# Matematika 1

Nastavni materijal za predmet Matematika 1 na Odsjeku HIT, TF Tuzla,
i predmet Matematika 1 na Odsjeku hemija, PMF Tuzla

*Autor*
Samir Karasuljić

Email
samir.karasuljic@untz.ba
samir.karasuljic@gmail.com

Akademska 2017/18. godina

# Sadržaj

# Predgovor

Svrha pisanja ovog materijala je da olakša studenticama i studentima Odsjeka HIT na Tehnološkom fakultetu i studentima Odsjeka hemija Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli pripremu za polaganje ispita Matematika 1. Ovaj materijal ili predavanja napisana su na osnovu Ušćumlić i Miličić [6], Mitrinović, Mihailović i Vasić [5], Dedagić [2], Crnjac, Jukić i Scitovski [1], Jukić i Scitovski [3, 4]. Primjedbe, prijedlozi, uočene greške ☹, a i pohvale ☺ su dobrodošle i možete ih poslati na **samir.karasuljic@untz.ba** ili **samir.karasuljic@gmail.com**.

# Poglavlje 1

# Uvod

## 1.1 Matematička logika

U savremenoj matematici bitno mjesto zauzima jezik, odnosno korištenje jezika matematičke logike. Međutim veliku ulogu matematička logika ima i van same matematike. Značajna primjena je u kao u prirodnim naukama, tehničkim disciplinama i dr., npr. u radu računara, u teorijskoj kibernetici itd.

### Račun izkaza

Polazni objekti teorije iskaza nazivaju se elementarnim iskazima ili elementarnim sudovima. Uobičajeno se obilježavaju malim slovima $a$, $b$, $c$, $\ldots$ Pretpostavlja se da elementarni iskaz mora biti ili istinit (tačan) ili neistinit (netačan). Takođe, smatramo da postoji mogućnost da se provjeri da li je dati iskaz tačan ili netačan. U algebri iskaza obično se ne razmatra sam sadržaj iskaza, nego da li je iskaz tačan ili netačan. Dakle, pod iskazom podrazumijevamo smišljeno tvrđenje, koje ima svojstvo da može biti samo ili tačno ili netačno. Istinitost iskaza $p$ označava se sa grčkim slovom $\tau$, i vrijedi

$$\boxed{\tau(p) = \begin{cases} \top, \text{ako je iskaz } p \text{ tačan;} \\ \bot, \text{ako je iskaz } p \text{ netačan.} \end{cases}} \tag{1.1}$$

$\top$ se čita "te", a $\bot$ "ne te".

NAPOMENA 1.1.

Koristićemo i kvantifikatore $\forall$, $\exists$, $\exists!$.
Kvantifikator $\forall$ je univerzalni kvantifikator i znači "za svako";

$$(\forall x \in \mathbb{R})\, x^2 \geqslant 0;$$

Kvantifikator $\exists$ je egzistencijalni kvantifikator i znači "postoji";

$$(\exists x \in \mathbb{R})\, x > 3;$$

Kvantifikator $\exists!$, postoji jedan i samo jedan

$$(\exists! x \in \mathbb{R})\, x + 1 = 3.$$

PRIMJER 1.1.

Posmatrajmo sljedeće rečenice

1. Broj 36 je djeljiv sa 9;
2. Broj 14 je djeljiv sa 6;
3. Broj 4 je manji od 10;
4. Beč je glavni grad Mađarske.

Pojašnjenje:

Iskazi 1. i 3. su tačni, dok 2. i 4. nisu. Sljedeće rečenice nisu iskazi:

1. $x + 3 < 0$, (Jer nije data vrijednost promjenljive $x$.)
2. Svim Sunčevog ima konstantu. (Rečenica nema smisla.)
3. Februar ima 28 dana. (Nije precizirana godina, te se ne može utvrditi tačnost.)
4. Danas je lijepo vrijeme. (Zavisi od ličnog mišljenja.)

## Logičke operacije

Od elementarnih iskaza pomoću logičkih operacija formiraju se složeni iskazi. Rezultate primjene ovakvih operacija mogu se prikazati u tablicama istinitosti. Operacije koje samo jednom iskazu daju određene vrijednosti nazivaju se unarne, ima ih 4, ako se opearcija odnosi na dva iskaza onda je to binarna operacija, njih ima $2^{2^2} = 16$. Operacije nad $n$ iskaza, tj. $n$–narne operacija ne uvode direktno, nego preko unarnih i binarnih operacija.

Počećemo sa negacijom

Definicija 1.1 (Negacija).

Negacija iskaza $p$ je iskaz koji je istinit ako i samo ako je iskaz $p$ neistinit, a neistinit je ako i samo ako je iskaz $p$ istinit.

| $\tau(p)$ | $\tau(\neg p)$ |
|---|---|
| $\top$ | $\bot$ |
| $\bot$ | $\top$ |

Tabela 1.1: Tablica negacije

Definicija 1.2 (Konjukcija).

Konjukcija iskaza $p$ i $q$ je iskaz koji je istinit ako i samo ako su oba iskaza $p$ i $q$ istiniti.

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(p \wedge q)$ |
|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\bot$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |

Tabela 1.2: Tablica konjukcije

Definicija 1.3 (Disjunkcija).

Disjunkcija iskaza $p$ i $q$ je iskaz koji je istinit ako i samo ako je bar jedan od iskaza $p$ ili $q$ istiniti.

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(p \vee q)$ |
|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |

Tabela 1.3: Tablica disjunkcije

DEFINICIJA 1.4 (Ekskluzivna disjunkcija).

Ekskluzivna disjunkcija iskaza $p$ i $q$ je iskaz koji je istinit ako i samo ako je istinit samo jedan od iskaza $p$ i $q$.

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(p \veebar q)$ |
|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\bot$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |

Tabela 1.4: Tablica ekskluzivne disjunkcije

DEFINICIJA 1.5 (Implikacija).

Implikacija iskaza $p$ i $q$ je iskaz koji je neistinit ako i samo ako je istinit iskaz $p$ a iskaz $q$ je neistinit.

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(p \Rightarrow q)$ |
|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\top$ |

Tabela 1.5: Tablica implikacije

U implikaciji $p \Rightarrow q$ iskaz $p$ se naziva premisa ili pretpostavka, a iskaz $q$ posljedica ili konsekvenca implikacije. Iskaz $p \Rightarrow q$ čita se još "iz $p$ proizilazi $q$"; ili "$p$ je dovoljan uslov za $q$"; ili "$q$ je potreban uslov za $p$".

Kada se kaže "$p$ je dovoljan uslov za $q$", onda to znači da je iskaz $q$ istinit ako je iskaz $p$ istinit. Na primjer, da bi neki broj bio djeljiv sa 2 dovoljno je da bude djeljiv sa 4.

A, kada se kaže "$q$ je potreban uslov za $p$", to znači da iskaz $p$ ne može biti istinit ako iskaz $q$ nije istinit.

DEFINICIJA 1.6 (Ekvivalencija).

Ekvivalencija iskaza $p$ i $q$ je iskaz koji je istinit ako i samo ako su vrijednosti iskaza $p$ i $q$ iste.

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(p \Leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\bot$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\top$ |

Tabela 1.6: Tablica ekvivalencije

DEFINICIJA 1.7 (Iskazna formula).

Iskazna formula je konačan niz iskaza sastavljen pomoću logičkih operacija, konstanti 0 i 1 i glavnih promjenljivih iskaza $p$, $q$, $r, \ldots$

PRIMJER 1.2 (Iskazne formule).

Iskazne formule sa dva i tri iskazna slova.

$(a)$ $(p \Rightarrow \neg r) \wedge (p \veebar r)$;

$(b)$ $(p \wedge q) \vee r$.

DEFINICIJA 1.8 (Tautologija).

Iskazna formula koja je tačna bez obzira na istinitosnu vrijednost iskaza u njoj, naziva se tautologija.

PRIMJER 1.3.

Ispitati da li je tautologija

$(a)$ $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$;

$(b)$ $p \Rightarrow (q \vee r)$.

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(\neg p)$ | $\tau(p \wedge \neg p)$ | $\tau((p \wedge \neg p) \Rightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\bot$ | $\bot$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\bot$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\top$ | $\bot$ | $\top$ |

Tabela 1.7: Rješenje za iskaznu formulu datu pod (a)

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(r)$ | $\tau(q \vee r)$ | $\tau(p \Rightarrow (q \vee r))$ |
|---|---|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\top$ |

Tabela 1.8: Rješenje za iskaznu formulu datu pod (b)

Iz Tabele 1.7 zaključujemo da je formula data u (a) tautologija, dok na osnovu Tabele 1.8 vidimo da formula data u (b) nije tautologija.

## 1.2 Algebra skupova

Skup i njegovi elementi su osnovni pojmovi matematike. Skupove obilježavamo sa velikim slovima $A, B, \ldots$ Ako skup $S$ sačinjavaju elementi $x, y, \ldots$ to pišemo

$$S = \{x, y, \ldots\}.$$

Ako skup $S$ sačinjavaju elementi koji imaju osobinu $P$ to pišemo

$$S = \{x | P(x)\} \text{ ili } S = \{x : P(x)\}.$$

Ako je $S$ skup, tada $x \in S$ označava da je $x$ element skupa $S$ ili da $x$ pripada skupu $S$. Negacija ovog iskaza označava se sa $x \notin S$. Skupovi koji se često upotrebljavaju imaju oznake

- $\mathbb{N}$ skup svih prirodnih brojeva;
- $\mathbb{Z}$ skup svih cijelih brojeva;
- $\mathbb{Q}$ skup svih racionalnih brojeva;
- $\mathbb{R}$ skup svih realnih brojeva;

- $\mathbb{R}^+$ skup svih realnih pozitivnih brojeva;
- $\mathbb{I}$ skup svih iracionalnih brojeva;
- $\mathbb{C}$ skup svih kompleksnih brojeva;
- $(a, b)$ otvoren interval u $\mathbb{R}$ ili kraće interval;
- $[a, b]$ zatvoren interval u $\mathbb{R}$ ili kraće segment.

Skup ne zavisi od rasporeda (poretka) kojim su dati njegovi elementi. Tako su na primjer, skupovi $\{1, 2, 3\}$ i $\{2, 1, 3\}$ jednaki. Takođe su jednaki i skupovi $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 3, 3, 3\}$, itd.

Ako je $n$ prirodan broj, skup $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ od $n$ elemenata $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je konačan. Skup je beskonačan ako broj njegovih elemenata nije konačan.

Napomena 1.2.

Vrijedi $(a, b) = \{x : a < x < b \wedge x \in \mathbb{R}\}$ i $[a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b \wedge x \in \mathbb{R}\}$.

## Inkluzija

Definicija 1.9 (Inkluzija).

Za skup $B$ kaže se da je sadržan u skupu $A$, tj. da je $B$ podskup ili dio skupa $A$, ako je svaki element skupa $B$ takođe element skupa $A$, tj. ako iz $x \in B \Rightarrow x \in A$. Činjenica da je $B$ dio skupa $A$ označava se sa $B \subset A$ ili $A \supset B$. Znak $\subset$ odnosno $\supset$ zove se znak inkluzije.

Simbolički $B \subset A$ se piše u obliku

$$B \subset A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Definicija 1.10 (Jednakost skupova).

Skupovi $A$ i $B$ su jednaki ako je

$$B \subset A \text{ i } A \subset B.$$

Ako $A$ nije jednako $B$ označavamo $A \neq B$.

## Unije skupova

Definicija 1.11 (Unija skupova).

Ako su $A$ i $B$ dva skupa, pod unijom skupova $A$ i $B$ (u oznaci $A \cup B$) podrazumijeva se skup svih elemenata koji se nalaze bar u jednom od skupova $A$ ili $B$.

Simbolički zapisana unija skupova $A$ i $B$ izgleda ovako

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

## Presjek skupova

Definicija 1.12 (Presjek skupova).

Ako su $A$ i $B$ dva skupa, pod presjekom skupova $A$ i $B$ (u oznaci $A \cap B$) podrazumijeva se skup svih elemenata koji istovremeno pripadaju i skupu $A$ i skupu $B$.

Simbolički zapisan presjek skupova $A$ i $B$ izgleda ovako

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

DEFINICIJA 1.13.

Za dva skupa kažemo da su disjunktni ako nemaju zajedničkih elemenata.

## Razlika skupova

DEFINICIJA 1.14 (Razlika skupova).

Ako su $A$ i $B$ dva skupa, pod razlikom (diferencijom) skupova $A$ i $B$ (u oznaci $A \setminus B$) podrazumijeva se skup svih elemenata skupa $A$ a koji ne pripadaju skupu $B$.

Simbolički zapisana razlika skupova $A$ i $B$ izgleda ovako

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

PRIMJER 1.4.

Dati su skupovi $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{d, e, f, g, h\}$. Odrediti $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{a, b, c, d, e, f, g, h\}; \\ A \cap B &= \{d, e, f\}; \\ A \setminus B &= \{a, b, c\}; \\ B \setminus A &= \{g, h\}. \end{aligned}$$

## Uređeni par

Simboli $\{a, b\}$ i $\{b, a\}$ označavaju isti skup od dva elementa $a$ i $b$. Uvešćemo sada pojam uređenog para čija je prva komponenta (projekcija) $a$, a druga komponenta (projekcija) $b$.

DEFINICIJA 1.15 (Uređeni par).

Uređeni par elemenata $a$ i $b$, u oznaci $(a, b)$, je

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Ovaj uređeni par označavamo sa $(a, b)$[1] ili $\langle a, b\rangle$. Smatramo da je $(a, b)$ različito od $(b, a)$ osim u slučaju $a = b$. Uređeni parovi $(a, b)$ i $(c, d)$ su jednaki ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

DEFINICIJA 1.16 (Uređena trojka).

Uređena trojka $(a, b, c)$ elemenata $a, b, c$ definiše se pomoću jednakosti

$$(a, b, c) = ((a, b), c).$$

Na sličan način se definiše i uređena $n$–torka $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

[1] Ne miješati sa intervalom $(a, b)$

### Dekartov proizvod

Definicija 1.17 (Dekartov proizvod).

Dekartov proizvod dva skupa $A$ i $B$ je skup $C$ čiji su elementi uređeni parovi sa prvom komponentom iz skupa $A$ i drugom iz skupa $B$, tj.

$$C = A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Primjer 1.5.

Dati su skupovi $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$. Odrediti $A \times B$, $B \times A$.

Rješenje:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\};$$
$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

## 1.3 Binarna relacija

Definicija 1.18 (Binarna relacija).

Ako su $A$ i $B$ dva skupa, binarna relacija u skupu $A \times B$ je svaki njegov podskup.

Ako je $A = B$, relacija u skupu

$$\boxed{A \times B = A \times A = A^2}$$

zove se i relacija u skupu $A$.

Definicija 1.19.

Neka je $\varrho$ binarna relacija u skupu $A \times B$. Kažemo da je $a$ u relaciji $\varrho$ sa $b$ (u oznaci $a\varrho b$) ako je $(a, b) \in \varrho$.

Napomena 1.3.

Relacije $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$ su binarne relacije u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Definicija 1.20 (Osobine binarnih relacija).

Neka je $\varrho$ binarna relacija u skupu $A$.

1. Relacija $\varrho$ je refleksivna ako je
$$(\forall a \in A)\, a\varrho a;$$
2. Relacija $\varrho$ je simetrična ako je
$$(\forall a, b \in A)\, a\varrho b \Rightarrow b\varrho a;$$
3. Relacija $\varrho$ je antisimetrična ako je
$$(\forall a, b \in A)\, (a\varrho b \wedge b\varrho a) \Rightarrow a = b;$$
4. Relacija $\varrho$ je tranzitivna ako je
$$(\forall a, b, c \in A)\, (a\varrho b \wedge b\varrho c) \Rightarrow a\varrho c.$$

Definicija 1.21 (Relacija ekvivalencije).

Neka je $A$ proizvoljan skup i $\varrho$ jedna relacija u skupu $A$. Relacija $\varrho$ zove se relacija ekvivalencije ako je

1. refleksivna;
2. simetrična;
3. tranzitivna.

Definicija 1.22 (Relacija poretka).

Neka je $A$ proizvoljan skup i $\varrho$ jedna relacija u skupu $A$. Relacija $\varrho$ zove se relacija poretka ako je

1. refleksivna;
2. antisimetrična;
3. tranzitivna.

Primjer 1.6.

Dati su skupovi $A = \{-1, 1, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, -2\}$. Odrediti relaciju $\varrho = \{(a, b) : a + b = 1\}$ (tj. odrediti sve uređene parove relacije).

Rješenje:

$$\varrho = \{(-1, 2), (1, 0), (3, -2), (2, -1), (0, 1), (-2, 3)\}.$$

## 1.4 Preslikavanje ili funkcija

Definicija 1.23 (Funkcija).

Ako su $A$ i $B$ dva neprazna skupa, pod funkcijom (ili preslikavanjem) $f$ skupa $A$ u skup $B$ podrazumijeva se jedan podskup skupa $A \times B$ takav da se svako $x \in A$ javlja jedanput kao prva komponenta u elementima navedenog podskupa.

Prethodno zapisujemo na jedan od načina

$$\boxed{f : A \mapsto B,\ A \xrightarrow{f} B,\ x \mapsto f(x),\ x \in A \wedge f(x) \in B.}$$

Ako je $(x, y) \in f$, tada se $x$ (prva komponenta) naziva original, a $y$ (druga komponenta) slika, slika se takođe označava sa $y = f(x)$.

Definicija 1.24.

Ako je $f : A \mapsto B$ tada se $A$ naziva definicioni skup (područje) ili domen funkcije (preslikavanja), a skup svih slika $f(x)$ skup vrijednosti preslikavanja.

Definiciono područje označavamo i sa $D_f$. Skup vrijednosti preslikavanja označava se sa $f(A)$. Skup $\Gamma$ svih uređenih parova $(x, f(x))$ naziva se graf (ili grafik) funkcije $f$, pa vrijedi

$$\boxed{\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in A\}.}$$

Definicija 1.25.

Neka je $f : A \mapsto B$. Ako je $f(A) = B$, kažemo da je $f$ preslikavanje skupa $A$ na skup $B$.

Definicija 1.26 (Bijekcija).

Neka je $f : A \mapsto B$. Ako važi ekvivalencija $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$, tada je $f$ bijektivno preslikavanje (ili bijekcija ili obostrano–jednoznačno).

Definicija 1.27 (Kompozicija preslikavanja).

Neka je $f : A \mapsto B$ i $g : B \mapsto C$. Pod proizvodom (kompozicijom) preslikavanja $f$ i $g$ smatra se preslikavanje $h : A \mapsto C$ određeno sa

$$h(x) = g(f(x)),\ x \in A.$$

Primjer 1.7.

Neka je $A = B = C = \mathbb{R}$ i $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^3$. Tada je

$$g(f(x)) = \cos^3 x;$$
$$f(g(x)) = \cos x^3.$$

## 1.5 Binarna operacija

Definicija 1.28.

Binarna operacija u jednom skupu $S = \{a, b, c, \ldots\}$ je jedno preslikavanje skupa $S \times S$ u skup $S$.

Binarna operacija zove se takođe i binarna kompozicija, apstraktna operacija ili samo operacija. Znak koji pokazuje da na elemente $a$ i $b$ skupa $S$ treba primijeniti određeni postupak da bi se dobio određeni element $c$ iz istog skupa $S$ zove operator i često se označava sa $\circ$. Rezultat operacije $\circ$ koja je izvršena sa elementima $a$ i $b$ označava se $a \circ b = c$.

