 \\ + \frac{1}{3!}(f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_x f_y + f_y^2 f)h^3 + \cdots, \end{aligned} \tag{5.16}$$

pri čemu je radi jednostavnosti zapisa izostavljeno $(x_i, y(x_i))$ kod funkcije f i njenih parcijalnih izvoda. Sa druge strane je

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 = y_i + a_1 k_1 + a_2 h f(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1) \\ &= y_i + a_1 k_1 + a_2 h \left[f + f_x \alpha h + f_y \beta k_1 + \frac{1}{2!}\left(f_{xx} \alpha^2 h^2 + 2 f_{xy} \alpha h \beta k_1 + f_{yy} \beta^2 k_1^2 \right) + \cdots \right]. \end{aligned} \tag{5.17}$$

[3] Martin Wilhelm Kutta (3. novembar 1867.–25.12.1944.godine), bio je njemački matematičar.

Ako sada izraz za k_1 iz (5.14) uvrstimo u posljednju jednakost i desnu stranu grupišemo po stepenima koraka h, dobijamo

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 + a_2)fh + a_2(\alpha f_x + \beta f_y f)h^2 \\ + \frac{1}{2}(f_{xx}\alpha^2 + 2f_{xy}f\alpha\beta + f_{yy}f^2\beta^2)a_2h^3 + \cdots \quad (5.18)$$

Sada upoređujući desne strane u jednakostima (5.16) i (5.18) i izjednačavajući koeficijente uz h i h^2, dobijamo sistem jednačina

$$a_1 + a_2 = 1, \quad \alpha a_2 = \frac{1}{2} \quad \beta a_2 = \frac{1}{2}. \quad (5.19)$$

Izraze uz h^3 iz (5.16) i (5.18) ne možemo izjednačiti. Preostaje da se riješi sistem (5.19). Sistem ima 3 jednačine i 4 nepoznate. Sljedeća rješenja se najčešće koriste.

1.

$$\begin{aligned} &a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \beta = 1, \\ &y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ &k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1) \end{aligned} \quad (5.20)$$

2.

$$\begin{aligned} &a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{3}{4}, \quad \alpha = \beta = \frac{2}{3}, \\ &y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2) \\ &k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf\left(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}k_1\right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

3.

$$\begin{aligned} &a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2}, \\ &y_{i+1} = y_i + k_2 \\ &k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Formule (5.20)–(5.22) pripadaju Runge–Kutteovim metodama drugog reda koji se poklapaju sa Taylorovim razvojem sve do članova uz h^2 i ove formule imaju red greške h^3.

5.2.2 Runge-Kutta metode trećeg reda

Na sličan način izvode se i formule za metode trećeg reda. Aproksimativnu vrijednost u čvoru x_{i+1} računaćemo po formuli

$$y_{i+1} = y_i + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3.$$

Sljedeće dvije formule se najčešće koriste

1.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3) \tag{5.23}$$
$$k_1 = hf(x_i, y_i),$$
$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_2\right) \tag{5.24}$$

2.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \tag{5.25}$$
$$k_1 = hf(x_i, y_i),$$
$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = hf(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2). \tag{5.26}$$

Greška je reda h^4.

5.2.3 Runge–Kutta metode četvrtog stepena

Za Runge–Kutta metode četvrtog stepena polazi se od jednakosti

$$y_{i+1} = y_i + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4,$$

gdje su

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21}k_1)$$
$$k_3 = hf(x_i + \alpha_3 h, y_i + \beta_{31}k_1 + \beta_{32}k_2)$$
$$k_3 = hf(x_i + \alpha_4 h, y_i + \beta_{41}k_1 + \beta_{42}k_2 + \beta_{43}k_3).$$

Potom se na sličan način računaju koeficijenti α_i i $\beta_{i,j}$.