Definicija 1.29.

Skup $S$ u kojem je definisana binarna operacija $\circ$ zove se grupoid. Grupoid se označava sa $(S, \circ)$.

Za operacije koje imaju konkretan smisao, operator $\circ$ se zamjenjuje sa znacima:

$+$ za sabiranje (brojeva, polinoma, vektora,...);

$-$ za oduzimanje (brojeva, polinoma, vektora,...);

$\times$ ili $\cdot$ za množenje (brojeva, polinoma, vektora,...);

$:$ ili $/$ za dijeljenje (brojeva, polinoma, ...);

$\cup$ za uniju skupova;

$\cap$ za presjek skupova;

$\setminus$ za razliku skupova;...

### 1.5.1 Osobine binarnih opearcija

Definicija 1.30 (Asocijativnost).

Neka je dat grupoid $(S, \circ)$. Ako za svaka tri elementa $a, b, c \in S$ važi

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

kaže se da je operacija $\circ$ asocijativna na skupu $S$.

Definicija 1.31 (Polugrupa).

Grupoid $(S, \circ)$ u kome je operacija $\circ$ asocijativna naziva se polugrupa (ili semigrupa).

Definicija 1.32 (Komutativnost).

Neka je dat grupoid $(S, \circ)$. Ako za svaka dva elementa $a, b \in S$ važi jednakost

$$a \circ b = b \circ a,$$

kažemo da je operacija $\circ$ komutativna na $S$.

Definicija 1.33 (Neutralni element).

Ako u grupoidu $(S, \circ)$ postoji takav element $e \in S$ za koji je

$$(\forall a \in S)\, a \circ e = e \circ a = a$$

on se zove neutralni element.

Teorema 1.1.

*Ako postoji neutralni element $e$ za operaciju $\circ$, on je jedinstven.*

Definicija 1.34 (Simetričan element).

Neka grupoid $(S, \circ)$ ima neutralni element $e$. Kažemo da element $a \in S$ ima simetričan (ili inverzni element) $a^{'} \in S$; ako vrijedi jednakost

$$a^{'} \circ a = a \circ a^{'} = e.$$

### 1.5.2 Algebarske strukture

Definicija 1.35 (Grupa).

Kaže se da grupoid $(S, \circ)$ ima strukturu grupe, ili da čini grupu, ako operacija $\circ$ ima osobine

$1^0$ Operacija je asocijativna

$$(\forall a, b, c \in S)\, (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c);$$

$2^0$ Operacija ima neutralni element $e$

$$(\exists e \in S)(\forall a \in S)\, a \circ e = e \circ a = a;$$

$3^0$ Svaki element $a$ ima simetričan element $a^{'}$ za operaciju $\circ$

$$(\forall a \in S)(\exists a^{'} \in S)\, a \circ a^{'} = a^{'} \circ a = e.$$

Ako je $(S, \circ)$ grupa, kaže se da elementi skupa $S$ obrazuju grupu.

Definicija 1.36 (Komutativna ili Abelova grupa).

Ako je $(S, \circ)$ grupa i ako je operacija $\circ$ komutativna

$$(\forall a, b \in S)\ a \circ b = b \circ a,$$

kaže se da je grupa komutativna ili Abelova.

Definicija 1.37 (Distributivnost).

Neka su na jednom skupu $S$ definisane dvije binarne operacije $\circ_1$ i $\circ_2$. Ako važi

$$(\forall a, b, c \in S) \quad a \circ_2 (b \circ_1 c) = (a \circ_2 b) \circ_1 (a \circ_2 c) \text{ i } (a \circ_1 b) \circ_2 c = (a \circ_2 c) \circ_1 (b \circ_2 c),$$

kažemo da je $\circ_2$ distributivna u odnosu na $\circ_1$.

Definicija 1.38 (Prsten).

Neka su na skupu $S$ definisane dvije binarne operacije redom označene sa $+$ i $-$. Kažemo da $S$ čini prsten u odnosu na te dvije operacije ako su ispunjeni uslovi

$1^0$ Skup $S$ čini komutativnu grupu u odnosu na operaciju $+$;

$2^0$ Operacija $\cdot$ je asocijativna, tj važi

$$(\forall a, b, c \in S)\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c;$$

$3^0$ Operacija $\cdot$ je distributivna prema operaciji $+$, tj.

$$(\forall a, b, c \in S)\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ i } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Prsten koji čine skup $S$ i njegove operacije $+$ i $\cdot$ označava se $(S, +, \cdot)$.

Definicija 1.39 (Tijelo).

Prsten $(S, +, \cdot)$ zove se tijelo, ako skup $S \setminus \{0\}$ čini grupu u odnosu na operaciju $\cdot$.

Definicija 1.40 (Polje).

Prsten $(S, +, \cdot)$ zove se polje, ako je skup $S \setminus \{0\}$ čini komutativnu grupu u odnosu na operaciju $\cdot$.

## 1.6 Polje realnih brojeva

Definicija 1.41 (Polje realnih brojeva).

Polje $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ naziva se polje realnih brojeva ako i samo ako su ispunjeni sljedeći uslovi

$1^0$ Na skupu $\mathbb{R}$ definisana je relacija poretka $\leqslant$ koja posjeduje još dvije osobine

1 $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$;

2 $(0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y) \Rightarrow 0 \leqslant x \cdot y$,

pri čemu je 0 neutralni element grupe $(\mathbb{R}, +)$.

$2^0$ Svaki skup $A \subset \mathbb{R}$ koji ima majorantu ima tačnu gornju granicu, odnosno supremum.[a]

[a] Tačka $M \in \mathbb{R}$ naziva se gornja međa ili supremum skupa $A \subset \mathbb{R}$ (označava se sa $\sup A = M$) ako ima sljedeća svojstva:
1. Tačka $M$ je majoranta skupa $A$, tj. $\forall x \in A$, $x \leqslant M$;
2. $\forall x^\star < M$, $\exists x \in A$ tako da je $x > x^\star$.

Operacije $+$ i $\cdot$ koje su definisane u skupu $\mathbb{R}$, nazivaju se respektivno, sabiranje i množenje. Neutralni element grupe $(\mathbb{R}, +)$ označava se sa 0 i naziva nula, dok se jedinični element grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ označava sa 1 i naziva jedan. Suprotni element elementa $x$ u grupi $(\mathbb{R}, +)$ obilježava se sa $-x$, a zbir $y + (x)$ sa $y - x$ i zove razlika, respektivno, elemenata $y$ i $x$. Inverzni element elementa $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ u odnosu na operaciju $\cdot$ označava se sa $x^{-1}$ ili $\frac{1}{x}$, dok se proizvod $y \cdot \frac{1}{x}$ naziva količnik, respektivno, elemenata $y$ i $x$, i obilježava sa $\frac{y}{x}$.

Ako je $x \leqslant y$ kaže se da je $x$ manje ili jednako od $y$, ili $y$ je veće il jednako od $x$. Ako je $x \leqslant y \wedge x \neq y$ onda se piše $x < y$ i čita $x$ je manje od $y$ ili $y$ je veće od $x$.

Napomena 1.4.

Dakle, prema definiciji polje realnih brojeva $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mora ispunjavati tri grupe aksioma. Prvu grupu čine aksiomi polja, drugu aksiomi poretka i dodati aksiomi $1^0$ i $2^0$, dok treća grupa aksioma sadrži samo jedan aksiom koji se naziva aksiom supremuma.

### 1.6.1 Neki važniji podskupovi skupa realnih brojeva

Na osnovu posljedica aksioma skupa realnih brojeva (vidjeti npr. [6, str. 124 i 125]), skup prirodnih brojeva može se definisati na sljedeći način

Definicija 1.42 (Prirodni brojevi).

Brojevi $1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, \ldots, n = (n - 1) + 1, \ldots$ nazivaju se prirodni.

$1^0$ Broj 1 je prirodni;

$2^0$ Ako je $n$ prirodan broj onda je i $n + 1$ prirodan broj

Skup prirodnih brojeva obilježavamo sa $\mathbb{N}$.

Definicija 1.43 (Cijeli brojevi).

Prirodni brojevi, suprotni brojevi prirodnih brojeva u odnosu na operaciju sabiranja i nula nazivaju se cijeli brojevi.

Skup cijelih brojeva označavamo sa $\mathbb{Z}$.

Definicija 1.44 (Racionalni brojevi).

Količnici $\frac{p}{q}$, gdje su $p$ i $q$ cijeli brojevi i $q \neq 0$ zovu se racionalni brojevi.

Skup racionalnih brojeva označavamo sa $\mathbb{Q}$.

Definicija 1.45 (Skup iracionalnih brojeva).

Skup svih realnih brojeva koji nisu racionalni, tj. komplement skupa $\mathbb{Q}$, naziva se skup iracionalnih brojeva, i obilježava se sa $\mathbb{I}$.

Napomena 1.5.

Jasno je da vrijedi

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing \text{ i } \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

### 1.6.2 Apsolutna vrijednost realnog broja

DEFINICIJA 1.46 (Apsolutna vrijednost realnog broja).

Apsolutna vrijednost (ili modul ili norma ) realnog broja $x$, u oznaci $|x|$, je preslikavanje $x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, definisano sa

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x > 0, \\ 0, & \text{ako je } x = 0, \\ -x, & \text{ako je } x < 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

NAPOMENA 1.6.

Možemo koristiti i sljedeće definicije koje su ekvivalentne sa Definicijom 1.46

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x, -x\},$$
$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2}.$$

PRIMJER 1.8.

Vrijedi

$$\begin{aligned} |3| &= 3 \\ |-3| &= 3 \\ |0| &= 0. \end{aligned}$$

### 1.6.3 Pregled baznih i nekih elementarnih funkcija

Bazne funkcije realne promjenljive su

1. Konstantna i identička (jedinična) funkcija;
2. Eksponencijalna i logaritamska funckcija;
3. Stepena funkcija;
4. Trigonometrijska funkcija kosinus (cos) i njena inverzna funkcija arkuskosinus (arccos).

Elementarne funkcije realne promjenljive dobijamo iz baznih funkcija konačnom primjenom algebarskih operacija $+$, $-$, $\cdot$, $:$ i konačnim brojem superpozicija tih funkcija.

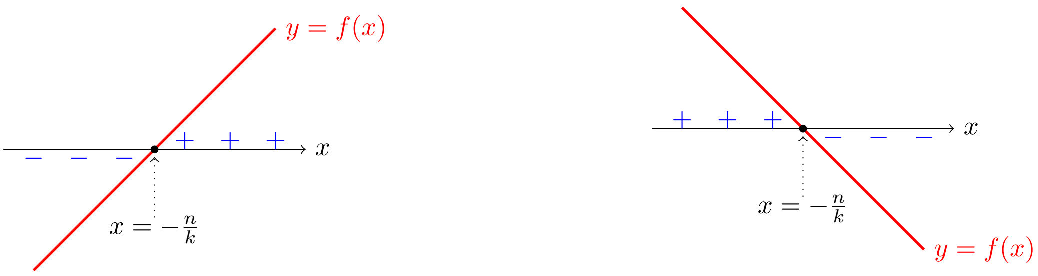
**Linearna funkcija** Jedan od najjednostavnijih primjera elementarne funkcije je linearna funkcija[2]. Opšti oblik linearne funkcije je

$$\boxed{f(x) = kx + n.}$$

Vrijedi:

1. Definiciono područje ove funkcije je skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$.
2. Grafik ove funkcije je prava.
3. Parametar $k$ je koeficijent pravca, a $n$ je odsječak prave na $y$–osi.
4. Nula funkcije je u tački $\left(-\frac{n}{k}, 0\right)$, tj. za vrijednost argumenta $x = -\frac{n}{k}$.
5. Funkcija nije ograničena, i nema lokalnih ekstrema.
6. Slučaj $k > 0$ (Slika 1.1a)

[2] Funkcija koja će biti ovdje predstavljena je afina funkcija, a koja se pogrešno naziva linearna.




(a) Grafik funkcije $f(x) = kx + n$, $k > 0$ (b) Grafik funkcije $f(x) = kx + n$, $k < 0$

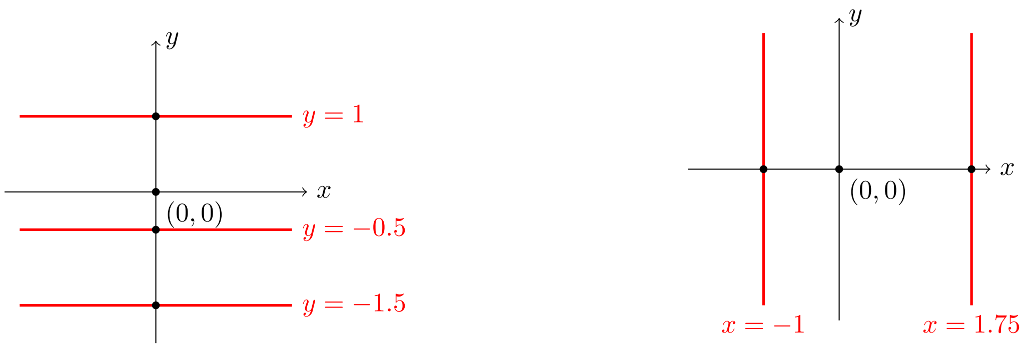
Slika 1.1: Grafici linearnih funkcija $f(x) = kx + n$ u slučaju $k > 0$ i $k < 0$

   (a) Funkcija raste $\forall x \in \mathbb{R}$;
   (b) Znak funkcije: $f(x) < 0$, $x \in \left(-\infty, -\frac{n}{k}\right)$, $f(x) > 0$, $x \in \left(-\frac{n}{k}, \infty\right)$.

7. Slučaj $k < 0$ (Slika 1.1b)
   (a) Funkcija opada $\forall x \in \mathbb{R}$;
   (b) Znak funkcije: $f(x) > 0$, $x \in \left(-\infty, -\frac{n}{k}\right)$, $f(x) < 0$, $x \in \left(-\frac{n}{k}, \infty\right)$.

Specijalni slučajevi

1. U slučaju $n = 0$ grafik prave prolazi kroz koordinatni početak.
2. U slučaju $k = 0$ dobijamo konstantnu funkciju. Grafik ove funkcije je prava paralelna sa $x$–osom ili sama $x$ –osa, kada je i $n = 0$. Grafici ovih pravih predstavljeni su na Slici 1.2a.




(a) Grafici funkcija oblika $f(x) = n$ (b) Prave oblika $x = a$, $a \in \mathbb{R}$

Slika 1.2: Grafici funkcija oblika $f(x) = const$, $(f(x) = n)$ i pravih $x = a$

Na Slici 1.2b predstavljene su prave oblika $x = a$, $a \in \mathbb{R}$. Ovo nisu funkcije u smislu kako je to ovdje uvedeno.

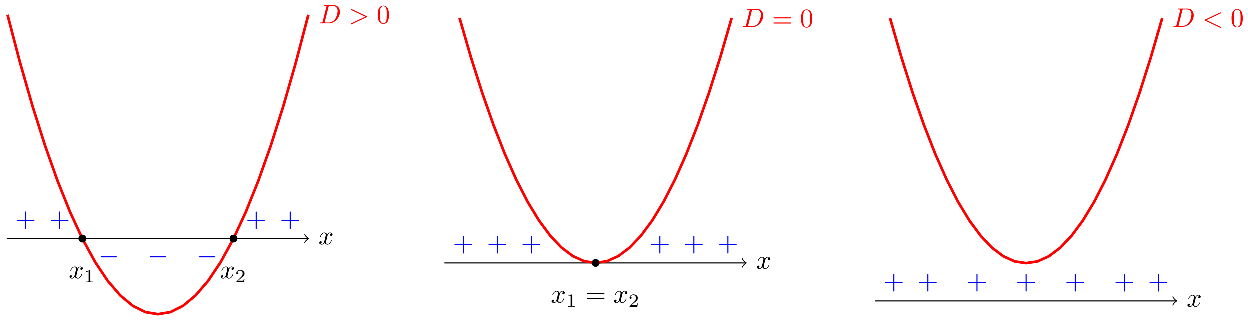
**Kvadratna funkcija** Opšti oblik kvadratne funkcije je

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0$$

1. Definiciono područje kvadratne funkcije je skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$.
2. Grafik ove funkcije je parabola.
3. Nule funkcije računamo po formuli

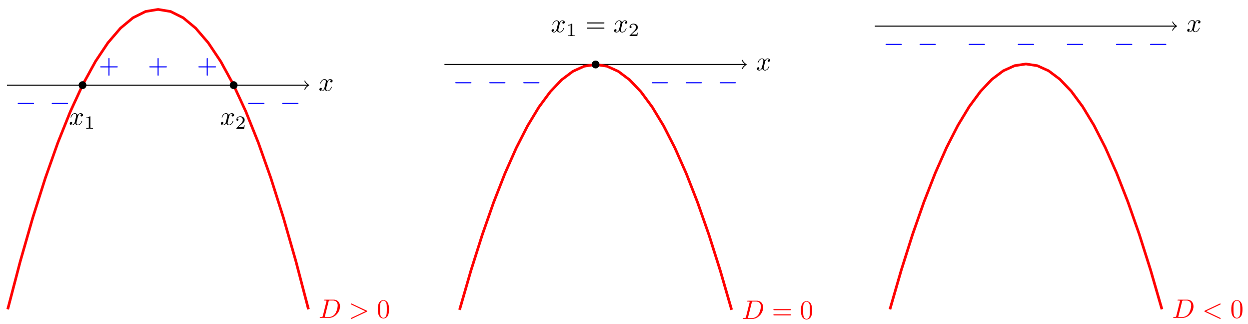
$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Veličina $D = b^2 - 4ac$ je diskriminanta, može biti pozitivna, jednaka nuli i negativna, i od vrijednosti diskriminante kvadratna funkcija može imati dvije realne i različite nule, jednu dvostruku nulu ili konjugovano–kompleksne nule.




(a) Diskriminanta $D > 0$ (b) Diskriminanta $D = 0$ (c) Diskriminanta $D < 0$

Slika 1.3: Grafici kvadratnih funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ za $a > 0$ i različite vrijednosti diskriminante $D$




(a) Diskriminanta $D > 0$ (b) Diskriminanta $D = 0$ (c) Diskriminanta $D < 0$

Slika 1.4: Grafici kvadratnih funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ za $a < 0$ i različite vrijednosti diskriminante $D$

4. Slučaj $a > 0$ i $D > 0$. Grafik odgovarajuće funkcije dat je na Slici 1.3a.
   (a) Funkcija je konveksna.
   (b) Ima lokalni minimum za $x = -\frac{b}{2a}$.
   (c) Znak funkcije, $f(x) > 0,\ \forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$, $f(x) < 0,\ x \in (x_1, x_2)$, nule funkcije su za $x_1$ i $x_2$.
   (d) Funkcija opada za $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, a raste za $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.
5. Slučaj $a > 0$ i $D = 0$. Grafik odgovarajuće funkcije dat su na Slici 1.3b.
   (a) Funkcija je konveksna.
   (b) Ima lokalni minimum za $x = -\frac{b}{2a}$.
   (c) Znak funkcije, $f(x) > 0,\ \forall x \in (-\infty, \infty) \setminus \{x_1\}$, nula funkcije je za $x_1$.
   (d) Funkcija opada za $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, a raste za $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$, $x_1 = -\frac{b}{2a}$.
6. Slučaj $a > 0$ i $D < 0$. Grafik odgovarajuće funkcije dat je na Slici 1.3c.
   (a) Funkcija je konveksna.
   (b) Ima lokalni minimum za $x = -\frac{b}{2a}$.
   (c) Znak funkcije, $f(x) > 0,\ \forall x \in (-\infty, \infty)$.
   (d) Funkcija opada za $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, a raste za $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.
7. Slučaj $a < 0$ i $D > 0$. Grafik odgovarajuće funkcije dat je na Slici 1.4a.
   (a) Funkcija je konkavna.
   (b) Ima lokalni maksimum za $x = -\frac{b}{2a}$.
   (c) Znak funkcije, $f(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$, $f(x) > 0,\ x \in (x_1, x_2)$, nule funkcije su za $x_1$ i $x_2$.
   (d) Funkcija raste za $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, a opada za $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.