5.3 Višekoračne metode

Neka su poznate aproksimativne vrijednosti $y_{i-m+1}, y_{i-m+2}, \dots, y_{i-1}, y_i$ Cauchyjevog problema

$$y'(x) = f(x,y),\ x \in [x_0, X], \tag{5.27}$$
$$y_0 = y(x_0), \tag{5.28}$$

u čvorovima mreže $x_{i-m+1}, x_{i-m+2}, \dots, x_{i-1}, x_i$. Na osnovu ovih aproksimativnih vrijednosti posmatranog Cauchyjevog problema možemo izračunati interpolacioni polinom funkcija f stepena $m-1$

$$p_{m-1}(x) = f(x_i, y_i)l_0(x) + \dots + f(x_{i-m+1}, y_{i-m+1})l_{m-1}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{i-j}, y_{i-j})l_j(x), \tag{5.29}$$

gdje je $l_j(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})\cdots(x-x_{i-j+1})(x-x_{i-j-1})\cdots(x-x_{i-m+1})}{(x_{i-j}-x_i)(x_{i-j}-x_{i-1})\cdots(x_{i-j}-x_{i-j+1})(x_{i-j}-x_{i-j-1})\cdots(x_j-x_{i-m+1})}$.

Za rješenje Cauchyjevog problema (5.27)-(5.28) vrijedi jednakost

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t. \tag{5.30}$$

Ako iskoristimo

$$f(x, y(x)) \approx p_{m-1}(x),\ x \in [x_i, x_{i+1}], \tag{5.31}$$

dobijamo

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_{m-1}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5.32}$$

odnosno

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{i-j}, y_{i-j}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} l_j(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.33}$$

Iz posljednje relacije dobijamo

$$y_{i+1} \approx y_i + \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{i-j}, y_{i-j}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} l_j(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5.34}$$

koji možemo pisati u obliku

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j f_{i-j}, \quad i = m-1, m, \ldots, n-1, \tag{5.35}$$

gdje je

$$\alpha_j = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} l_j(x)\,\mathrm{d}x, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{5.36}$$

i $f_k = f(x_k, y_k)$. Ovako dobijena m–koračna metoda naziva se eksplicitna Adamsova metoda ili Adams–Bashforthova metoda. Sada za različite vrijednosti m dobijamo različite metode, pa bi se prije moglo reći da ja sa (5.35)–(5.36) data familija metoda. Za $m = 1$ (5.35)–(5.36) se svodi na Eulerovu ekplicitnu metodu (5.6)–(5.8). Za $m = 2$ vrijedi

$$l_0(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad l_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i},$$

i

$$y_{i+1} = y_i + h(\alpha_0 f_i + \alpha_1 f_{i-1}).$$

Koeficijente α_0 i α_1 računamo na sljedeći način

$$\begin{aligned}
\alpha_0 =& \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{2}(x - x_{i-1})^2 \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \\
=& \frac{1}{2h^2}[(x_{i+1} - x_{i-i})^2 - (x_i - x_{i-1})^2] = \frac{1}{2h^2}(4h^2 - h^2) = \frac{3}{2}, \\
\alpha_1 =& \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2h^2}(x - x_i)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \\
=& -\frac{1}{2h^2}(h^2 - 0) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u (5.35) dobijamo dvokoračni eksplicitni Adamsovu metodu

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}), \quad i = 1,2,\ldots \tag{5.37}$$

Na sličan način za $m = 3$ i $m = 4$ dobijamo Adamsove metode

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}), \quad i = 2,3,\ldots \tag{5.38}$$

i

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}), \quad i = 3,4,\ldots \tag{5.39}$$

Ako pored čvorova interpolacije iskoristimo $x_{i-m+1}, x_{i-m+2}, \ldots, x_{i-1}, x_i$ i čvor x_{i+1}, možemo polinom

$$p_m(x) = \sum_{j=0}^{m} f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j}) l_j(x),$$

gdje je $l_j(x) = \frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)\cdots(x-x_{i+2-j})(x-x_{i-j})\cdots(x-x_{i-m+1})}{(x_{i+1-j}-x_{i+1})(x_{i+1-j}-x_i)\cdots(x_{i+1-j}-x_{i+2-j})(x_{i+1-j}-x_{i-j})\cdots(x_{i+1-j}-x_{i-m+1})}$, za dobijanje imlicitne verzije prethodno dobijene metode odnosno familija metoda.