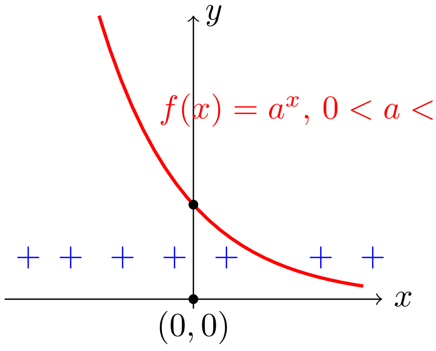
8. Slučaj $a < 0$ i $D = 0$. Grafik odgovarajuće funkcije dat je na Slici 1.4b.
   (a) Funkcija je konkavna.
   (b) Ima lokalni maksimum za $x = -\frac{b}{2a}$.
   (c) Znak funkcije, $f(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, \infty) \setminus \{x_1\}$, nula funkcije je za $x_1$.
   (d) Funkcija raste za $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, a opada za $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$, $x_1 = -\frac{b}{2a}$.
9. Slučaj $a > 0$ i $D < 0$. Grafik odgovarajuće funkcije dat je na Slici 1.4c.
   (a) Funkcija je konkavna.
   (b) Ima lokalni maksimum za $x = -\frac{b}{2a}$.
   (c) Znak funkcije, $f(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, \infty)$.
   (d) Funkcija raste za $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, a opada za $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.

**Eksponencijalna funkcija** Opšti oblik eksponencijalne funkcije je

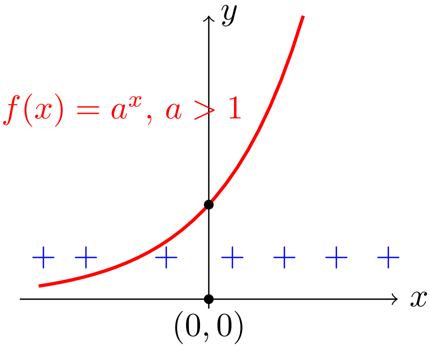
$$\boxed{f(x) = a^x,\ 0 < a \neq 1.} \tag{1.3}$$

Broj $a$ je baza. Razlikujemo dva slučaja i to: $0 < a < 1$ i $a > 1$. Vrijedi

1. Definiciono područje eksponencijalne funkcije je skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$.
2. Eksponencijalna funkcija (1.5) nema nula i eksponencijalna funkcija uvijek je pozitivna, tj. $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty, \infty)$.
3. Funkcija (1.5) je konveksna.
4. Slučaj $0 < a < 1$. Grafik ove funkcije je dat na Slici 1.5a.
   (a) Funkcija opada za $\forall x \in \mathbb{R}$.
   (b) Ima desnu horizontalni asimptotu $y = 0$.
5. Slučaj $a > 1$. Grafik ove funkcije je dat na Slici 1.5b.
   (a) Funkcija raste za $\forall x \in \mathbb{R}$.
   (b) Ima lijevu horizontalni asimptotu $y = 0$.




(a) Slučaj $0 < a < 1$




(b) Slučaj $a > 1$

Slika 1.5: Grafici eksponencijanih funkcija $f(x) = a^x$ za $0 < a < 1$ i $a > 1$

**Logaritamska funkcija** Opšti oblik logaritamske funkcije je

$$f(x) = \log_a x,\ 0 < a \neq 1. \tag{1.4}$$

Broj $a$ je baza logaritma, a $x$ je argument (logaritmand ili numerus). I ovdje, kako kod eksponencijalne funkcije, razlikujemo dva slučaja u zavisnosti od vrijednosti baze $a$. Baza može biti bilo koji realan broj, koji zadovoljava uslove $0 < a \wedge a \neq 1$, međutim dvije baze se više koriste od ostalih, a to su $a = 10$ i $a = e$. U slučaju baze $a = e$ koristimo oznaku

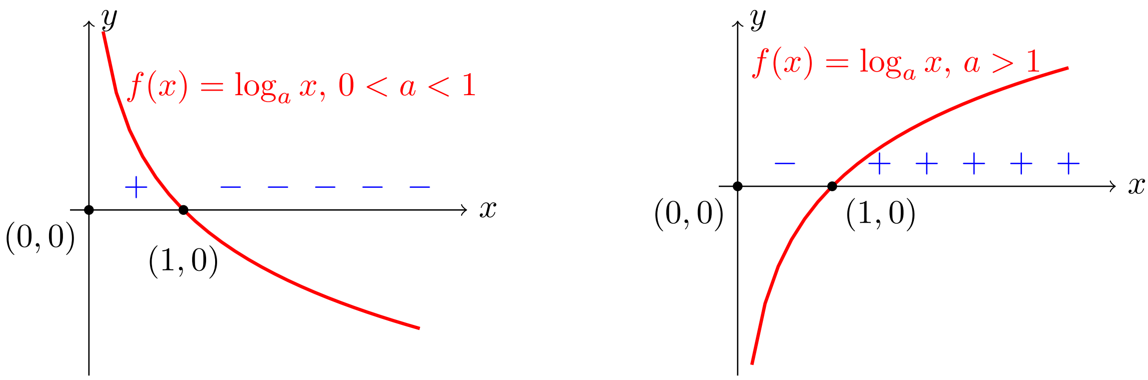
$$\ln x,$$

ne pišemo oznaku za bazu i umjesto log koristimo ln . Ovaj logaritam se naziva prirodni ili Neperov [3] logaritam. U slučaju baze $a = 10$ za logaritam koristimo oznaku

$$\log x,$$

tj. bez oznake za bazu. Ovaj logaritam se naziva dekadski ili Briggsov [4] logaritam.

1. Definiciono područje je $x \in (0, \infty)$.




(a) Slučaj $0 < a < 1$

(b) Slučaj $a > 1$

Slika 1.6: Grafici logaritamskih $f(x) = \log_a x$ za $0 < a < 1$ i $a > 1$

2. Slučaj $0 < a < 1$. Grafik ove funkcije je dat na Slici 1.6a.
   (a) Funkcija je opadajuća za $\forall x \in D_f$, tj. $\forall x \in (0, \infty)$.
   (b) Funkcija ima nulu za $x = 1$.
   (c) Znak funkcije: $f(x) > 0, \forall x \in (0,1),\ f(x) < 0,\ \forall x \in (1, \infty)$.
3. Slučaj $a > 1$. Grafik ove funkcije je dat na Slici 1.6b.
   (a) Funkcija je rastuća za $\forall x \in D_f$, tj. $\forall x \in (0, \infty)$.
   (b) Funkcija ima nulu za $x = 1$.
   (c) Znak funkcije: $f(x) < 0, \forall x \in (0,1),\ f(x) > 0,\ \forall x \in (1, \infty)$.

**Trigonometrijske i inverzne trigonometrijske funkcije** Trigonometrijske funkcije su: kosinus, sinus, tangens, kotangens, sekans i kosekans.

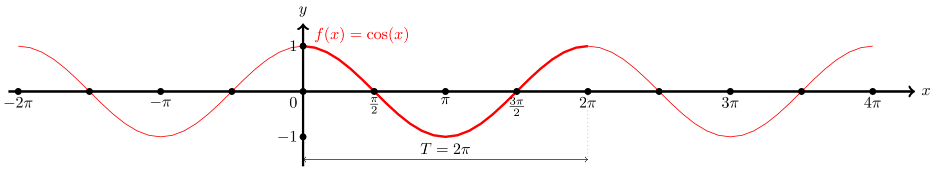
Funkcija kosinus

1. Definisana $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Kosinus je parna funkcija, tj. $\left(\forall x \in D_f\right) \cos(-x) = \cos x$.
3. Periodična je funkcija, tj. vrijedi $(\exists T \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \cos(x + T) = \cos x$, najmanji broj $T$ sa ovakvom osobinom naziva se osnovni period funkcije. Za funkciju kosinus $T = 2\pi$.

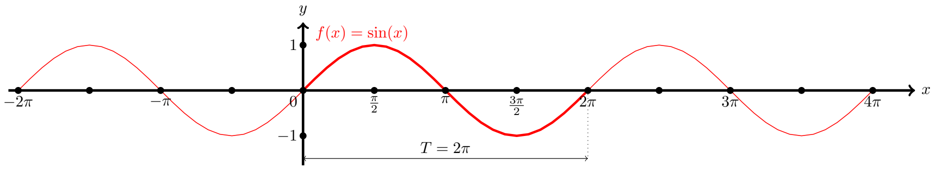
[3] John Napier of Merchiston (1 februar 1550.godine – 4. april 1617.godine); poznat i kako Neper, Nepair; nadimak Marvellous Merchiston) bio je škotski zemljoposjednik koji se bavio matematikom, fiziokom, astronomijom.

[4] Henry Briggs (february 1561.godine – 26 januar 1630. godine) bio je engleski matematičar

4. Nule funkcije su za $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. Znak funkcije: $f(x) > 0$, $x \in \left(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right)$, $f(x) < 0$, $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$.
6. Lokalni maksimumi su tačkama $x_{\max} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a lokalni minimumi u $x_{\min} = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
7. Funkcija opada za $x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, a raste $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$.




(a) Funkcija $\cos x$




(b) Funkcija $\sin x$

Slika 1.7: Grafici trigonometrijskih funkcija $\cos x$ i $\sin x$

Funkcija sinus

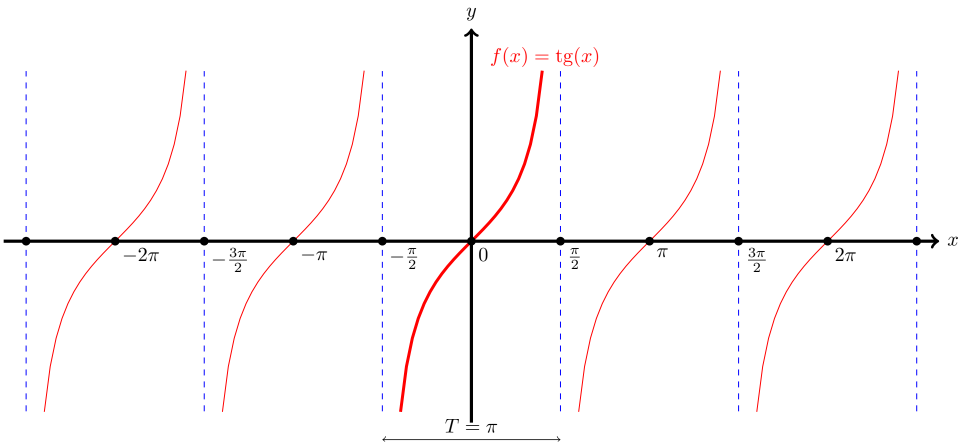
1. Definisana $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Sinus je neparna funkcija, tj. $(\forall x \in D_f)\ \sin(-x) = -\sin x$.
3. Periodična je funkcija, tj. vrijedi $(\exists T \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ \sin(x + T) = \sin x$, najmanji broj $T$ sa ovakvom osobinom naziva se osnovni period funkcije. Za funkciju sinus $T = 2\pi$.
4. Nule funkcije su za $x_0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. Znak funkcije: $f(x) > 0$, $x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $f(x) < 0$, $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$.
6. Lokalni maksimumi su tačkama $x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a lokalni minimumi u $x_{\min} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
7. Funkcija raste za $x \in \left(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right)$, a opada $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$.

Funkcija tangens

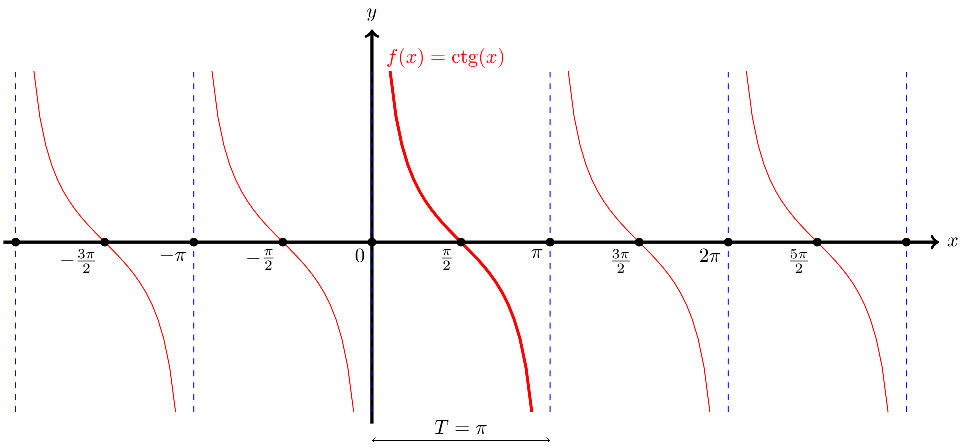
1. Definisana $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ tj. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Tangens je neparna funkcija, tj. $(\forall x \in D_f)\ \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.
3. Periodična je funkcija, tj. vrijedi $(\exists T \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ \operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$, najmanji broj $T$ sa ovakvom osobinom naziva se osnovni period funkcije. Za funkciju tangens $T = \pi$.
4. Nule funkcije su za $x_0 = 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. Znak funkcije: $f(x) > 0$, $x \in \left(0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $f(x) < 0$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi\right)$.
6. Funkcija nema lokalnih ekstremuma.
7. Funkcija raste za $\forall x \in D_f$.

Funkcija kotangens

1. Definisana $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ tj. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
2. Kotangens je neparna funkcija, tj. $(\forall x \in D_f)\ \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.
3. Periodična je funkcija, tj. vrijedi $(\exists T \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ \operatorname{ctg}(x + T) = \operatorname{ctg} x$, najmanji broj $T$ sa ovakvom osobinom naziva se osnovni period funkcije. Za funkciju kotangens $T = \pi$.




(a) Funkcija $\operatorname{tg} x$




(b) Funkcija $\operatorname{ctg} x$

Slika 1.8: Grafici trigonometrijskih funkcija $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$

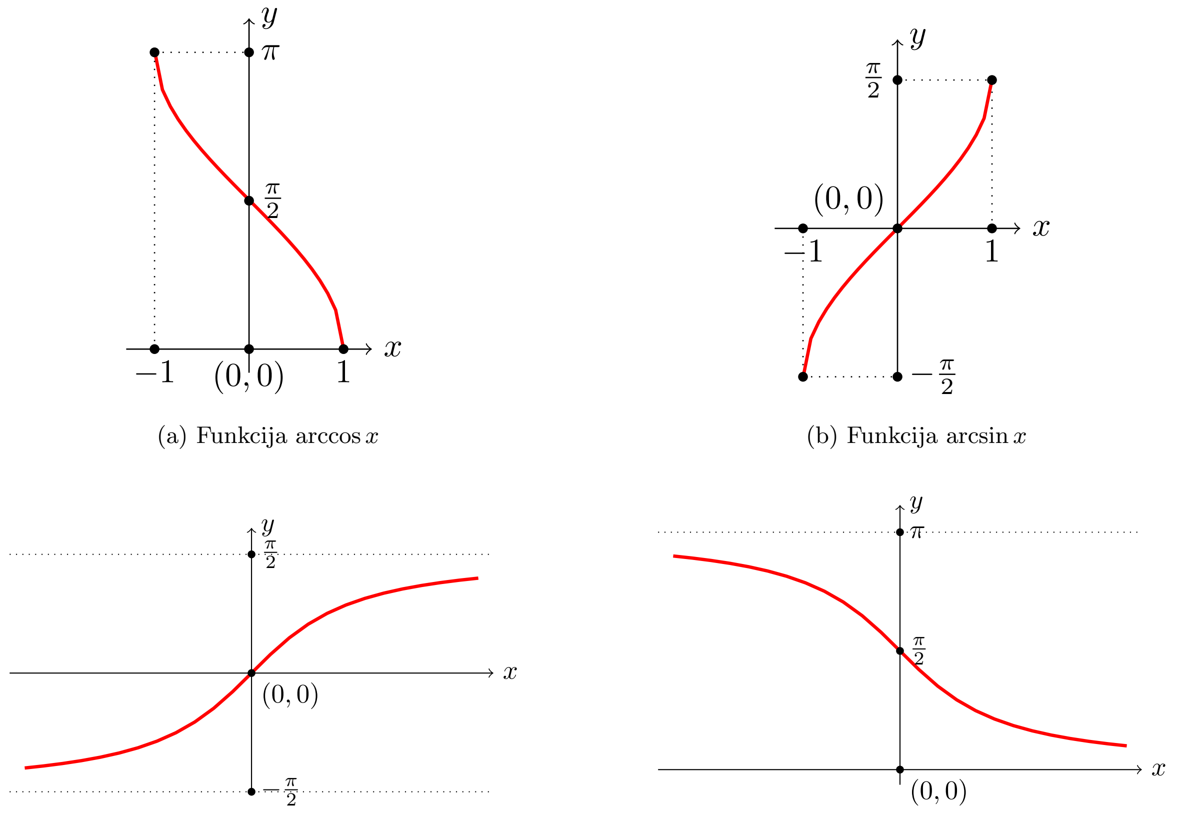
4. Nule funkcije su za $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. Znak funkcije: $f(x) > 0$, $x \in \left(0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $f(x) < 0$, $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$.
6. Funkcija nema lokalnih ekstremuma.
7. Funkcija opada za $\forall x \in D_f$.

Funkcija arkus kosinus

1. Grafik funkcije dat je na Slici 1.9a;
2. Funkcija je definisana za $\forall x \in [-1, 1]$, tj. $D_f = [-1, 1]$;
3. Funkcija je opadajuća $\forall x \in D_f$;
4. Znak $f(x) > 0$, $\forall x \in [-1, 1)$, $f(x) = 0$ za $x = 1$;
5. Ograničena je $(\forall x \in D_f)\ 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$;

Funkcija arkus sinus

1. Grafik funkcije dat je na Slici 1.9b;
2. Funkcija je definisana za $\forall x \in [-1, 1]$, tj. $D_f = [-1, 1]$;
3. Funkcija je rastuća $\forall x \in D_f$;
4. Znak $f(x) < 0$, $\forall x \in [-1, 0)$, $f(x) > 0$, $\forall x \in (0, 1]$, nule funkcije $f(x) = 0$ je za $x = 0$;
5. Ograničena je $(\forall x \in D_f)\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$;




(a) Funkcija $\arccos x$

(b) Funkcija $\arcsin x$

(c) Funkcija $\operatorname{arctg} x$

(d) Funkcija $\operatorname{arcctg} x$

Slika 1.9: Grafici inverznih trigonometrijskih funkcija $\arccos x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arcctg} x$

Funkcija arkus tangens

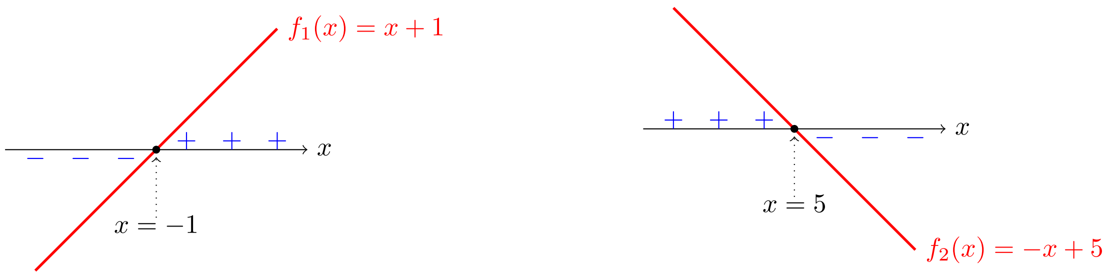
1. Grafik funkcije dat je na Slici 1.9c;
2. Funkcija je definisana za $\forall x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ tj. $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$;
3. Funkcija je rastuća $\forall x \in D_f$;
4. Znak $f(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, 0),\ f(x) > 0,\ x \in (0, \infty)$, nula funkcije $f(x) = 0$ za $x = 0$ :
5. Ograničena je $(\forall x \in D_f)\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arctg} x \leqslant \frac{\pi}{2}$;
6. Ima lijevu horizontalnu asimptotu $y = -\frac{\pi}{2}$ i desnu horizontalnu asimptotu $y = \frac{\pi}{2}$.

Funkcija arkus kotangens

1. Grafik funkcije dat je na Slici 1.9d;
2. Funkcija je definisana za $\forall x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ tj. $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$;
3. Funkcija je opadajuća $\forall x \in D_f$;
4. Znak $f(x) > 0,\ \forall x \in (-\infty, \infty)$;
5. Ograničena je $(\forall x \in D_f)\ 0 \leqslant \operatorname{arcctg} x \leqslant \pi$;
6. Ima lijevu horizontalnu asimptotu $y = \pi$ i desnu horizontalnu asimptotu $y = 0$.

**Primjer 1.9.**

Riješiti jednačinu $3x - 2|x + 1| - |5 - x| = 3$.




(a) Grafik funkcije $f_1(x) = x + 1$ (b) Grafik funkcije $f_2(x) = -x + 5$

Slika 1.10: Grafici linearnih funkcija, koji će poslužiti za oslobađanje od apsolutnih vrijednosti

Rješenje:

Odredimo prvo znak izraza $x + 1$ i $5 - x$, iskoristimo grafike linearnih funkcija $f_1(x) = x + 1$ i $f_2(x) = -x + 5$, datih na sljedećoj slici

Sada na osnovu grafika dobijamo sljedeću tabelu

| | $\infty$ | -1 | 5 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert x+1 \rvert$ | $-(x+1)$ | $x+1$ | $x+1$ | |
| $\lvert 5-x \rvert$ | $5-x$ | $5-x$ | $-(5-x)$ | |
| | I | II | III | |

Tabela 1.9: Znak funkcija $f_1(x) = x + 1$ i $f_2(x) = -x + 5$

Interval I, $x \in (-\infty, -1]$ vrijedi

$$3x - 2[-(x+1)] - (5-x) = 3 \Leftrightarrow 3x + 2x + 2 - 5 + x = 3 \Leftrightarrow 6x = 6 \Leftrightarrow x = 1 \notin (-\infty, -1].$$

Interval II, $x \in (-1, 5]$ vrijedi

$$3x - 2(x+1) - 5 + x = 3 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5 \in (-1, 5].$$

Interval III, $x \in (5, \infty)$

$$3x - 2(x+1) - [-(-x+5)] = 3 \Leftrightarrow 5 = 5,$$

ovo znači da su rješenja jednačine na intervalu III svi $x \in (5, \infty)$. Pa rješenje jednačine unija svih dobijenih rješenja na sva tri intervala $x \in \{5\} \cup (5, \infty) = [5, \infty)$.

Primjer 1.10.

Riješiti jednačinu $\left|x^2 + x - 2\right| + \left|-x^2 + x + 2\right| = 2$.

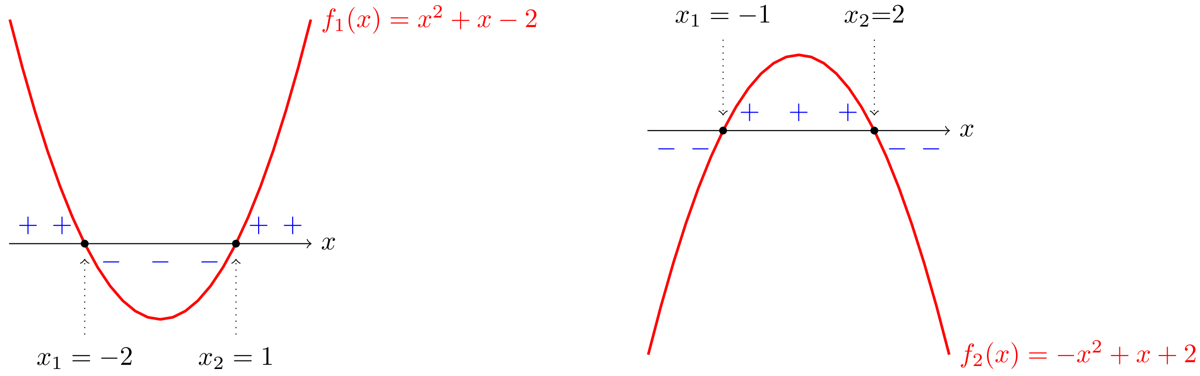
Rješenje:

Da bi odredili znak kvadratnih trinoma unutar zagrada apsolutne vrijednosti, posmatrajmo kvadratne funkcije $f_1(x) = x^2 + x - 2$ i $f_2(x) = -x^2 + x + 2$.

Nule funkcija $f_1$ i $f_2$ određujemo rješavajući odgovarajuće kvadratne jednačine po formuli $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, vrijedi

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 = -2 \lor x_2 = 1); \quad -x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 = -1 \lor x_2 = 2).$$

Znak izraza pod apsolutnim zagradama određujemo koristeći prethodne grafike




(a) Grafik funkcije $f_1(x) = x^2 + x - 2$ (b) Grafik funkcije $f_2(x) = -x^2 + x + 2$

Slika 1.11: Grafici kvadratnih funkcija, koji će poslužiti za oslobađanje od apsolutnih vrijednosti

| $\infty$ | -2 | -1 | 1 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\|x^2+x-2\|$ | $x^2+x-2$ | $-(x^2+x-2)$ | $-(x^2+x-2)$ | $x^2+x-2$ | $x^2+x-2$ |
| $\|-x^2+x+2\|$ | $-(-x^2+x+2)$ | $-(-x^2+x+2)$ | $-x^2+x+2$ | $-x^2+x+2$ | $-(-x^2+x+2)$ |
| | I | II | III | IV | V |

Tabela 1.10: Znak funkcija $f_1(x) = x^2 + x - 2$ i $f_2(x) = -x^2 + x + 2$

Interval I, $x \in (\infty, -2]$, vrijedi

$$x^2 + x - 2 - (-x^2 + x + 2) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3},\ x_{1/2} \notin (-\infty, -2].$$

Interval II, $x \in (-2, -1]$, vrijedi

$$-(x^2 + x - 2) - (-x^2 + x + 2) = 2 \Leftrightarrow x = -1,\ x = -1 \in (-2, 1].$$

Interval III, $x \in (-1, 1]$, vrijedi

$$-(x^2 + x - 2) - x^2 + x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1,\ x_2 = 1 \in (-1, 1].$$

Interval IV, $x \in (1, 2]$, vrijedi

$$x^2 + x - 2 - x^2 + x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 1,\ x = 1 \notin (1, 2].$$

Interval V, $x \in (2, \infty)$, vrijedi

$$x^2 + x - 2 - (-x^2 + x + 2) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3},\ x_{1/2} \notin (2, \infty).$$

Pa je rješenje jednačine $x \in \{-1, 1\}$.

**PRIMJER 1.11.**

Riješiti nejednačinu $|2 - x| > |x + 1| - 3$.

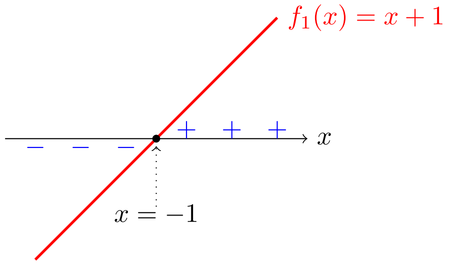
Rješenje:

Oslobađanju od zagrada apsolutne vrijednosti pristupamo na isti način kao i slučaju jednačina, koristeći sljedeće grafike.

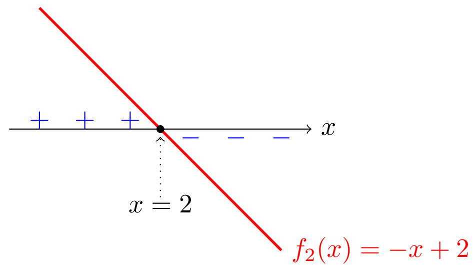
Podatke iz grafika prenesemo u tabelu.

Interval I, $x \in (-\infty, -1]$, vrijedi

$$2 - x > -(x + 1) - 3 \Leftrightarrow 2 - x > -x - 1 - 3 \Leftrightarrow 2 > -4.$$




(a) Grafik funkcije $f_1(x) = x + 1$




(b) Grafik funkcije $f_2(x) = -x + 2$

Slika 1.12: Grafici linearnih funkcija, koji će poslužiti za oslobađanje od apsolutnih vrijednosti

| | $\infty$ | -1 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert x+1\rvert$ | $-(x+1)$ | $x+1$ | $x+1$ | |
| $\lvert 2-x\rvert$ | $2-x$ | $2-x$ | $-(2-x)$ | |
| | I | II | III | |

Tabela 1.11: Znak funkcija $f_1(x) = x + 1$ i $f_2(x) = -x + 2$

Nejednakost $2 > -4$ je tačna bez na vrijednost $x$, tj. $(\forall x \in \mathbb{R})\, 2 > -4$, te je rješenje nejednačine na Intervalu I,

$$x \in \mathbb{R} \cap (-\infty, -1] = (-\infty, -1].$$

Interval II, $x \in (-1, 2]$, vrijedi

$$2 - x > x + 1 - 3 \Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow x < 2,\ x \in (-\infty, -2)$$

pa je rješenje nejednačine

$$x \in (-\infty, 2) \cap (-1, 2] = (-1, 2).$$

Interval III, $x \in (2, \infty)$, vrijedi

$$-(2 - x) > x + 1 - 3 \Leftrightarrow -2 > -2.$$

Ovo je netačna brojna nejednakost pa rješenje u ovom slučaju $\varnothing$ (prazan skup).

Rješenje nejednačine je unija rješenja na svakom posmatranom intervalu

$$x \in (-\infty, -1] \cup (-1, 2) = (-\infty, 2).$$

Primjer 1.12.

Riješiti nejednačinu $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| \leqslant 2$.

Rješenje:

Ovu nejednačinu možemo riješiti kao nejednačinu u Primjeru 1.11, međutim možemo i iskoristiti sljedeću osobinu

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow (-a < x \land x < a),\ a \in \mathbb{R}^+.$$

Koristeći prethodnu osobinu realnih brojeva, vrijedi

$$\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant \frac{2x-1}{x+1} \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant \frac{2x-1}{x+1} \land \frac{2x-1}{x+1} \leqslant 2.$$

Zatim riješimo dobijene nejednačinem jednu pa drugu. Rješenje polazne nejednačine je presjek dobijenih rješenja, u ovom slučaju

$$x \in \left[\frac{1}{4}, \infty\right).$$

NAPOMENA 1.7.

U slučaju nejednačine $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| \geqslant 2$, samo presjek treba zamijeniti sa unijom. Koristi se osobina

$$|x| > a \Leftrightarrow (x < -a \vee x > a),\ a \in \mathbb{R}^+.$$

Riješe se obje nejednačine, ali rješenje polazne nejednačine je sada unija dobijenih rješenja.

## Zadaci za vježbu

1. Dati su iskazi $p$, $q$ i $r$. Ispitati da li su sljedeće formule tautologije
   (a) $(p \Rightarrow q) \vee q$; (b) $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee \neg r)$.

2. Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4\}$. Odrediti
   (a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$; (b) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$.

3. Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, d\}$. Odrediti
   (a) $(A \cup B) \times (B \cap A)$; (b) $(A \cup B) \times (A \setminus B)$.

4. Dati su skupovi $A = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leqslant x \leqslant 5\}$ i $B = \{x \in \mathbb{N} : 4 \leqslant x \leqslant 6\}$. Odrediti relaciju $\varrho$, ako je
   (a) $\varrho = \{(x, y) : x = y\} \subseteq A \times B$, ($x$ je iz skupa $A$, $y$ iz skupa $B$);

   (b) $\varrho = \{(x, y) : y = x + 2\} \subseteq A \times B$;

   (c) $\varrho = \{(x, y) : x \geqslant y\} \subseteq A \times B$.

5. Riješiti jednačine
   (a) $|2x - 1| - 2|1 - x| = 1$; (b) $|x - 3| + |1 - 4x| = 2|x + 2|$; (c) $|2x - 1| - 3(3x + 1) = |x - 1| - 2(x + 3) - 9$;

   (d) $|2x + 1| - 3|x - 3| = |x - 1| + x + 2$; (e) $4(1 - x) + |2x - 1| = 3x - |x - 2| - 1$;

   (f) $|2x - 1| - 3(3x + 1) = |x - 1| - 2(x + 3) - 9$;

   (g) $|2x + 1| - 3|x - 3| = |x - 1| + x + 2$; (h) $4(1 - x) + |2x - 1| = 3x - |x - 2| - 1$;

   (i) $|x^2 - 4x| + 3 = x^2 + |x - 5|$; (j) $|x - 1| + |x^2 + 3x - 4| = 5$; (k) $|x - 5| + |x^2 - 2x - 8| = 7$;

   (l) $2x - |5 - |x - 2|| = 1$.

6. Riješiti nejednačine
   (a) $2 - 3|1 - x| - 2x \leqslant 1 - 4x - 2|2x + 3|$; (b) $|x + 1| + |3x - 1| > 2$;

   (c) $|2x - 1| - 3(3x + 1) < |x - 1| - 2(x + 3) - 9$;

   (d) $|2x + 1| - 3|x - 3| \leqslant |x - 1| + x + 2$; (e) $4(1 - x) + |2x - 1| \geqslant 3x - |x - 2| - 1$;

   (f) $\left|\dfrac{2x - 1}{x + 1}\right| \leqslant 2$; (g) $\left|\dfrac{x - 1}{2x + 1}\right| < 1$; (h) $\left|\dfrac{x + 1}{2x - 3}\right| \geqslant \dfrac{1}{2}$;

   (i) $|x^2 - x| - |x| < 1$; (j) $|x^2 - 3x + 2| - 1 > |x - 3|$ (k) $|x^2 - 7x + 10| - |x - 3| < 6$

   (l) $|x - 1| + |x^2 + 3x - 4| \geqslant 5$; (m) $|x^2 - 2x - 3| + 2 - 2x \geqslant |x - 4| + x^2$; (n) $|x^2 + 2x - 3| < 3x + 3$;

   (o) $|x^2 - 4x| + 3 \geqslant x^2 + |x - 5|$; (p) $\left|\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 4x + 3}\right| < 1$.

# Poglavlje 2

# Procentni račun. Račun smjese.

## 2.1 Razmjere i proporcije

U raznim proračunima, u prirodnim, inžinjerskim naukama i dr., često se pojavljuju razmjere, odnosi ili omjeri nekih veličina.

Definicija 2.1 (Razmjera).

Razmjera (ili omjer) dva broja $a$ i $b$ ($a$, $b > 0$) je njihov količnik. Pišemo

$$a : b \text{ ili } \frac{a}{b},\ a, b > 0.$$

Ako su dvije razmjere $a : b$, i $c : d$ jednake, dobijamo proporciju.

Definicija 2.2 (Prosta proporcija).

Jednakost koju formiraju jednake razmjere nazivamo proporcija. Pišemo

$$a : b = c : d \text{ ili } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Proporcije imaju osobinu

$$\boxed{a : b = c : d = (a \pm c) : (b \pm d).}$$

Ako je više razmjera jednako, vrijedi

$$\boxed{a : b = c : d = e : f = p : q \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow a : c : e : p = b : d : f : q.} \tag{2.1}$$

Proporcije u prethodnom izrazu (2.1) nazivamo produžene proporcije.

Primjer 2.1.

Odrediti $x$ iz proporcije $(x + 9) : 6 = x : 5$.

Rješenje:

$(x + 9) : 6 = x : 5 \Leftrightarrow 5(x + 9) = 6x \Leftrightarrow x = 45.$

PRIMJER 2.2.

Primjenom osobina produžene proporcije odrediti $x, y, z$ i $t$, ako je
$x + y + z + t = 198$ i $x : y : z : t = 1 : 2 : 3 : 5$.

Rješenje:

Iz produžene proporcije vrijedi

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \frac{t}{5} = k,$$

pa je

$$x = k,\ y = 2k,\ z = 3k,\ t = 5k.$$

Sada u jednakosti $x + y + z + t = 198$, zamijenimo $x, y, z$ i $t$ preko $k$, dobijamo

$$k + 2k + 3k + 5k = 198 \Leftrightarrow 11k = 198 \Leftrightarrow k = 18,$$

pa je na kraju

$$x = 18,\ y = 36,\ z = 54,\ t = 90.$$

PRIMJER 2.3 (Direktna proporcija.).

Tri majice koštaju 90 KM. Koliko majica možemo kupiti za 240 KM?

Rješenje:

Vrijedi $3 : 90 \text{ KM} = x : 240 \text{ KM} \Leftrightarrow x \cdot 90 \text{ KM} = 3 \cdot 240 \text{ KM} \Leftrightarrow x = 8$.

PRIMJER 2.4 (Obrnuta proporcija.).

Jedan vagon vreća krompira istovarila su tri radnika za 12 sati. Za koliko će sati taj vagon istovariti 4 radnika?

Rješenje:

Vrijedi $3 : 4 = x \,\text{sati} : 12 \,\text{sati} \Leftrightarrow 4x = 36 \Leftrightarrow x = 9$ sati.

## 2.2 Procentni račun

Ako označimo sa

$$G-\text{ glavnicu}$$
$$p-\text{ procenat}$$
$$I-\text{ iznos,}$$

tada vrijedi proporcija

$$\boxed{G : 100 = I : p.} \tag{2.2}$$

Glavnica je ukupan iznos ili količina nekog dobra, iznos je dio glavnice, dok je procenat stoti dio glavnice. Oznaka za 1 procenat je

$$1 \text{ procenat} = 1\%.$$

Dakle $1\% = \frac{1}{100}$ glavnice, glavnici odgovara 100%, a iznosu $I$ vrijednost $p$.

Primjer 2.5.

U grupi je bilo 32 studenta i studentice, sljedeću godinu upisalo je 30-oro. Koliki je procenat prolaznosti?

Rješenje:

Vrijedi $G = 32$, $I = 30$, pa je

$$32 : 100\% = 30 : p \iff 32p = 3000\% \iff p = 93.75\%.$$

Prolaznost je 93.75%.

Primjer 2.6.

Cijena nekog proizvoda je smanjena za 10%, a zatim je povećana za 15%, i sada iznosi 60 KM. Kolika je prvobitna cijena?