Koristeći aproksimaciju

$$f(x, y(x))) \approx p_m(x), \quad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1},$$

iz (5.30) dobijamo

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \sum_{j=0}^{m} f(x_{i+1-j}, yi + 1 - j) \int_{x_i}^{x_{i+1}} l_j(x)\,\mathrm{d}x.$$

Iz prethodne jednakosti dobijamo numeričku metodu

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=0}^{m} f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} l_j(x)\,\mathrm{d}x,$$

koji se može napisati u obliku

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=0}^{m} \beta_j f_{i+1-j} \quad i = m-1, m, \ldots, \tag{5.40}$$

gdje je

$$\beta_j = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} l_j(x)\,\mathrm{d}x \quad j = 0,1,\ldots,m. \tag{5.41}$$

Ovaj m–koračni metod naziva se implicitni Adamsov ili Adams–Moultonov metod.
Za $m = 1$ na osnovu (5.40)–(5.41) vrijedi

$$y_{i+1} = y_i + h(\beta_0 f_{i+1} + \beta_1 f_i).$$

Koeficijente β_0 i β_1 računamo na sljedeći način

$$\beta_0 = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} = \frac{1}{h^2}\cdot\frac{1}{2}(x-x_i)^2\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{1}{2h^2}(h^2-0) = \frac{1}{2},$$
$$\beta_1 = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2h^2}(0-h^2) = \frac{1}{2},$$

te je

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_{i+1}+f_i), \quad i = 0,1,\dots. \tag{5.42}$$

Za $m=2$ vrijedi

$$l_0(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})},\ l_1(x) = \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i-1})},\ l_2(x) = \frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)}{(x_{i-1}-x_{i+1})(x_{i-1}-x_i)},$$

sada je prema (5.41)

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} l_0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})}{h\cdot 2h}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2h^3}\int_0^h t(t+h)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Na isti način se dobija i $\beta_1 = \frac{2}{3}$, $\beta_2 = -\frac{1}{12}$, pa je na osnovu (5.40) dobijamo

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5f_{i+1}+8f_i-f_{i-1}),\ i = 1,2,\dots \tag{5.43}$$

Za $m=3$ i $m=4$ dobijaju se sljedeće metode

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1}+19f_i-5f_{i-1}+f_{i-2}),\ i = 2,3,\dots \tag{5.44}$$

i

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720}(251f_{i+1}+646f_i-264f_{i-1}+106f_{i-2}-19f_{i-3}),\ i = 3,4,\dots \tag{5.45}$$

5.3.1 Prediktor–korektor metode

Prilikom korištenja implicitnih metoda javlja se rješavanje nelinearnih jednačina. Na primjer, ako bismo koristili sljedeću metodu

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})),$$

za određivanje aproksimativne vrijednosti Cauchyjevog problema u čvoru x_{i+1}, morali bi riješiti nelinearnu jednačinu

$$F(y_{i+1}) = 0,$$

gdje je

$$F(y_{i+1}) = y_{i+1} - y_i - \frac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})].$$

Da bismo odredili aproksimaciju y_{i+1} Cachyjevog problema u čvoru x_{i+1}, prvo izračunamo vrijednost y_{i+1} primjenom neke eksplicitne m – koračne metode, na primjer metodom (5.35)

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j f_{i-j}, \quad i = m-1, m, \ldots,$$

i dobijenu vrijednost označimo sa $y_{i+1}^{(0)}$ (Predictor). Zatim računamo vrijednost funkcije f u tački $(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)})$ (Evaluation)

$$f_{i+1}^{(0)} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}), \tag{5.46}$$

i na kraju aproksimativnu vrijednost $y_{i+1}^{(1)}$, koristeći (5.46), računamo nekom implicitnom m–koračnom metodom (Corrector), na primjer (5.40)

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=0}^{m} \beta_j f_{i+1-j} \quad i = m-1, m, \ldots,$$

5.4 Numeričko rješavanje rubnih problema

U prošlim podpoglavljima rješavali smo probleme početnih vrijednosti (IVP, Cauchyjev problem) za obične diferencijalne jednačine. Sada ćemo se baviti drugačijim numeričkim problemom. Problem određivanja rješenje diferencijalne jednačine drugog reda kod koje su poznate vrijednosti rješenja u dvije različite tačke (najčešće krajnje) naziva se rubni problem.

N Rubni problem se definiše i za diferencijalne jednačine višeg reda od 2, i u tim slučajevima koliko imamo proizvoljnih parametara toliko treba poznavati uslova. Osim poznavanja vrijednosti rješenja u krajnjim tačkama mogu biti zadane i vrijednosti izvode ili kombinacije vrijednosti izvoda i rješenja.

Primjer rubnog problema je

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \end{cases}.$$

Opšte rješenje ove diferencijalne jednačine ima dvije neodređene konstante, pa su potrebna dva uslova za određivanje ovih konstanti. U slučaju Cauchyjevog problema vrijednosti rješenja y i izvoda y' se daju za jednu vrijednost argumenta, međutim kod rubnih problema date su dvije tačke sa različitim vrijednostima argumenata kroz koje prolazi tražena integralna kriva $(0,1)$ i $\left(\frac{\pi}{2}, -3\right)$.

5.4.1 Opšti slučaj

Posmatrajmo sljedeći rubni problem

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{5.47}$$
$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{5.48}$$

Podijelimo segment $[a, b]$ ekvidistantno raspoređenim tačkama $x_0, x_1, \ldots, x_n$, takvim da je

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Vrijedi i

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Aproksimirajmo sada izvode y' i y'':

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h},$$
$$y''(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x) + y(x-h)}{h^2},$$

odnosno

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}, \tag{5.49}$$
$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2}. \tag{5.50}$$

Sada zamjenjujući y'', y' sa prethodnim aproksimacijama i koristeći

$$y(x_i) \approx y_i, \tag{5.51}$$

dobijamo

$$\begin{aligned} &y_0 = \alpha \\ &\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = F\left(x_i, y_i, \tfrac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1})\right), \, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ &y_n = \beta. \end{aligned} \tag{5.52}$$

Ovo je obično nelinearan sistem od $n-1$ nepoznate $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ (zavisi od funkcije f, ako je f nelinearna onda je i sistem), rješavanje ovakvog sistema rijetko je lako.

5.4.2 Linearni slučaj

U nekim slučajevima sistem (5.52) je linearan. Ovakva situacija se pojavljuje kada funkcija f oblika

$$F(x, y, y') = f(x) - b(x)y' - c(x)y,$$

pa rubni problem (5.47)–(5.48) postaje

$$y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \tag{5.53}$$
$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{5.54}$$

Koristeći ponovo aproksimacije (5.49)–(5.51) dobijamo

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + b_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + c_i y_i = f_i$$

ili

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{b_i}{2h}\right) y_{i-1} + \left(c_i - \frac{2}{h^2}\right) y_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{b_i}{2h}\right) y_{i+1} = f_i,$$

gdje su $b_i = b(x_i)$ i $c_i = c(x_i)$. Ako sada uvedemo oznake

$$r_i = \frac{1}{h^2} - \frac{b_i}{2h}, \quad s_i = c_i - \frac{2}{h^2}, \quad t_i = \frac{1}{h^2} + \frac{b_i}{2h}$$

dobijamo diferentnu shemu

$$r_i y_{i-1} + s_i y_i + t_i y_{i+1} = f_i,\ y_0 = \alpha,\ y_n = \beta,\ i = 1,2,\dots,n-1. \tag{5.55}$$

Diferentna shema (5.55) nam predstavlja šablon pomoću kojeg generišemo sistem linearnih algebarskih jednačina čijim rješavanjem dobijamo numeričke vrijednosti y_i, $i = 1,2,\dots,n-1$

$$\begin{aligned} s_1 y_2 + t_1 y_2 &= f_1 - r_1\alpha \\ r_2 y_1 + s_2 y_2 + t_2 y_3 &= f_2 \\ &\vdots \\ r_{n-1} y_{n-2} + s_{n-1} y_{n-1} &= f_{n-1} - t_{n-1}\beta. \end{aligned} \tag{5.56}$$

5.5 Zadaci za vježbu

1. Koristeći metode za rješavanje Cauchyjevog problema $y' = f(x,y)$, $y_0 = y(x_0)$, za razne korake $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.025$ izračunati aproksimativne vrijednosti y_i za date probleme.