Rješenje:

Koristićemo oznaku $C$ za cijenu, i to $C_1$, $C_2$, $C_3$ za prvu, drugu i treću cijenu, respektivno. Vrijedi proporcija

$$C_1 : 100\% = C_2 : (100\% - 10\%) \iff C_2 = \frac{9}{10}C_1,$$

ili

$$C_2 = C_1 - \frac{1}{10}C_1 = \frac{9}{10}C_1, \left(10\% \text{ odgovara } \frac{1}{10}\right).$$

Sljedeće

$$C_3 = C_2 + 0.15C_2 = 1.15C_2 = 1.15 \cdot 0.9C_1 \iff C_1 = \frac{C_3}{1.15 \cdot 0.9} = \frac{60}{1.15 \cdot 0.9} \approx 57.97 \text{ KM}.$$

Napomena 2.1.

Osim procenta koristi se i promil. Promil je hiljaditi dio od neke cjeline, oznaka za 1 promil je

$$1 \text{ promil } = 1‰.$$

## 2.3 Račun smjese

**Jednostavni (ili prosti) račun smjese** Ponekad je potrebno pomiješati proizvode različitih cijena kako bi se dobio proizvod neke zadane cijene. Na primjer trgovac ima u skladištu kafu od 3 KM i kafu od 15 KM. Prva kafa je lošijeg kvaliteta, a druga je preskupa za maloprodaju i on se odlučuje da ih pomiješa da bi dobio kafu unaprijed zadane mase, koja košta 8 KM po kilogramu, koja neće biti ni preskupa a biće zadovoljavajućeg kvaliteta.

Sa matematičke strane, isti problem je u npr. miješanju dvije kiseline različitih koncentracija da bi se dobila kiselina sa unaprijed zadanom koncetracijom i unaprijed zadane zapremine. Preciznija formulacija problema glasi:
U kojem odnosu i u kojim količinama treba pomiješati tačno dvije veličine (dva sastojka) $x_1$ i $x_2$ koje imaju neko zajedničko svostvo različitih vrijednosti (intenziteta) $s_1$ i $s_2$, tako da se dobije smjesa ukupne količine $x$ i željenog intenziteta $s$? Problem rješavamo rješavanjem sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x \\ x_1 s_1 + x_2 s_2 &= xs, \end{aligned}$$

sada zbog $x_2 = x - x_1$, dobijamo linearnu jednačinu sa jednom nepoznatom

$$x_1 s_1 + (x - x_1)s_2 = xs,$$

čijim rješavanjem dobijamo $x_1$, a $x_2$ iz $x_2 = x - x_1$. Traži odnos računamo iz

$$\frac{x_1}{x_2}.$$

PRIMJER 2.7 (Prost račun smjese.).

Imamo 48% i 78% kiselinu. Koliko je potrebno jedne, a koliko druge nasuti u posudu da bi se dobilo 10 l, 60%–ne kiseline?

Rješenje:

Označimo jednu koncentraciju sa $s_1 = 48\%$, odgovarajuću količinu sa $x_1$, druga koncentracija je $s_2 = 78\%$ i odgovarajuća količina je $x_2$. Ukupna količina je $x_1 + x_2 = x = 10$ l, dok je odgovarajuća koncetracija poslije miješanja $s = 60\%$.
Sada vrijedi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 10 \text{ l} \\ x_1 s_1 + x_2 s_2 &= xs, \end{aligned}$$

kako je $x_2 = 10 \text{ l} - x_1$, dobijamo

$$x_1 \cdot 0.48 + (10 - x_1) \cdot 0.78 = 10 \cdot 0.6 \Leftrightarrow x_1 = 6 \text{ l}.$$

Potrebno je 6 l, 48%– kiseline i 4 l, 78%–kiseline.

PRIMJER 2.8 (Jednostavni račun smjese).

Sa koliko postotnom kiselinom, treba pomiješati 6 l, 48%–ne kiseline, da bi se dobilo 10 l, 60%–ne kiseline?

Rješenje:

Sada vrijedi

$$4p + 6 \cdot 0.48 = 10 \cdot 0.6 \Leftrightarrow p = 0.78,$$

ili u procentima 78%.

**Složeni račun smjese** Ako imamo više od dvije veličine koje trebamo pomiješati dobijamo sljedeći problem: U kojem odnosu i u kojim količinama treba pomiješati neke veličine iste vrste $x_1, x_2, \dots, x_n$, koje imaju neko zajedničko svojstvo različitih vrijednosti $s_1, s_2, \dots, s_n$ da bi dobili smjesu ukupne količine $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ i željenog intenziteta $s$?

Ovaj problem rješavamo algoritmom šema zvijezde koji ćemo ilustrovati na sljedećem primjeru.

PRIMJER 2.9 (Složeni račun smjese).

U skladištu su 4 vrste robe po cijenama 160, 140, 110 i 50 KM (svojstva). Kako treba izmiješati ovu robu po vrstama da bi dobili 560 kg ove robe po cijeni od 120 KM po kilogramu?

Rješenje:

U šemi su unešene na lijevoj strani cijene pojedinih roba (vidjeti Sliku 2.1), tj. svojstva $s_1, s_2, s_3, s_4$, treba izračunati kolike mase su pojedinih vrsta robe koje treba izmiješati (u ovom zadatku ove mase su označena sa $x_1, x_2, x_3, x_4$). u sredini je tražena cijena, dok su na desnoj strani tražene vrijednosti iz proporcije (ove vrijednosti trebaju biti pozitivne, tj. uzimaju se po apsolutnoj vrijednosti, zato uvijek oduzimamo od veće vrijednosti manju).

Iz sheme na Slici 2.1 dobijemo sljedeću proširenu proporciju

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 70 : 10 : 20 : 40 \Leftrightarrow x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 7 : 1 : 2 : 4.$$

Iz prethodne proširene proporcije vrijedi

$$\frac{x_1}{7} = k \Leftrightarrow x_1 = 7k$$
$$\frac{x_2}{1} = k \Leftrightarrow x_2 = k$$
$$\frac{x_3}{2} = 2k \Leftrightarrow x_3 = 2k$$
$$\frac{x_4}{4} = 4k \Leftrightarrow x_4 = 4k.$$

Koristimo sada ukupnu masu robe

$$7k + k + 2k + 4k = 560 \Leftrightarrow 14k = 560 \Leftrightarrow k = 40.$$

Tražene vrijednosti dobijamo na sljedeći način:

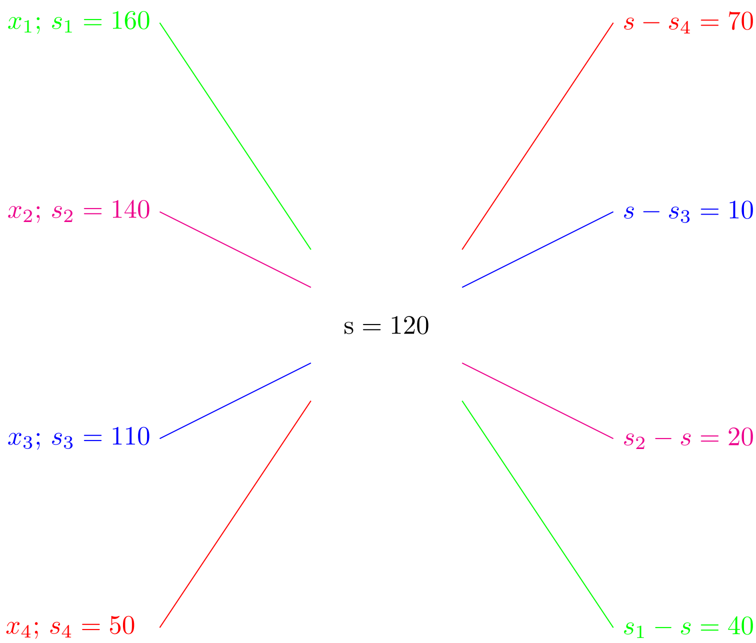
Robe čija je cijena $s_1 = 160$ KM potrebno je $x_1 = 7 \cdot 40$ kg $= 280$ kg;
Robe čija je cijena $s_2 = 140$ KM potrebno je $x_2 = 1 \cdot 40$ kg $= 40$ kg;
Robe čija je cijena $s_3 = 110$ KM potrebno je $x_3 = 2 \cdot 40$ kg $= 80$ kg;
Robe čija je cijena $s_4 = 50$ KM potrebno je $x_4 = 4 \cdot 40$ kg $= 160$ kg .

Provjera

$$280 + 40 + 80 + 160 = 560,$$

i

$$280 \cdot 160 + 40 \cdot 140 + 80 \cdot 110 + 160 \cdot 50 = 560 \cdot 120$$
$$67200 = 67200.$$




Slika 2.1: Šema za dobijanje proširene proporcije

Napomena 2.2.

Ovaj zadatak nema jedinstveno rješenje.

## 2.4 Zadaci za vježbu

1. Riješiti proporciju (a) $(x-3):4=10:6$; (b) $x:\left(1+\frac{1}{11}\right)=\left(3+\frac{2}{3}\right):2$.
2. Podijeliti duž od 456 m na tri jednaka dijela čije će dužine biti redom proporcionalne brojevima $\frac{2}{3}$, $\frac{9}{8}$ i $\frac{7}{12}$.
3. Unuk, otac i djed imaju zajedno 120 godina. Koliko svaki od njih ima godina, ako su im godine u razmjeri $1:5:9$?
4. Tri osobe uložile su u jedan posao ove svote novca: osoba A 1200 KM, osoba B 9000 KM i osoba C 15000 KM. Ako je ukupna zarada od tog posla 210000 KM, koji dio zarade će pripasti osobi C, (zarada treba da je proporcionalna uloženoj svoti novca)?
5. Brojevi $a, b$ i $c$ su u razmjeri $2:3:4$. Ako je njihova aritmetička sredina 15, koliko iznosi najmanji od njih?
6. Omjer šećera i maslaca u kolaču je $4:3$. U kolač je stavljeno 0.3 kg maslaca. Koliko ćemo staviti šećera u kolač?
7. Sanduk voća težak je 90 kg, od čega je neupotrebljivo 4%. Kolika je težina upotrebljivog voća?
8. Odsutna su 4 studenta, što iznosi 12.5% od ukupnog broja studenata jedne grupe. Koliko studenata ima u toj grupi?
9. Koliko litara mliječne masti ima u 300 l mlijeka, ako to mlijeko sadrži 2.8% mliječne kiseline?
10. Cijena cipela je 270 KM. Kolika će cijena biti nakon sniženja od 15%?
11. Poslije prelaska na novo radno mjesto jednom radniku plata je povećana za 20%. Kolika je plata bila ako je to povećanje 132 KM?
12. Cijena knjige snižena je 10%, a zatim za 20% i sada košta 45 KM. Kolika je bila cijena prije prvog sniženja?
13. Na ispitu radila su se 3 zadatka. Pri tome 12% studenata nije riješilo ni jedan zadatak, 32% studenata riješilo je jedan ili dva zadatka, dok je 14% studenata riješilo sva tri zadatka. Koliko je ukupno studenata radilo ispit?
14. Poslije 3 pojeftinjenja od po 10% cijena robe iznosi 2187 KM. Izračunati prvobitnu cijenu robe?
15. U tri vreće ima 64.2 kg brašna. U prvoj vreći ima 20% manje brašna nego u drugoj, a u trećoj 42.5% od količine brašna iz prve vreće. Koliko brašna ima u svakoj vreći?
16. Na skladištu ima kafe po cijeni od 7.5 KM i 5.5 KM po kg. Napraviti 120 kg mješavine kafe koja će koštati po 6.8 KM po kg.
17. Koliko vode temperature $40^0C$ i vode temperature $25^0C$ treba pomiješati da se dobije 90 l vode temperature $30^0C$?
18. Koliko treba uzeti sumporne kiseline jačine 52% , a koliko jačine 88% da se dobije mješavina od 144 l jačine 72%?
19. Komad bronze mase 7.5 kg sadrži 72.% bakra. Kada se ovaj komad stopi sa drugim dobije se 10 kg bronze koja sadrži 70% bakra. Koliko je procenata bakra bilo u drugom komadu bakra?
20. Koliko litara 80% alkohola treba dodati u 1 l vode da se dobije 20%–tni alkohol?
21. Imamo 4 vrste neke robe po cijeni od 120, 100, 70 i 50 KM. Kako treba pomiješati tu robu da dobijemo 400 kg robe po cijeni od 80 KM? Koliko mogućih rješenja postoji?
22. Koliko bakra treba pomiješati sa 21 g čistog zlata da se dobije smjesa finoće 0.75?
23. Razblažen je 75% špirit sa 12 l vode i dobijen je 51%– postotni špirit. Kolika je bila prvobitna količina špirita?
24. Koliko vode treba izmiješati sa 150 g, 12%–nog rastvora kiseline da smjesa bude 4%–postotna?
25. Zlatar izmiješa dvije vrste zlata čije su finoće 0.75 i 0.81 ($f$–finoća zlatne smjese $0 \leqslant f \leqslant 1$) i dobije se 50 g zlata finoće 0.774. Po koliko je grama zlata uzeo obje vrste zlatar?
26. Kada se pomiješa 60 l ruma od 72% sa 70 l alkohola od 96%. Koliko treba vode dosuti u ovu smjesu da se dobije rum od 46%?
27. Koliko 75%–tne otopine soli treba dodati u 20 l da se dobije 60%–tna otopina soli?

# Poglavlje 3

# Kompleksni brojevi

Proširenjem pojma broja došlo se do polja realnih brojeva $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. U polju realnih brojeva sve jednačine oblika

$$\begin{aligned} a + x &= b, \\ c \cdot x &= d, \\ x^n &= p \\ x^{2n+1} &= q, \end{aligned}$$

gdje su $a, b, d \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, q \in \mathbb{R}^-$, a $n \in \mathbb{N}$, možemo riješiti. Međutim ponovo je potrebno izvršiti proširenje, jer npr. jednostavna jednačina

$$x^2 + 1 = 0,$$

nije imala rješenje u $\mathbb{R}$.

Ponovo je potrebno izvršiti proširenje, ovaj put skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Definišimo na skupu

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\},$$

operacije sabiranja + i množenja · na sljedeći način

$$\boxed{(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\ (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),}$$

$$\boxed{(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\ (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).}$$

Uređena trojka $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ je polje. Ovo polje naziva se polje kompleksnih brojeva i obilježava se sa $\mathbb{C}$, dok njegove elemente nazivamo kompleksni brojevi. Pokazuje se da vrijede svi aksiomi polja.

Napomena 3.1.

Za polje kompleksnih brojeva koristiti se češće oznaka $\mathbb{C}$, umjesto $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Ista oznaka $\mathbb{C}$ koristiti se i za sam skup kompleksnih brojeva. Iz samog konteksta vidi se radi li se o skupu ili polju, a ako se ne vidi onda se naglasi o čemu se radi.

Kompleksni broj $(0, 0)$ zvaćemo kompleksna nula, a kompleksni broj $(1, 0)$ kompleksna jedinica i označavaćemo

$$(0, 0) = 0$$

i

$$(1, 0) = 1.$$

Kompleksni broj $(0, 1)$ označićemo sa $i$, tj.

$$(0, 1) = i,$$

zvaćemo imaginarna jedinica. Sad vrijedi,

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x(1, 0) + y(1, 0)(0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot 1 \cdot i = x + yi.$$

Oblik
$$x + yi$$
naziva se algebarski oblik kompleksnog broja. Pri tome je
$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1.$$

Vrijedi
$$\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i \cdot i^2 = -i \\ i^4 &= -1 \cdot (-1) = 1 \\ i^5 &= i \cdot i^4 = i \\ &\vdots \end{aligned}$$
te je
$$\boxed{i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,\ n \in \mathbb{N}.}$$

Za kompleksni broj $z = x + yi$, realni broj $x$ je realni dio kompleksnog broja $z$ i piše se
$$\boxed{x = \mathrm{Re}(z),}$$
a realan broj $y$ je imaginarni dio kompleksnog broja $z$, i piše se
$$\boxed{y = \mathrm{Im}(z).}$$
Za dva kompleksna broja $z_1$ i $z_2$ vrijedi
$$\boxed{z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \wedge \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2).} \tag{3.1}$$
Vrijedi ako je $\mathrm{Im}(z) = 0$, tada $z \in \mathbb{R}$. Ali ako je $\mathrm{Im}(z) \neq 0 \wedge \mathrm{Re}(z) = 0$, tada je kompleksni broj čisto imaginaran.

NAPOMENA 3.2.

Polje $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nije uređeno kao polje $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Pretpostavimo suprotno da se može definisati relacija poretka $\leqslant$ u $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Tada bi za $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ vrijedilo $z_1 \leqslant z_2$ ili $z_2 \leqslant z_1$. Prethodno vrijedi i za $0$ i za $i$, dakle imamo $0 \leqslant i$ ili $i \leqslant 0$. Iz $0 \leqslant i \Rightarrow 0 \leqslant i^2 = -1$. Kontradikcija. Slično, iz $i \leqslant 0$ slijedi $0 \leqslant -i$ a sada je $0 \leqslant i^2 = -1$, što ponovo dovodi ko kontradikcije.

**Konjugovano–kompleksni broj** Za kompleksni broj $z = x + yi$, broj $\overline{z} = x - yi$ je konjugovano–kompleksni broj kompleksnog broja $z$. Vrijedi
$$\begin{aligned} \overline{\overline{z}} &= z, \\ \frac{z + \overline{z}}{2} &= \frac{x + yi + x - yi}{2} = x = \mathrm{Re}(z), \\ \frac{z - \overline{z}}{2i} &= \frac{x + yi - (x - yi)}{2i} = y = \mathrm{Im}(z), \\ z \cdot \overline{z} &= (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2. \end{aligned}$$

**Operacije $+,-,\cdot,:$ sa kompleksnim brojevima u algebarskom obliku** Neka su kompleksni brojevi $z_1$ i $z_2$ dati u algebarskom obliku, tj. $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z - 2 = x_2 + y_2 i$. Sabiranje, oduzimanje, množenje i dijeljenje se svodi na

$$z_1 + z_2 = x_1 + y_1 i + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = x_1 + y_1 i - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_2 + y_2 i}{x_1 + y_1 i} = \frac{x_2 + y_2 i}{x_1 + y_1 i} \cdot \frac{x_1 - y_1 i}{x_1 - y_1 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} i, \; z_1 \neq 0.$$

Primjer 3.1.

Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 2 - 5i$.
Izračunati $(a)$ $z_1 + z_2$; $(b)$ $z_1 - z_2$; $(c)$ $z_1 \cdot z_2$; $(d)$ $\frac{z_2}{z_1}$, te odrediti $\mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_2}\right)$ i $\mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_2}\right)$; $(e)$ $\frac{\overline{z}_1}{z_1 + \overline{z}_2}$. Rješenje: Vrijedi

(a) $z_1 + z_2 = 3 + 4i + 2 - 5i = 5 - i$;

(b) $z_1 - z_2 = 3 + 4i - (2 - 5i) = 1 + 9i$;

(c) $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i) \cdot (2 - 5i) = 6 - 15i + 8i - 20i^2 = 6 - 7i - (-20) = 26 - 7i$;

(d) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2 - 5i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{(2 - 5i)(3 - 4i)}{9 + 16} = \frac{6 - 8i - 15i + 20i^2}{25} = \frac{-14 - 23i}{25} = -\frac{14}{25} - \frac{23}{25}i$;
te je $\mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{14}{25}$, $\mathrm{Im}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{23}{25}$;

(e) $\frac{\overline{z}_1}{z_1 + \overline{z}_2} = \frac{3 - 4i}{3 + 4i + 2 + 5i} = \frac{3 - 4i}{5 + 9i} \cdot \frac{5 - 9i}{5 - 9i} = \frac{15 - 27i - 20i + 36i^2}{25 + 81} = \frac{-21 - 47i}{106}$.