   (a) $y' = \frac{1}{2}xy$, $y(0) = 1$, $x \in [0,1]$; (b) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0,1]$;
   (c) $y' = 1 + xy^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0,1]$; (d) $y' = \frac{y}{x+1} - y^2$, $y(0) = 1$, $x \in [0,1]$;
   (e) $y' = y^2 + \frac{1}{x^2}$, $y(1) = 1$, $x \in [1,2]$; (f) $y' = e^y + x^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$, $x \in [0,1]$;
   (g) $y' = \cos(x+y)$, $y(0) = 0$, $x \in [0,1]$; (h) $y' = x\ln y$, $y(1) = 1$, $x \in [1,2]$;
   (i) $y' = e^{-x} - y^2$, $y(0) = 1$, $x \in [0,1]$; (j) $y' = \sqrt{x} + y^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0,1]$;
   (k) $y' = \frac{\cos 2x}{3+y^2}$, $y(0) = 0$, $x \in [0,1]$.

2. Izračunati numerička rješenja u tačkama mreže datih rubnih problema za $n = 8, 16, 32$

   (a) $y'' - y'\cos x + y\sin x = f(x)$, $y(-\pi) = y(\pi) = 2$,
   $(i)\ f(x) = \cos x$; $(ii)\ f(x) = \sin x$; $(iii)\ f(x) = \cos 2x$.
   (b) $y'' - 2xy' + 2y = f(x)$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0.5$,
   $(i)\ f(x) = x$; $(ii)\ f(x) = 3x^2 + x - 1$; $(iii)\ f(x) = 5x^2 - 3x + x$.
   (c) $y'' + x^2y' - xy = f(x)$, $y(0) = y(1) = 0$,
   $(i)\ f(x) = e^x$; $(ii)\ f(x) = e^{x^2}$; $(iii)\ f(x) = \cos x$; $(iv)\ f(x) = \sin x$.
   (d) $y'' + y' - \frac{y}{x} = f(x)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$,
   $(i)\ f(x) = x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$; $(ii)\ f(x) = 8x^2 - 8x + \frac{3}{2}$; $(iii)\ f(x) = 4x^2 - x + \frac{3}{2}$.

6. Zadaci

6.1 Zadaci za seminarski

6.1.1 Interpolacija

1. Izračunati polinom koji interpolira funkciju $f(x) = \operatorname{arctg} x$ u 11 čvorova jednako udaljenih na segmentu $[1,6]$. Nacrtati grafike funkcije $f(x)$, dobijenog polinoma $p(x)$ i razlike $|f(x) - p(x)|$.

2. Interpolirati funkciju $f(x) = e^x$, polinomom stepena 10 na segmentu $[0,2]$. Nacrtati grafike funkcije $f(x)$, dobijenog polinoma $p(x)$ i razlike $|f(x) - p(x)|$.

3. Napisati program za rješavanje jednačine $f(x) = 0$ koristeći inverznu interpolaciju. Testirati program na sljedećem primjeru

$f(x)$	-0.05789200	-0.3626370	-0.1849160	-0.0340642	0.0969858
x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0

4. Odrediti interpolacioni polinom koristeći podatke iz tabele

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	2.001	3	4	5

5. Interpolirati funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ na segmentu $[-5,5]$ polinomom p stepena 20 (koristiti čvorove podjednako udaljene). Nacrtati grafike f i p.

6. Uraditi ponovo prethodni zadatak, samo u ovom slučaju koristiti Čebiševljeve čvorove (a) $x_i = 5\cos\frac{i\pi}{20}$, $0 \leqslant i \leqslant 20$; (b) $x_i = 5\cos\frac{(2i+1)\pi}{42}$, $0 \leqslant i \leqslant 20$.