Primjer 3.2.

Odrediti $x$ i $y$ iz jednakosti $z + 3x - 2\overline{z} = 2 + 3i$.

Rješenje: Iz $z = x + yi$ i $\overline{z} = x - yi$, dobijamo

$$x + yi + 3x - 2(x - yi) = 2 + 3i \Leftrightarrow 2x + 3yi = 2 + 3i,$$

sada iz jednakosti dobijamo $2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ i $3y = 3 \Leftrightarrow y = 1$.

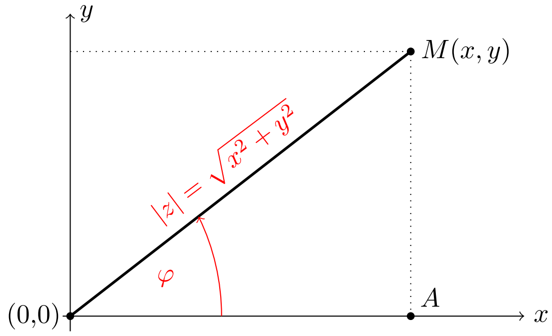
### 3.0.1 Geometrijska interpretacija kompleksnog broja

Kompleksan broj $z$ možemo intrepretirati kao tačku u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu u ravni. Svakom kompleksnom broju $z$ obostrano–jednoznačno ćemo pridružiti tačku u $xOy$ ravni. Ova ravan je Gaußova[1] ili kompleksna ravan. Na $x$–osu nanosimo realni dio kompleksnog broja $z$ i zovemo je realna osa, dok na $y$–osu nanosimo imaginarni dio kompleksnog broja i zovemo je imaginarna osa.

Posmatrajmo proizvoljan kompleksni broj $z = x + yi$ predstavljen na Slici 3.1 tačkom $M(x, y)$. Funkcija $|\cdot| : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definisana sa

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

[1]Johann Carl Friedrich Gauß (30. april 1777.–23. februar 1855.godine) bio je njemački matematičar koji je dao doprinos u mnogim oblastima matematike, kao npr. teorija brojeva, algebra, statistika, analiza, diferencijalna geometrija i dr.




Slika 3.1: Predstavljanje tačke $M(x, y)$ u Gaußovoj ravni

je modul kompleksnog broja $|z|$ (ili $\rho$). Kako je $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$, to je $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$. Geometrijski modul $|z|$ kompleksnog broja $z$ predstavlja rastojanje tačke $M(x, y)$ od koordinatnog početka $(0, 0)$.

Posmatrajmo funkciju $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto (-\pi, \pi]$ definisanu sa

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0 \wedge y \geqslant 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0 \wedge y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y < 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

gdje je $z = x + yi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Broj $\arg z$ je glavna vrijednost ili glavni argument kompleksnog broja $z$.

NAPOMENA 3.3.

Argument kompleksnog broja $\arg z$ u zadacima označavaćemo sa $\varphi$ i predstavlja vrijednost ugla, čiji je jedan krak pozitivna realna osa a drugi krak je poluprava koja polazi iz koordinatnog početka i prolazi kroz tačku $M(x, y)$ (Slika 3.1).

PRIMJER 3.3 (Praktično određivanje ugla $\varphi$).

Odrediti vrijednost modula $|z|$ i argumenta $\arg z$, tj. $\varphi$, kompleksnog broja $|z|$, ako je
$(a)$ $z = 4\sqrt{3} + 4i$; $(b)$ $z = -4\sqrt{3} + 4i$; $(c)$ $z = -4\sqrt{3} - 4i$; $(d)$ $z = 4\sqrt{3} - 4i$; $(e)$ $z = 4\sqrt{3}$; $(f)$ $z = 4i$; $(g)$ $z = -4\sqrt{3}$; $(h)$ $z = -4i$.

Rješenje:

Vrijedi (vidi Sliku 3.2)

$(a)$ $x = 4\sqrt{3}$, $y = 4$, pa je $|z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$, dok je $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, Slika 3.2 gore desno.

$(b)$ $x = -4\sqrt{3}$, $y = 4$, Slika 3.2 gore lijevo, $|z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$, sa slike je $\varphi = \pi - \alpha$, iz trougla $\triangle AOB$ je $\alpha = \operatorname{arcctg} \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, pa je na kraju $\varphi = \frac{5\pi}{6}$;

$(c)$ $x = -4\sqrt{3}, y = -4$, sa Slike 3.2 dole lijevo je $\varphi = \pi + \alpha$, dok je $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, te je $\varphi = \frac{7\pi}{6}$;

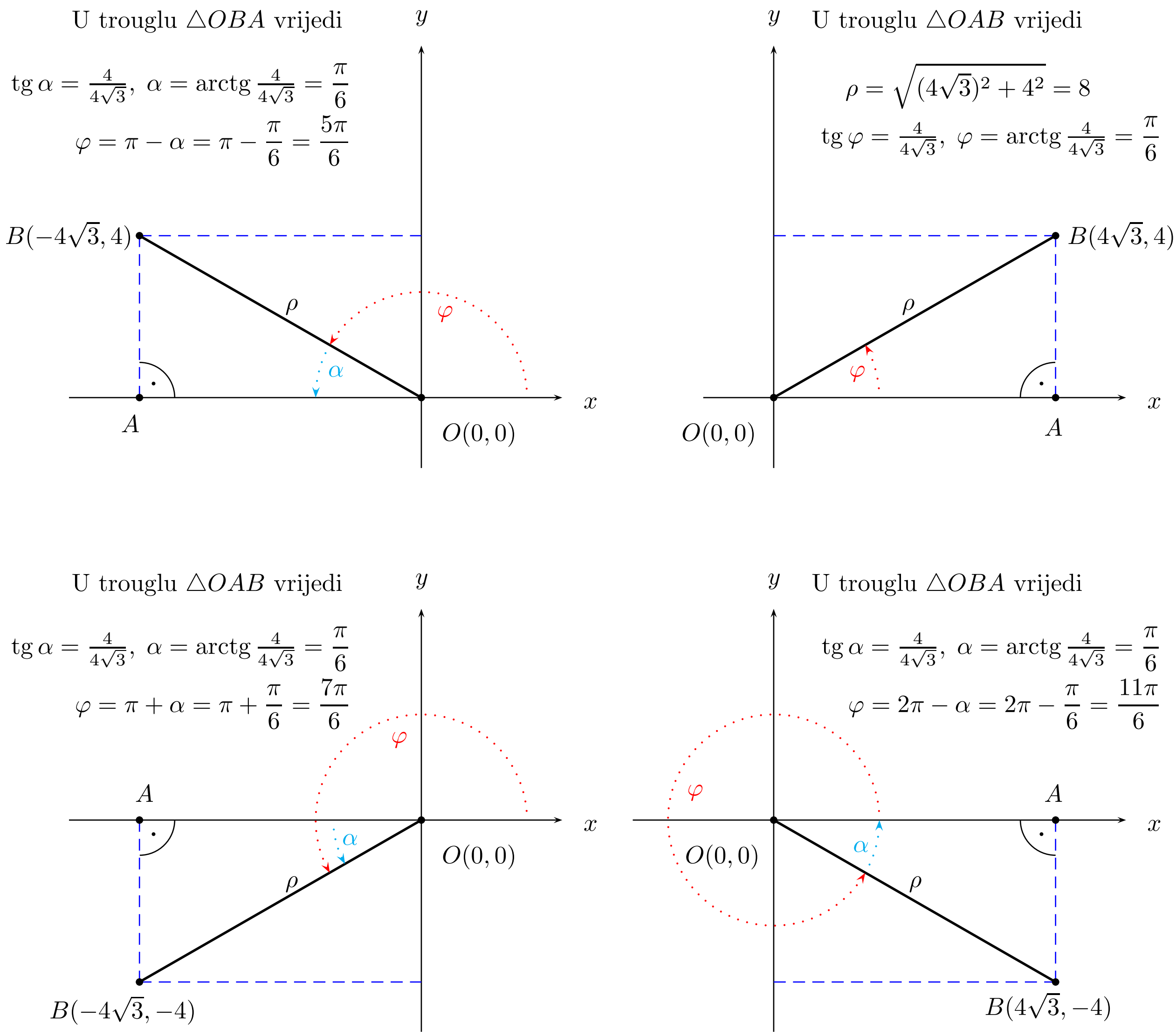
$(d)$ $x = 4\sqrt{3}$, $y = -4$, sa Slike 3.2 dole desno je $\varphi = 2\pi - \alpha$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{11\pi}{6}$;

$(e)$ $x = 4\sqrt{3}$, $y = 0$, $|z| = 4\sqrt{3}$, $\varphi = 0$;

$(f)$ $x = 0$, $y = 4i$, $|z| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$;

$(g)$ $x = -4\sqrt{3}$, $y = 0$, $|z| = 4\sqrt{3}$, $\varphi = \pi$;

$(h)$ $x = 0$, $y = -4i$, $|z| = 4$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.




Slika 3.2: Određivanje ugla

**Trigonometrijski oblik kompleksnog broja** Za $z = x + yi$, $\rho = |z|, \theta = \arg z$ sa Slike 3.1 iz trougla $\triangle OAM$ vrijedi

$$x = \rho\cos\theta, \ y = \rho\sin\theta, \ \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}, \ x \neq 0.$$

Ako je $x = 0$, $y > 0$, tada je $\arg z = \frac{\pi}{2}$, odnosno za $x = 0$, $y < 0$, je $\arg z = -\frac{\pi}{2}$. Sada dobijamo trigonometrijski oblik kompleksnog broja $z = x + yi$

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta.)}$$

**Množenje i dijeljenje kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku.** Neka su data dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ i $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Vrijedi

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)] \cdot [\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)] \\ &= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2))]. \end{aligned}$$

Množenje dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku vršimo po formuli

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}\cdot\frac{\cos\theta_2-i\sin\theta_2}{\cos\theta_2-i\sin\theta_2}\\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}\\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].
\end{aligned}$$

Dijeljenje dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku vršimo po formuli

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]}$$

Primjer 3.4.

Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 1+i$, $z_2 = 8(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$, $z_3 = 2(\cos 121^0 + i\sin 121^0)$, $z_4 = \cos 14^0 + i\sin 14^0$. Izračunati $\frac{z_1\cdot z_2}{z_3\cdot z_4}$.

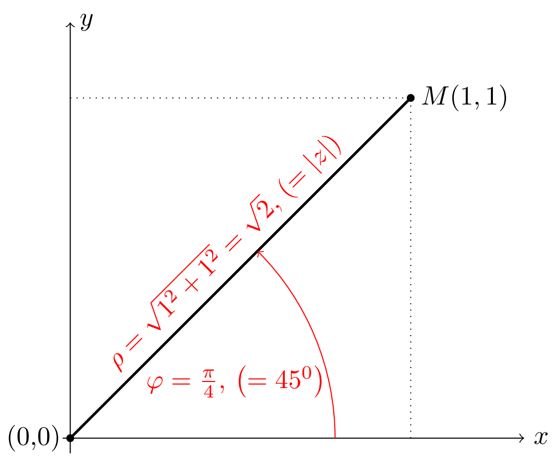
Rješenje:

Vidi Sliku 3.3, prvo prevedemo $z_1$ u trigonometrijski oblik kompleksnog broja, sa Slike 3.3 je $z_1 = \sqrt{2}(\cos 45^0 + i\sin 45^0)$, pa je sada

$$\begin{aligned}
\frac{z_1\cdot z_2}{z_3\cdot z_4} &= \frac{\sqrt{2}(\cos 45^0+i\sin 45^0)\cdot 8(\cos 150^0+i\sin 150^0)}{2(\cos 121^0+i\sin 121^0)\cdot(\cos 14^0+i\sin 14^0)}\\
&= \frac{8\sqrt{2}(\cos 195^0+i\sin 195^0)}{2(\cos 135^0+i\sin 135^0)} = 4\sqrt{2}[\cos(195^0-135^0)+i\sin(195^0-135^0)]\\
&= 4\sqrt{2}(\cos 60^0+i\sin 60^0).
\end{aligned}$$

Rezultat možemo napisati i u algebarskom obliku kompleksnog broja

$$\frac{z_1\cdot z_2}{z_3\cdot z_4} = 4\sqrt{2}(\cos 60^0+i\sin 60^0) = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}+2\sqrt{6}i.$$




Slika 3.3: Kompleksni broj $z_1 = 1+i$ u Gaußovoj ravni

**Eksponencijalni ili Eulerov oblik kompleksnog broja.** Ako uvedemo oznaku $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, kompleksni broj $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ možemo pisati u obliku

$$\boxed{z = \rho e^{\theta i}}$$

ovaj oblik zovemo eksponencijalni ili Eulerov[2] oblik kompleksnog broja.

Vrijedi

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{\theta_1 i} \cdot \rho_2 e^{\theta_2 i} = \rho_1 \rho_2 e^{(\theta_1+\theta_2)i}$$

i

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{\theta_1 i}}{\rho_2 e^{\theta_2 i}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{(\theta_1-\theta_2)i}.$$

**Stepenovanje kompleksnog broja.** Neka je $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Na osnovu matematičke indukcije[3] slijedi

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \ldots \cdot \rho_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)].$$

Ako je $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$, onda je $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n$ i $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n$, dobijamo

$$\boxed{z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

ili u eksponencijalnom obliku

$$\boxed{z^n = \rho^n e^{n\theta i}}$$

Moivreov (Moavrov) obrazac (ili formula)

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.}$$

**Korjenovanje kompleksnog broja.** Neka je data jednačina

$$z^n = u,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$, a $u$ je kompleksan broj različit od nule. Tada pišemo

$$z = \sqrt[n]{u}.$$

Potrebno je za broj $u$ odrediti kompleksni broj $z$. Neka je $u = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Tada je $(\rho(\cos\theta + i\sin\theta))^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, pa na osnovu jednakosti kompleksnih brojeva $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, odakle je

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Međutim, različite vrijednosti cijelih brojeva ne daju u suštini različite argumente. Ako uzmemo da je $k = n$ biće $\frac{\varphi+2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$, ista se vrijednost dobije za $k = 0$. Slično, dobijamo da je $\frac{\varphi+2(n+k)\pi}{n} = \frac{\varphi+2k\pi}{n} + 2\pi$. Dakle, poslije $n$ uzastopnih cijelih brojeva kompleksni brojevi se ponavljaju, pa imao $n$ različitih vrijednosti $\sqrt[n]{u}$, a to su

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, \ldots, n-1}$$

ili u eksponencijalnom obliku

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\ k = 0, \ldots, n-1.}$$

Sva ova rješenja leže na kružnici poluprečnika $\sqrt[n]{r}$ i čine tjemena pravilnog $n$–to ugla, čije je jedno tjeme $(z_0)$ sa argumentom $\frac{\varphi}{n}$, a za svako sljedeće tjeme argument se povećava za $\frac{2\pi}{n}$.

[2]Leonhard Euler (15. april 1707.–18. septembar 1783. godine) bio je švajcarski matematičar, fizičar, astronom, logičar, inžinjer. Dao veliki doprinos u mnogim oblastima matematike.

[3]Princip matematičke indukcije: Jedan iskaz $P(n)$ istinit je za svaki prirodan brod $n$, 1) Ako je istinit za prirodan broj 1; 2) Ako implikacija $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ važi za svaki prirodan broj $n$.

PRIMJER 3.5.

Dat je kompleksni broj $z = i^{81} + i^{43} + \frac{(-1-i)^{80}}{2^{40}} + i^{19}$. Izračunati $\sqrt[3]{z}$.

Rješenje:

Izračunajmo prvo $\frac{(-1-i)^{80}}{2^{40}}$, prevedemo ovaj kompleksni broj u trigonometrijski oblik, sa Slike 5.1a je

$$\begin{aligned}\frac{(-1-i)^{80}}{2^{40}} &= \frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^{80}}{2^{40}}\\ &= \frac{2^{40}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\cdot 80\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\cdot 80\right)\right]}{2^{40}} = \cos 100\pi + i\sin 100\pi = 1,\end{aligned}$$

pa je sada

$$z = i^{81} + i^{43} + \frac{(-1-i)^{80}}{2^{40}} + i^{19} = i^{4\cdot 20+1} + i^{4\cdot 10+3} + 1 + i^{4\cdot 4+3} = 1 - i.$$

Koristeći Sliku 5.1b pretvorimo kompleksni broj iz algebarskog u trigonometrijski oblik, i dobijamo

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

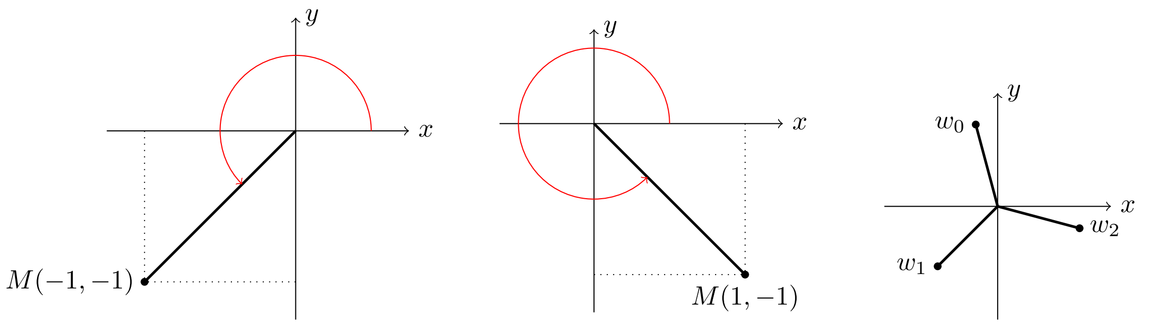
Sada je

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right),$$

te rješenja $w_0$, $w_1$ i $w_2$ dobijamo uvrštavajući $k = 0, 1, 2$ u prethodnu jednakost, pa vrijedi

$$\begin{aligned} k &= 0\\ w_0 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right),\\ k &= 1\\ w_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right),\\ k &= 2\\ w_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right).\end{aligned}$$

Rješenja su predstavljena na Slici 5.1c.




(a) Kompleksni broj $z = -1 - i$ (b) Kompleksni broj $z = 1 - i$ (c) Rješenje jednačine $\sqrt[3]{z}$

Slika 3.4: Gaußova ravan u kojoj su predstavljeni kompleksni brojevi $-1-i$, $1-i$, $w_0$, $w_1$ i $w_2$

## Zadaci za vježbu

1. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 2i$. Izračunati
   (a) $z_1 + z_2$, (b) $z_1 - z_2$, (c) $z_1 \cdot z_2$, (d) $\dfrac{z_1}{z_2}$, (e) $|z_1|$, (f) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$, (g) $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$, (h) $\mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.
2. Izračunati
   (a) $i^{25} + (-i)^{50} + i^{40} + i^{62} + i^{83}$, (b) $\dfrac{1+3i}{(-1+i)^2} + \dfrac{(-4+i)(-4-i)}{1+i}$, (c) Za $z = 1 - 3i$, $\dfrac{2z - 2z\overline{z}}{z\overline{z} + i}$.
3. Izračunati
   (a) $x$ i $y$ iz jednačine $3x + xi - 2y = 12 - yi - i$, (b) $z$ iz uslova $(2+i)z + 2z - 3 = 4 - 6i$.
4. Odrediti kompleksan broj $z$ iz uslova $|z-4| = |z-2| \wedge |z-3| = |z-2i|$.
5. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i$, $z_2 = -6\sqrt{3} - 6i$, $z_3 - 5 + 5i$.