7. Izračunati polinom stepena 13 koji interpolira funkciju $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na segmentu $[-1,1]$.

8. Interpolirati funkciju $f(x) = \arcsin x$ na segmentu $\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ polinomom stepena 15.

9. Neka je $f(x) = \max\{0, 1-x\}$. Izračunati interpolacioni polinom p stepena $2, 4, 8, 16$ i 32 stepena (koristiti ekvidistantno raspoređene čorove).

10. Izračunati interpolacioni polinom koji interpolira funkciju $f(x) = |x|$, koristiti (a) 11 ekvidistantnih čvorova; (b) 11 Čebiševljevih čvorova; Uporediti rezultate.

6.1.2 Spline interpolacija

1. Izračunati kubni prirodni spline koji interpolira funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ na segmentu $[-5,5]$, (koristiti 11 čvorova jednako raspoređenih).

2. Interpolirati funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, interpolacionim polinomom, a zatim kubnim prirodnim splineom. Nacrtati odgovarajuće grafike. Koristiti 7 čvorova jednako raspoređenih.

6.1.3 Rješavanje nel. jed. i sistema

Metoda polovljenja segmenta

1. Odrediti tačku presjeka krivih datih sa $y_1 = x^3 - 2x + 1$ i $y_2 = x^2$.
2. Izračunati približno rješenje jednačine $9x^4 + 18x^3 + 38x^2 - 57x + 14 = 0$.
3. Izračunati približno rješenje jednačine $\operatorname{tg} x = x$ na segmentu $[1,2]$.
4. Izračunati približno rješenje jednačine $6(e^x - x) = 6 + 3x^2 + 2x^3$ na segmentu $[-1,1]$.

Newtonova metoda

1. Izračunati približno rješenje jednačine $e^x - \sqrt{x+9} = 0$ na segmentu $[1,3]$.
2. Izračunati približno rješenje jednačine $\operatorname{tg} x = x$ na segmentu $[5,7]$.
3. Izračunati približno rješenje jednačine $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ na segmentu $[1,1.5]$.
4. Izračunati približno rješenje jednačine $2x(1 - x^2 + x)\ln x = x^2 - 1$ na segmentu $[0,1]$.

Proizvoljna metoda

1. Izračunati približno rješenje jednačine $e^x - 3x^2 = 0$ na segmentu $[-1,-0.5]$.
2. Izračunati približno rjevšenje jednačine $x^3 - 3x + 1 = 0$ na segmentu $[1,3]$.
3. Izračunati približno rješenje jednačine $x^3 - \sin x = 0$ na segmentu $[0,1]$.

6.1.4 Numerička integracija

1. Izračunati približnu vrijednost integrala $\int_0^\pi \sin x \, dx$, koristeći kompozitno (uopšteno) pravougaono pravilo, dijeleći $[0,\pi]$ na 10 jednakih dijelova.

2. Izračunati približnu vrijednost integrala $\int_0^1 e^x \, dx$, koristeći pravougaono pravilo, dijeleći $[0,1]$ na 10 jednakih dijelova.

3. Izračunati približnu vrijednost integrala $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx$, koristeći pravougaono pravilo, dijeleći $[0,1]$ na 10 jednakih dijelova.

4. Izračunati približnu vrijednost integrala $\int_0^\pi \sin x \, dx$, koristeći kompozitno (uopšteno) trapezoidno pravilo, dijeleći $[0,\pi]$ na 10 jednakih dijelova.

5. Izračunati približnu vrijednost integrala $\int_0^1 e^x \, dx$, koristeći trapezoidno pravilo, dijeleći $[0,1]$ na 10 jednakih dijelova.

6. Izračunati približnu vrijednost integrala $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx$, koristeći trapezoidno pravilo, dijeleći $[0,1]$ na 10 jednakih dijelova.

7. Izračunati približnu vrijednost integrala $\int_0^\pi \sin x \, dx$, koristeći kompozitno (uopšteno) Simpsonovo pravilo, dijeleći $[0,\pi]$ na 10 jednakih dijelova.

8. Izračunati približnu vrijednost integrala $\int_0^1 e^x \, dx$, koristeći Simpsonovo pravilo, dijeleći $[0,1]$ na 10 jednakih dijelova.

9. Izračunati približnu vrijednost integrala $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx$, koristeći Simpsonovo pravilo, dijeleći $[0,1]$ na 10 jednakih dijelova.

10. Dat je integral $\int_{1.3}^{2.19} x^{-1} \sin x \, dx$. Izračunati $T_{16}^{(1)}$, koristeći Rombergovu metodu.

11. Dat je integral $\int_0^{1/\sqrt{2}} (\sqrt{1-x^2} - x) \, dx$. Izračunati $T_{16}^{(1)}$, koristeći Rombergovu metodu.

12. Dat je integral $\int_0^{3.24} e^{-x} \sqrt{1-\sin x} \, dx$. Izračunati $T_{16}^{(1)}$, koristeći Rombergovu metodu.

6.1.5 Numeričko rješavanje ODJ

Jednokoračne metode

1. Koristeći Runge–Kutta metodu drugog reda izračunati približne vrijednosti y_i, tačnog rješenja y ako je $y' = 1 + \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$ na $[1,2]$ za vrijednosti $h = 2^{-n}$, $n = 3,4$.

2. Koristeći Runge–Kutta metodu drugog reda izračunati približne vrijednosti y_i, tačnog rješenja y ako je $y' = \frac{1}{y^2} - yx$, $y(1) = 1$ na $[1,2]$ za vrijednosti $h = 2^{-n}$, $n = 3,4$.

3. Koristeći Runge–Kutta metodu drugog reda izračunati približne vrijednosti y_i, tačnog rješenja y ako je $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2$, $y(1) = -1$ na $[1,2]$ za vrijednosti $h = 2^{-n}$, $n = 3,4$.

4. Koristeći Runge–Kutta metodu drugog reda izračunati približne vrijednosti y_i, tačnog rješenja y ako je $y' = e^x y^2 + e^3$, $y(1) = 1$ na $[1,2]$ za vrijednosti $h = 2^{-n}$, $n = 3,4$.

5. Koristeći Runge–Kutta metodu drugog reda izračunati približne vrijednosti y_i, tačnog rješenja y ako je $y' = y\sqrt{y^2 - 1}$, $y(0) = 1$ na $[0,1.6]$ za vrijednosti $h = 2^{-n}$, $n = 3,4$.

6. Koristeći Runge–Kutta metodu drugog reda izračunati približne vrijednosti y_i, tačnog rješenja y ako je $y' = yx + \sqrt{y^2 - 1}$, $y(0) = 1$ na $[0,1.6]$ za vrijednosti $h = 2^{-n}$, $n = 3,4$.

Višekoračne metode

1. Koristeći Adams–Moultonov metodu drugog reda izračunati približne vrijednosti y_i, tačnog rješenja y ako je $y' = e^y + \sin x$, $y(0) = 0.1$ na $[0,1]$ za vrijednosti $h = 2^{-n}$, $n = 3,4$.

2. Koristeći Adams–Moultonov metodu drugog reda izračunati približne vrijednosti y_i, tačnog rješenja y ako je $y' = y + xe^{-x}$, $y(0) = 0.1$ na $[0,1]$ za vrijednosti $h = 2^{-n}$, $n = 3,4$.

3. Koristeći Adams–Moultonov metodu drugog reda izračunati približne vrijednosti y_i, tačnog rješenja y ako je $y' = yx$, $y(0) = 0.1$ na $[0,1]$ za vrijednosti $h = 2^{-n}$, $n = 3,4$.

4. Koristeći Adams–Moultonov metodu drugog reda izračunati približne vrijednosti y_i, tačnog rješenja y ako je $y' = y^3(x^2 + 1)$, $y(0) = 0.1$ na $[0,1]$ za vrijednosti $h = 2^{-n}$, $n = 3,4$.