   (a) Pretvoriti date kompleksne brojeve iz algebarskog u trigonometrijski oblik;
   (b) Izračunati $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$;
   (c) Izračunati $\dfrac{z_3^{40} \cdot z_2^{60}}{z_2^{30}}$.
6. Kompleksni broj $z = \frac{1+4i+i^{29}}{2-3i}$ napisati u trigonometrijskom obliku;
7. Izračunati
   (a) $\sqrt[3]{-3-\sqrt{3}i}$, (b) $\sqrt[4]{3 - 3\sqrt{3}i}$, (c) $z$ ako je $z^3 = 2 - 2\sqrt{3}i$.
8. Izračunati kompleksan broj $z$ iz uslova $\mathrm{Re}\left(\frac{z-\overline{z}}{2}\right) + 10i\,\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}-1}{3+i}\right) = x + 1 + 2i$, a zatim izračunati $\sqrt{z}$.
9. Riješiti jednačinu $z^3 + 2 + 2i = 0$.
10. Zadaci za vježbu [4]

   (a) Riješiti jednačinu $z^5 - \sqrt{3} + i = 0$.
   (b) Dat je kompleksan broj $z = 4\sqrt{3} - 12i$, izračunati $\sqrt[4]{z}$.
   (c) Dat je kompleksan broj $z = 6 - 2\sqrt{3}i$, izračunati $\sqrt[4]{z}$.
   (d) Riješiti jednačinu $z^5 - \sqrt{3} + i = 0$.
   (e) Ako je $z = 5 - 5\sqrt{3}i$, odrediti $z^5$ i $\sqrt[3]{z}$.
   (f) Riješiti jednačinu u skupu racionalnih brojeva $4z^3 + 7\sqrt{3}i = 7$.
   (g) U skupu kompleksnih brojeva riješiti jednačinu $z^4 - 3\sqrt{3} = -3i$.
   (h) U skupu kompleksnih brojeva riješiti jednačinu $z^4 + 2i = \sqrt{3} - i$.
   (i) Riješiti jednačinu $z = \sqrt{\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}}$.
   (j) Riješiti jednačinu $z = \sqrt[3]{\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}}$.
   (k) U skupu kompleksnih brojeva riješiti jednačinu $\sqrt{2}z^3 + 2i = 3i + 1$.
   (l) Izračunati kompleksan broj $z$ iz uslova $i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{z}+2}{1+i}\right) + \mathrm{Im}\left(\frac{2\overline{z}+z}{2}\right) + z = 1 + 3i$,
   (m) Izračunati kompleksan broj $z$ iz uslova $\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{z}}{z_1}\right) = \frac{2-3\sqrt{3}}{13}$ i $\mathrm{Im}\left(\frac{z \cdot z_1}{2}\right) = \frac{-3-2\sqrt{2}}{2}$, gdje je $z_1 = 2 - 3i$, a zatim izračunati $z^{12}$.
   (n) Izračunati kompleksan broj $z$ iz uslova $\left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right| = \dfrac{5}{3}$ i $\left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| = 1$.
   (o) Izračunati $z$ i $\sqrt[3]{z}$ ako je $|z-2| + \overline{z}\,\mathrm{Re}(2z) + z^2 - 4z = 4i$.
   (p) Izračunati $z^{50}$ ako je $2\overline{z} - i\,\mathrm{Re}\left(z + \frac{1}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} - i$.
   (q) Izračunati $\sqrt{z}$ ako je $\frac{2}{i}\left(z(2-i) + \frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{2}\right) = -3(1 + 2\sqrt{3} + 2i)$.
   (r) Pokazati da $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z} - \frac{2}{3}\right) = 0$ predstavlja jednačinu kružnice.

[4] Malo teži zadaci

# Poglavlje 4

# Matrice i determinante

## 4.1 Osnovni pojmovi o matricama

Prelazak promjenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na nove promjenljive $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pomoću formula

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\
&\vdots \\
y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \; a_{ij} \in \mathbb{C}, \; i, j = 1, \ldots, n
\end{aligned} \tag{4.1}$$

zove se linearna transformacija promjenljivih $x_1, \ldots, x_n$ u $y_1, \ldots, y_n$. Koeficijente promjenljivih $x_1, \ldots, x_n$ možemo izdvojiti i staviti ih u sljedeću shemu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Ovu shemu (4.2) zovemo matrica (ili matrica linearne transformacije).

- Koeficijenti $a_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, su elementni matrice.
- Elementi $a_{i1}, \ldots, a_{in}$, $i = 1, \ldots, n$, čine $i$–tu vrstu matrice.
- Elementi $a_{1j}, \ldots, a_{nj}$, $j = 1, \ldots, n$, čine $j$–tu vrstu matrice.
- Elementi $a_{11}, \ldots, a_{nn}$, čine glavnu dijagonalu matrice.
- Elementi $a_{1n}$, $a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$, čine sporednu dijagonalu matrice.
- Matricu kraće zapisujemo $A = (a_{ij})$.

Matrica kod koje je jednak broj vrsta i kolona, kao kod matrice $A$ iz (4.2), zovemo kvadratna matrica. U slučaju da broj kolona i vrsta nije jednak dobijamo pravougaonu matricu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Za matricu koja ima $m$ vrsta i $n$ kolona, kažemo da je tipa, ili formata, ili dimenzije $m \times n$ ili jednostavno matrica $m \times n$, i pišemo

$$\boxed{A_{m\times n}.}$$

Matrica formata $1 \times n$ je takođe matrica formata $m \times n$, tj. $m = 1$,

$$(a_1 \, a_2 \, \ldots \, a_n),$$

ovo je matrica vrsta. Na isti način rezonujemo za format $n \times 1$, sada je $n = 1$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ovo je matrica kolona. U slučaju matrice kolone i matrice vrste, obično se ne piše drugi indeks elementa. Matrice kolone i matrice vrste nazivaju se i vektori. U slučaju $m = n = 1$ dobijamo matricu sa samo jednim elementom $(a_1)$. Skup svih vektora tipa $n \times 1$ sa realnim odnosno kompleksnim elementima obilježava se sa $\mathbb{R}^n$ odnosno sa $\mathbb{C}^n$, respektivno.

Primjer 4.1.

Date su matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matrice $A$ i $C$ su pravougaone, formata $2 \times 4$, $3 \times 2$, respektivo, dok je matrica $B$ kvadratna matrica, formata $3 \times 3$. Prethodno možemo zapisati: $A_{2\times4}$, $B_{3\times3}$, $C_{3\times2}$.

**Jednakost matrica**

Definicija 4.1.

Dvije matrice jednake su ako su istog formata i ako su im odgovarajući elementi jednaki.

Drugim riječima, matrica $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ formata $m \times n$ su jednake ako je ispunjeno $m \times n$ uslova

$$\boxed{a_{ij} = b_{ij}, \; i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.}$$

Primjer 4.2.

Date su matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \, D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Samo su matrice $A$ i $D$ jednake, tj. $A = D$.

### 4.1.1 Operacije sa matricama

**Sabiranje matrica**

Definicija 4.2.

Zbir matrica $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$, formata $m \times n$, u oznaci $A + B$ je matrica $C = (c_{ij})$, formata $m \times n$, gdje je $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Drugim riječima, matrice sabiramo ako su istog formata i to radimo tako što im sabiramo elemente na istim pozicijama. Analogno se vrši i oduzimanje, tj. $C = A - B$ vršimo tako što od elementa $a_{ij}$ matrice $A$ oduzimamo odgovarajući element matrice $B$, $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

**Množenje matrice brojem**

Definicija 4.3.

Proizvod matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i broja $\alpha$ definiše se sa

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ & \vdots & & \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Pomnožiti matricu $A$ sa brojem $\alpha$, znači svaki element matrice $a_{ij}$ pomnožiti sa brojem $\alpha$.

Primjer 4.3.

Date su matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Izračunati

$(a)$ $A + B$;

$(b)$ $C - A$;

$(c)$ $2A - 3B + 4C$.

Rješenje:

Vrijedi

$(a)$ $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 1-1 & 2-5 & 0+0 \\ 3-0 & 1-1 & 2+2 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

$(b)$ $C-A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 & 0-1 & 2-2 & 0-0 \\ 3-3 & 1-1 & 2-2 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$(c)$

$$\begin{aligned}
&2A - 3B + 4C = \\
&= 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3\cdot 3 & 3\cdot(-1) & 3\cdot(-5) & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\cdot(-2) & 4\cdot 0 & 4\cdot 2 & 4\cdot 0 \\ 4\cdot 3 & 4\cdot 1 & 4\cdot 2 & 4\cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -3 & -15 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 0 & 8 & 0 \\ 12 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4-9-8 & 2+3+0 & 4+15+8 & 0+0+0 \\ 6-0+12 & 2+3+4 & 4-6+8 & 2-3+4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -13 & 5 & 27 & 0 \\ 18 & 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

TEOREMA 4.1.

*Množenje matrice brojem ima osobine*

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;
2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$;
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
4. $1 \cdot A = A$; .

*gdje su* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *i* $A$, $B$ *su matrice istog formata.*

**Množenje matrica**

DEFINICIJA 4.4.

Proizvod matrica $A = (a_{ij})_{m\times n}$ i $B = (b_{jk})_{n\times p}$, u oznaci $A \cdot B$ ili $AB$, je matrica

$$C = (c_{ik})_{m\times p} = \left(\sum_{j=i}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)_{m\times p}.$$

Dakle, element $c_{ik}$ matrice $C$ dobijamo na taj način što se elementi $i$–te vrste matrice $A$

$$(a_{i1}\, a_{i2}\, \ldots\, a_{in})$$

pomnože sa odgovarajućim elementima $k$–kolone matrice $B$

$$\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

i dobijeni proizvodi se saberu. Množenje matrice u opštem slučaju nije komutativna operacija, sama za neke matrice vrijedi ova osobina.

DEFINICIJA 4.5.

Ako je $AB = BA$, matrice $A$ i $B$ zovu se komutativne matrice.

TEOREMA 4.2.

*Množenje matrica ima osobine*

1. $(AB)C = A(BC)$ *(asocijativnost);*
2. $(A+B)C = AC + BC$ *(distributivnost);*
3. $A(B+C) = AB + AC$ *(distributivnost).*

PRIMJER 4.4.

Date su matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Izračunati $(a)$ $AB$; $(b)$ $BA$; $(c)$ $AC$; $(d)$ $DB$.

Rješenje:

Vrijedi

$$(a)\ AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 1\cdot 0 - 2\cdot(-1) & 3\cdot 1 + 1\cdot 4 - 2\cdot 0 \\ 0\cdot 2 + 2\cdot 0 + 0\cdot(-1) & 0\cdot 1 + 2\cdot 4 + 0\cdot 0 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$(b)\ BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(c)\ AC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(d)\ DB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (4,\ 5)$$

### 4.1.2 Trougaona, dijagonalna, skalarna, jedinična i transponovana matrica

Definicija 4.6 (Trougaone matrice).

Kvadratne matrice oblika

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

zovu se donja i gornja trougaona matrica, respektivno.

Primjer 4.5.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

matrica $A$ je donja trougaona, a matrica $B$ je gornja trougaona.

Definicija 4.7 (Dijagonalna matrica).

Kvadratna matrica, čiji su svi elementi van glavne dijagonale nule zove se dijagonalna matrica, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Primjer 4.6.

Matrica

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

je dijagonalna matrica.

Definicija 4.8 (Skalarna matrica).

Dijagonalna matrica čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki zove se skalarna matrica.

Definicija 4.9 (Jedinična matrica).

Dijagonalna matrica čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jedinice, zove se jedinična matrica i obilježava se sa $I$ (ili $E$).

Primjer 4.7.

Matrica

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

je skalarna matrica, dok je matrica

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jedinična matrica.

Definicija 4.10 (Transponovana matrica).

Transponovana matrica, matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

je matrica

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

($i$–ta vrsta u $A$ postaje $i$-ta kolona u $A^T$).

Teorema 4.3.

*Operacija transponovanja ima osobine*

1. $\left(A^T\right)^T = A$;

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$;
5. $(A_1 A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T \cdots A_2^T A_1^T$.

Primjer 4.8.

Date su matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Odrediti $A^T$ i $B^T$.

Rješenje:

$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ i $B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

## Zadaci za vježbu

1. Date su matrice

$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,

$E=\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & 3\end{pmatrix}$ i $F=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 6 & 9 & 5\end{pmatrix}$.

Izračunati
(a) $A+B$; (b) $2A+3B$; (c) $3A-B$; (d) $A\cdot B$; (e) $B\cdot A$; (f) $C\cdot D$; (g) $D\cdot C$; (h) $E\cdot F$; (i) $F\cdot E$.

2. Date su matrice

$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5 & -9\\ -2 & 6 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ -2 & 0 & 10\\ 3 & 5 & 9\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5 & -9 & 6\\ -3 & -2 & 6 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}4 & 7\\ -2 & 10\\ 5 & 9\\ 0 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$.

Izračunati
(a) $A\cdot B$; (b) $B\cdot A$; (c) $C\cdot D$; (d) $D\cdot C$.

3. Date su matrice $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ i $C=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Izračunati
(a) $2A$; (b) $A+B$; (c) $B-C$; (d) $A^2-3AB^T+4C-2I$; (e) $B^2C^T-2A+B$.

4. Izračunati $AB-2A+B$ ako je $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

5. Izračunati $A^2-3B$ ako je $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 4\\ -3 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

## 4.2 Determinante

Posmatrajmo sistem od dvije linearne algebarske jednačine

$$
\begin{aligned}
a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\
a_{21}x + a_{22}y &= b_2.
\end{aligned}
$$

Rješenja možemo napisati u obliku

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\
y &= \frac{a_{11}b_1 - a_{21}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},
\end{aligned}
$$

za $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. Koeficijente koji se nalaze u nazivniku možemo izdvojiti u kvadratnu matricu drugog reda

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},
$$

ovoj matrici možemo pridružiti broj $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ili zapisan u obliku kvadratne sheme

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.
$$

Na sličan način kvadratnoj matrici $A = (a_{ij})$ reda $n$ možemo pridružiti broj ili odgovarajući izraz, kao što je urađeno u sljedećoj definiciji.

Definicija 4.11.

Neka je data kvadratna matrica $A = (a_{ij})$ reda $n$, čiji su elementi $a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ realni ili kompleksni brojevi. Pod determinantnom matrice $A$ podrazumijeva se zbir svih proizvoda oblika

$$
(-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n},
$$

gdje je $k$ broj svih inverzija u permutaciji koju obrazuju indeksi $k_1$, $k_2, \ldots, k_n$ od brojeva $1$, $2 \ldots, n$, dok je broj sabiraka jednak broju svih permutacija koje obrazuju indeksi, tj. broj sabiraka iznosi $n!$.

Determinanta matrice $A$ (determinanta $n$–tog reda) obilježava se kratko sa $\det A$ ili sa

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
 & \vdots & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

Napomena 4.1.

U literaturi su dostupne i definicije koje su praktičnije sa stanovišta samog računanja vrijednosti determinante. Jedna takva definicija biće u nastavku ove sekcije navedena.

### 4.2.1 Osobine determinanti

Neka su date kvadratne matrice $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ proizvoljnog reda. Za determinante $\det A$ i $\det B$ vrijede sljedeće osobine

1. $\det A = \det A^T$;

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \text{ vidimo da je } \det A = \det A^T.
$$

2. Ako su u determinanti $\det A$ elementi jedne vrste (ili kolone) jednaki sa elementima druge vrste (ili kolone), tada je $\det A = 0$;

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0;
$$

3. Determinanta $\det A$ pomnoži se sa brojem $\lambda$ tako što se svaki element samo jedne vrste ili kolone te determinante pomnoži sa tim brojem;

$$-5\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-5\cdot 1 & -5\cdot 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} = \cdot\begin{vmatrix}-5\cdot 1 & 2\\ -5\cdot 3 & 4\end{vmatrix} = 10;$$

4. Ako su elementi jedne vrste (ili kolone) u determinanti $\det A$ proporcionalni elementima druge vrste (ili kolone), tada je $\det A = 0$;

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{vmatrix} = 1\cdot 6 - 2\cdot 3 = 0;$$

5. Ako svaki element $k$–te vrste determinante $\det A$ zbir dva broja (tj. $a_{kj} = a_{kj}^{(1)} + a_{kj}^{(2)}$), onda je determinanta $\det A$ jednaka zbiru dvije determinante, istog reda pri čemu su elementi $k$-te vrste u jednoj determinanti prvi sabirci ($a_{kj}^{(1)}$), a elementi $k$-te vrste druge determinante drugi sabirci ($a_{kj}^{(2)}$). Ostali elementi u obje determinante jednaki su odgovarajućim elementima determinante $\det A$ (ista osobina vrijedi i za kolone);

$$\det A = \begin{vmatrix}2+3 & 2\\ 1+2 & 4\end{vmatrix} = 14$$
$$\det A^{(1)} = \begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 6$$
$$\det A^{(2)} = \begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix} = 8.$$

Vidimo da je $\det A = \det A^{(1)} + \det A^{(2)}$.

6. Determinanta ne mijenja vrijednost ako se elementima jedne vrste (ili kolone) dodaju odgovarajući elementi druge vrste (ili kolone) pomnoženi istim brojem;

$$\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} = 14$$
$$\begin{vmatrix}5+3\cdot 2 & 2\\ 3+3\cdot 4 & 4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}11 & 2\\ 15 & 4\end{vmatrix} = 44 - 30 = 14.$$

7. Ako u determinanti $\det A$ dvije vrste (ili kolone) međusobno promijene mjesta determinanta $\det A$ mijenja znak;

$$\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} = 14$$
$$\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix} = 6 - 20 = -14.$$

8. $\det(AB) = \det A \det B$;

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & -5\end{pmatrix}$$
$$AB = \begin{pmatrix}7 & -10\\ 5 & -20\end{pmatrix}$$
$$\det A = \begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix} = 6$$
$$\det B = \begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & -5\end{vmatrix} = -15$$
$$\det AB = \begin{vmatrix}7 & -10\\ 5 & -20\end{vmatrix} = -90.$$

Vidimo da je $\det(AB) = \det A \det B$.

### 4.2.2 Računanje determinanti

Za računanje determinanti drugog i trećeg reda koristimo sljedeće formule

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

Primjer 4.9.

Date su determinata

1. $\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 - (-4 \cdot 3) = 28 + 12 = 40;$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 6 \cdot (-1) - (0 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 6 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot (-2)) = -86.$

**Razvijanje determinante po elementima neke vrste ili kolone** Posmatrajmo ponovo kvadratnu matricu $A = (a_{ij})$ reda $n$. Njena determinanta je

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definicija 4.12 (Minor).

Determinanta koja se dobije iz $\det A$ odbacivanjem $i$–te vrste i $j$–te kolone, naziva se minor elementa $a_{ij}$ i obilježava se sa $M_{ij}$.

Definicija 4.13 (Algebarski kofaktor).

Broj $(-1)^{i+j}M_{ij}$ naziva se algebarski komplement (ili kofaktor) elementa $a_{ij}$ i označava se sa $A_{ij}$.

Sljedeća teorema daje pravilo razlaganja determinante po elementima proizvoljne vrste ili kolone

Teorema 4.4.