5. Koristeći Adams–Moultonov metodu drugog reda izračunati približne vrijednosti y_i, tačnog rješenja y ako je $y' = \cos y - e^x$, $y(0) = 0.1$ na $[0,1]$ za vrijednosti $h = 2^{-n}$, $n = 3,4$.

6. Koristeći Adams–Moultonov metodu drugog reda izračunati približne vrijednosti y_i, tačnog rješenja y ako je $y' = (1+y^3)(1+x^2)$, $y(0) = 0.1$ na $[0,1]$ za vrijednosti $h = 2^{-n}$, $n = 3,4$.

Rubni problemi

1. Za rubni problem $y'' = \frac{(1-x)y+1}{(1+x)^2}$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0.5$, izračunati približne vrijednosti y_i tačnog rješenja y za $h = 0.1$ i $h = 0.05$.

2. Za rubni problem $y'' = \frac{(2-x)e^{2y}}{3} + \frac{1}{3(1+x)}$, $y(0) = 0$, $y(1) = -\log 2$, izračunati približne vrijednosti y_i tačnog rješenja y za $h = 0.1$ i $h = 0.05$.

3. Za rubni problem $y'' = -y + xy' - 2x\cos x + x$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = \pi$, izračunati približne vrijednosti y_i tačnog rješenja y za $h = 0.1$ i $h = 0.05$.

4. Za rubni problem $y'' = \frac{2xy'-2y}{1+x^2}$, $y(0) = 1.25$, $y(4) = -0.95$, izračunati približne vrijednosti y_i tačnog rješenja y za $h = 0.1$ i $h = 0.05$.

5. Za rubni problem $y'' = -\frac{2y'}{x} + \frac{2y}{x^2} + \frac{10\cos(\ln x)}{x^2}$, $y(1) = 1$, $y(3) = -1$, izračunati približne vrijednosti y_i tačnog rješenja y za $h = 0.1$ i $h = 0.05$.

6. Za rubni problem $y'' = -\frac{y'}{x} - \frac{16y}{x^2} + \frac{1}{x^2}$, $y(1) = 0.75$, $y(7) = 0.3$, izračunati približne vrijednosti y_i tačnog rješenja y za $h = 0.1$ i $h = 0.05$.

Literatura

Knjige

[Atk14] K.E Atkinson. *An Introduction to Numerical Analysis*. Wiley & Sons, 2014. ISBN: 9788126518500 (cited on page 22).

[Bak77] N.S Bakhvalov. *Numerical Methods: Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations*. MIR, 1977. ISBN: 9780714712079 (cited on page 13).

[BF01] R.L. Burden and J.D. Faires. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole-Thompson Learning, Pacific Grove, USA, 2001 (cited on page 38).

[Čel08] M. Čelić. *Numerička matematika*. Glas srpski, Banjaluka, BiH, 2008. ISBN: 9789993837671 (cited on pages 29, 30).

[CK04] W. Cheney and D. Kincaid. *Numerical Mathematics and Computing*. Brooks/Cole-Thompson Learning, Belmont, USA, 2004 (cited on page 11).

[IK66] E. Issacson and H.B. Keller. *Analysis of numerical methods,* John Wiley & Sons, New York, 1966 (cited on pages 82, 83).

[Rad04] D. Radunović. *Numeričke metode*. Akademska misao, Beograd, 2004. ISBN: 8674661319 (cited on page 44).

[Sci15] R. Scitovski. *Numerička matematika*. Sveučilište Josipa Jurja Stossmayera u Osijeku, 2015. ISBN: 9789536931798. URL: http://www.mathos.unios.hr/images/homepages/scitowsk/Num-2015.pdf (cited on page 11).

[SB93] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag, Inc., 1993. ISBN: 038797878X (cited on page 37).

[Toš04] D.Đ. Tošić. *Uvod u numeričku analizu*. Akademska misao, Beograd, 2004. ISBN: 8674661548 (cited on page 84).

Radovi

Konferencije

Indeks