*Ako je* $\det A$ *reda* $n$, *onda je*

- $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$,
- $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$,

*za* $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Primjer 4.10.

Determinatu

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix},$$

razviti po elementima druge vrste i prve kolone.

Rješenje:

Razvoj po elementima druge vrste

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= -1(-4+6) + 2(-6) - 4(18) = -86.$$

Razvoj po elementima prva kolone

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 3(-4-24) - (-4+6) = -86.$$

U posljednjem primjeru vidimo da je korisno ako je neki element u vrsti ili koloni, po kojoj vršimo razvoj, jednak nuli. Ovo će biti iskorišteno u sljedećem primjeru

Primjer 4.11.

Izračunati vrijednost determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

Rješenje:

Da bi pojednostavili razvijanje determinante, od prve kolone oduzmimo treću kolonu prethodno pomnoženu sa 2, te od četvrte kolone oduzmino drugu kolonu, vrijedi

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{I kol-2}\times\text{III kol}}{=} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{IV kol-II kol}}{=} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Razvijmo sada determinatnu po elementima prve kolone

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Razvijmo posljednju determinantu po elementima treće kolone

$$-2\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot 1(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2(-6-2) = 16.$$

Primjer 4.12.

Dokazati

$$\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = a(x-y)(x-z)(z-y).$$

Rješenje:

$$\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{IIv-Iv} \\ \text{IIIv-Iv} \end{array} = \begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ a(y-x) & (y-x)(y+x) & 0 \\ a(z-x) & (z-x)(z+x) & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{izvučemo } a \text{ iz Ik} \\ \text{izvučemo zajednički faktor } y-x \\ \text{izvučemo zajednički faktor } z-x \end{array}$$

$$= a(y-x)(z-x)\begin{vmatrix} x & a^2+x^2 & 1 \\ 1 & y+x & 0 \\ 1 & z+x & 0 \end{vmatrix} \text{ razvijemo determinantu po elementima IIIk}$$

$$= a(y-x)(z-x)\cdot 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & y+x \\ 1 & z+x \end{vmatrix} = a(y-x)(z-x)[z+x-(y+x)]$$

$$= a(y-x)(z-x)(z-y) = a[-(x-y)][-(x-z)](z-y)$$
$$= a(x-y)(x-z)(z-y).$$

Primjer 4.13.

Dokazati

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{vmatrix} = -8abcd.$$

Rješenje:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{izvučemo } a \text{ iz Ik} \\ \text{izvučemo } b \text{ iz IIk} \\ \text{izvučemo } c \text{ iz IIIk} \\ \text{izvučemo } d \text{ iz IVk} \end{array} = abcd\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{IIv+Iv} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= abcd\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ razvijemo determinantu po elementima IIv}$$

$$= abcd\cdot 2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ IIv+Iv}$$

$$= -2abcd\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ razvijemo determinantu po elementima IIv}$$

$$= -2abcd\cdot 2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4abcd(-1-1) = -8abcd.$$

## Zadaci za vježbu

1. Izračunati vrijednost determinati

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 2+2i & 3-i \\ -3+4i & -1-i \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} \dfrac{x^2+1}{1-x^2} & \dfrac{2x}{1-x^2} \\ \dfrac{2x}{1-x^2} & \dfrac{x^2+1}{1-x^2} \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} \sin x + \sin y & \cos x + \cos y \\ \cos y - \cos x & \sin x - \sin y \end{vmatrix}$; (e) $\begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}$;

(f) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; (g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; (h) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$; (i) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

(j) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; (k) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$; (l) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

(m) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; (n) $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$.

2. Pokazati da je

(a) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+a^3 \\ 1 & a^2 & a^3+a \\ 1 & a^3 & a+a^2 \end{vmatrix} = 0$;

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = (1-a)(1-b)$; (d) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-c)(b-a)(a-c)$;

(e) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$; (f) $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = a(x-y)(x-z)(z-y)$;

(g) $\begin{vmatrix} 1 & bc & b+c \\ 1 & ac & a+c \\ 1 & ab & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$; (h) $\begin{vmatrix} a-b & 2a & 2a \\ 2b & b-a & 2b \\ a-b & 2a & a-b \end{vmatrix} = (a+b)^3$;

(i) $\begin{vmatrix} a+b & -a & -b \\ -b & b+c & -c \\ -a & -c & c+a \end{vmatrix} = 0$; (j) $\begin{vmatrix} -x & y & z & 1 \\ x & -y & z & 1 \\ x & y & -z & 1 \\ x & y & z & -1 \end{vmatrix} = -8xyz$;

(k) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{vmatrix} = -8abcd$; (l) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = -a(a-b)(c-b)(d-c)$.

3. Izračunati

(a) $\begin{vmatrix} a^{-4} & a^{-3} & a^{-2} \\ a^{-1} & 1 & a \\ a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix}$ $(=0)$; (b) $\begin{vmatrix} a & b & a & 1 \\ b & a & b & 1 \\ a & -a & b & 1 \\ b & -b & a & 1 \end{vmatrix}$ $(=2(a+b)(b-a)^2)$;

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$, ako je $z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$; (d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & z^2 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$, ako je $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$;

(e) $\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix}$; $(= 0)$ (f) $\begin{vmatrix} 1+\cos x & 1+\sin x & 1 \\ 1-\sin x & 1+\cos x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $(= 1)$.

4. Riješiti jednačine

(a) $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$; (b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$; (c) $\begin{vmatrix} \log_c x & \log_c x - n \\ \log_c x - m & \log_c x \end{vmatrix} = 0$, $(0 < c \neq 1)$;

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$; (e) $\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0$;

(f) $\begin{vmatrix} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) & \sin x & \cos x \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) & \cos x & \sin x \\ 1 & a & 1-a \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}-2}{4}$; (g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1-x^2 \end{vmatrix} = 0$.

5. Riješiti nejednačine

(a) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -6 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} \geqslant 0$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} \leqslant \begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix}$.

## 4.3 Inverzna matrica

Definicija 4.14 (Adjungovana matrica).

Neka je $A = (a_{ij})$ kvadratna matrica reda $n$, i $A_{ij}$ je algebarski kofaktor elementa $a_{ij}$. Tada se matrica

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & \vdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

naziva adjungovana matrica matrice $A$. Determinanta matrice $\operatorname{adj} A$ zove se adjungovana determinanta determinante matrice $A$.

Vrijedi sljedeća teorema u kojoj su date neke osobine $\operatorname{adj} A$ i $\det(\operatorname{adj} A)$

Teorema 4.5.

*Neka je $A$ kvadratna matrica reda $n$, tada vrijedi*

1 $A \cdot \operatorname{adj} A = (\operatorname{adj} A) \cdot A = (\det A) \cdot I$;

2 $\det A \cdot \det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^n$;

3 $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$.

Primjer 4.14.

Za date matrice odrediti adjungovane matrice

$(a)$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$;

$(b)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Rješenje:

Računanje adjungovane matrice podijelićemo u dva koraka.

I korak: Izračunamo algebarske kofaktore $A_{ij}$ i formiramo matricu kofaktora $\operatorname{cof} A$;

II korak: Zatim transponujemo matricu kofaktora $\operatorname{cof} A$ i dobijemo adjungovanu matricu $\operatorname{adj} A$ matrice $A$, tj. $\operatorname{adj} A = (\operatorname{cof} A)^T$.

$(a)$ Izračunamo prvo kofaktore

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 6 = 6, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-5) = 5, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3$$

formiramo matricu kofaktora $\operatorname{cof} A$ i transponujemo je

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{adj} A = (\operatorname{cof} A)^T = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$(b)$ Ponovo izračunajmo prvo kofaktore

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Matrica kofaktora je

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -11 & 8 & 1 \\ 12 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

i na kraju adjungovana matrica

$$\operatorname{adj} A = (\operatorname{cof} A)^T = \begin{pmatrix} 5 & -11 & 12 \\ 1 & 8 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definicija 4.15 (Inverzna matrica).

Ako je $A$ kvadratna matrica reda $n$ i ako postoji matrica $X$ takva da je $XA = AX = I$, kažemo da je $X$ inverzna matrica matrice $A$. Inverznu matricu matrice $A$, označavamo sa $A^{-1}$.

Definicija 4.16 (Regularna i singularna matrica).

Kvadratna matrica $A$ je regularna (nesingularna) matrica ako ima inverznu matricu. Ako kvadratna matrica $A$ nema inverznu matricu, kažemo da je $A$ singularna (neregularna) matrica.

Teorema 4.6.

*Kvadratna matrica $A = (a_{ij})$ je regularna ako i samo ako je $\det A \neq 0$. Ako je $\det A \neq 0$, inverzna matrica matrice $A$ je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Teorema 4.7.

*Svaka regularna matrica $A$ ima jednu i samo jednu inverznu matricu $A^{-1}$.*

Teorema 4.8 (Osobine inverznih matrica).

*Ako su $A$ i $B$ regularne matrice istog reda, tada je*

(1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(2) $(A^{-1})^{-1} = A$;

(3) $(A^T)^{-1} = (A^T)-1$;

(4) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

Primjer 4.15.

Date su matrice

$(a)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$;

$(b)$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$(c)$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

$(d)$ $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ispitati jesu li date matrice regularne, ako jesu izračunati njihove inverzne matrice.

Rješenje:

Postupak računanja inverzne matrice matrice $X$, je sljedeći

I Izračunamo $\det X$; ako je $\det X \neq 0$ nastavljamo dalje i računamo

II Matricu $\operatorname{cof} X$, zatim $\operatorname{adj} X = (\operatorname{cof} X)^T$; i na kraju

III Inverznu matricu po formuli $X^{-1} = \frac{1}{\det X} \operatorname{adj} X$.

$(a)$ Pošto je $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$, matrica $A$ je singularna, tj. nema inverzne matrice.

$(b)$ Kako je $\det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, matrica je regularna pa možemo računati inverznu matricu. Prvo izračunajmo kofaktore i matricu kofaktora

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1, \qquad B_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 0 = 0$$
$$B_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-3) = 3, \qquad B_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$$

formiramo matricu kofaktora $\operatorname{cof} B$ i transponujemo je

$$\operatorname{cof} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{adj} B = (\operatorname{cof} B)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pa je inverzna matrica

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \operatorname{adj} B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$(c)$ Kako je $\det C = -1$, matrica je regularna. Izračunajmo prvo kofaktore

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$
$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$
$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Matrica kofaktora je

$$\operatorname{cof} C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

adjungovana matrica

$$\operatorname{adj} C = (\operatorname{cof} C)^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

i na kraju inverzna matrica je

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \operatorname{adj} C = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$(d)$ Kako je $\det D = 0$, matrica je singularna.

PRIMJER 4.16.

Riješiti matričnu jednačinu $AX + B = 3X + I$, ako su

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rješenje:

Datu matričnu jednačinu možemo napisati u obliku

$$AX + B = 3X + I \Leftrightarrow Ax - 3X = I - B \Leftrightarrow (\underbrace{A - 3I}_{=C})X = \underbrace{I - B}_{=D} \Leftrightarrow CX = D,$$

($X$ izvlačimo sa desne strane ) gdje je

$$C = A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$D = I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sada matričnu jednačinu $CX = D$, pomnožimo sa lijeve strane sa matricom $C^{-1}$ i dobijamo

$$X = C^{-1}D,$$

tj. da bi izračunali nepoznatu matricu $X$ treba još izračunati inverznu matricu matrice $C$ i pomnožiti matricu $D$ sa lijeve strane sa matricom $C^{-1}$. Vrijedi

$$\det C = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 12 = -15 \neq 0,$$

i

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 3 \qquad C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-4) = 4$$
$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-3) = 3 \qquad C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-1) = -1,$$

pa je

$$\operatorname{cof} C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{adj} C = (\operatorname{cof} C)^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$$
$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \operatorname{adj} C = \frac{1}{-15} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$
$$X = C^{-1}D = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{15} \end{pmatrix}.$$

PRIMJER 4.17.

Riješiti matričnu jednačinu $XA - A = 2X + I$, ako je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje:

Matričnu jednačinu napišimo u sljedećem obliku

$$XA - A = 2X + I \Leftrightarrow XA - 2X = I + A \Leftrightarrow X(\underbrace{A - 2I}_{=C}) = \underbrace{I + A}_{=D},$$

($X$ izvlačimo sa lijeve strane), gdje je

$$C = A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sada matričnu jednačinu $XC = D$ pomnožimo sa desne strane inverznom matricom $C^{-1}$ matrice $C$ i dobijamo

$$X = DC^{-1}.$$

Vrijednost $\det C$ je

$$\det C = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

matrica $C$ je regularna pa izračunajmo matricu kofaktora i adjungovanu matricu

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6, \quad C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Matrica kofaktora je

$$\operatorname{cof} C = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 12 & -4 \end{pmatrix},$$

adjungovana matrica

$$\operatorname{adj} C = (\operatorname{cof} C)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

inverzna matrica je

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\operatorname{adj} C = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Sada je

$$X = DC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 18 & 6 & 36 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

### Zadaci za vježbu

1. Odrediti inverzne matrice
(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Riješiti matrične jednačine
(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

3. $(I - 2A)X = B$, ako je $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

5. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

## 4.4 Rang matrice

Definicija 4.17 (Linearna nezavisnost).

Za matrice vrste (ili matrice kolone) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kažemo da su linearno nezavisne ako za realne brojeve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ iz jednakosti

$$\alpha_1 A_+ \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

slijedi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. U suprotnom, tj. ako matrice vrste (ili matrice kolone) nisu linearno nezavisne, onda za njih kažemo da su linearno zavisne.

Simbol $\mathbf{0}$ označava nulu matricu vrstu ili nulu matricu kolonu.

Teorema 4.9.

*Maksimalan broj linearno nezavisnih vrsta posmatrane matrice jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih kolona te matrice.*

Vrijedi sljedeća definicija.

Definicija 4.18 (Rang matrice).

Pod pojmom ranga matrice $A = (a_{ij})$ formata $m \times n$ podrazumijevamo maksimalan broj linearno nezavisnih vrsta (ili kolona) te matrice.

Rang matrice označavaćemo sa rang $A$, može se još rang matrice označavati i sa rang$(A)$ ili $r(A)$. Za matricu $A$ formata $m \times n$ jasno je da vrijedi

$$\text{rang}\, A \leqslant \min\{m, n\}.$$

Praktično računanje ranga matrice prilično je lako izvesti korištenjem elementarnih transformacija. Primjenom elementarnih transformacija rang matrice se ne mijenja. Datu matricu, primjenjujući elementarne trasformacije svodimo na trougaonu matricu ili na trapeznu ili stepenu formu matrice (za matrice u trapeznoj ili stepenoj formi u literaturi se koristi i naziv kvazitrougaone matrice). U datim primjerima biće jasnije o kakvim se formama radi.

Definicija 4.19 (Elementarne trasformacije).

Pod elementarnim transformacijama jedne matrice smatraju se operacije

1. Razmjena dvije vrste (ili kolone);
2. Dodavanje elementima jedne vrste (ili kolone) elemenata neke druge vrste (ili kolone), pošto su prethodno ovi posljednji pomnoženi proizvoljnim brojem;
3. Množenje elemenata jedne vrste (ili kolone) nekim brojem različitim od nule.

NAPOMENA 4.2.

Elementarne transformacije za određivanje ranga matrice načelno se koriste samo za manipulaciju sa vrstama, zbog primjene elementarnih transformacija pri rješavanju sistema linearnih algebarskih jednačina. O ovome će biti više riječi u narednom poglavlju.

PRIMJER 4.18.

Odrediti rang matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Rješenje:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Ik}\leftrightarrow\text{IIk} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{IIv-2Iv} \\ \text{IIIv-Iv} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{7IIIv-3Iv} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Pa je rang $A = 3$.

PRIMJER 4.19.

Odrediti rang matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 8 & 19 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Rješenje:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 8 & 19 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Iv}\leftrightarrow\text{IIIv} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 5 & -3 & 8 & 19 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{IIv-5Iv} \\ \text{IIIv-2Iv} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & -6 \\ 0 & 7 & -7 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{IIIv-IIv} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

U ovom slučaju je rang $A = 2$.

PRIMJER 4.20.

Odrediti rang matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Rješenje:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} Iv \leftrightarrow IIIv \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ IIv + 2Iv \\ IIIv + 3Iv \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 18 & 24 & 4 \end{pmatrix} \; IIIv - 2IIv \quad \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; IIIv - 2IIv$$

Pa je rang $A = 2$.

## Zadaci za vježbu

1. Odrediti rang matrica

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & -4 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 25 & 10 & 5 & 30 \end{pmatrix}$.

# Poglavlje 5

# SLAJ

Skraćenica SLAJ znači sistemi linearnih algebarskih jednačina

## 5.1 Osnovni pojmovi. Teoreme o egz. i jedin. rješenja

DEFINICIJA 5.1 (Sistem linearnih algebarskih jednačina).

Skup jednačina

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

gdje su $a_{ij}$ i $b_i$ dati brojevi, dok su $x_j$ nepoznate, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$; zove se sistem od $m$ algebarskih linearnih jednačina sa $n$ nepoznatih. Brojevi $a_{ij}$ nazivaju se koeficijenti a brojevi $b_i$ slobodni članovi. Ako je $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, onda se kaže da je sistem (5.1) homogen, a ako je bar jedan od slobodnih članova $b_i \neq 0$, onda kažemo da je sistem (5.1) nehomogen.

Umjesto naziva sistem algebarskih linearnih jednačina, ukoliko nema mogućnosti zabune, koristićemo naziv sistem linearnih jednačina.

DEFINICIJA 5.2 (Rješenje sistema).

Brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nazivaju se rješenje sistema (5.1) ako se zamjenom $x_j = \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ u sistem (5.1) dobiju tačne brojne jednakosti.

Za dva sistema linearnih jednačina kaže se da su ekvivalentni ako je svako rješenje jednog sistema ujedno rješenje i drugog sistema i obrnuto.

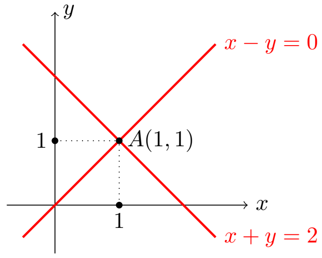
Jedan sistem može imati jedno ili više rješenja a može i da nema rješenja. Ako sistem nema rješenja kaže se da je nesaglasan, a ako ima rješenje kaže se da je saglasan. Ako sistem ima tačno jedno rješenje kaže se da ima jedinstveno rješenje, a ako ima više rješenja onda je taj sistem neodređen.

Posmatrajmo sljedeće sisteme linearnih jednačina

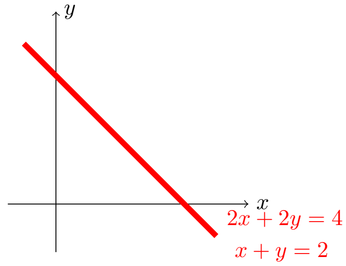
$$
\begin{aligned}
x + y &= 2 \qquad & x + y &= 2 \qquad & x + y &= 2\\
x - y &= 0 \qquad & 2x + 2y &= 4 \qquad & x + y &= 3.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Sistemi su jednostavni i već na prvi pogled vidimo da je rješenje "lijevog" sistema $x = 1$, $y = 1$, u "srednjem" sistemu drugu jednačinu smo dobili tako što je prva pomnožena sa 2, pa ovaj sistem ima beskonačno mnogo rješenja, jer postoji beskonačno mnogo brojeva čiji je zbir 2. I na kraju treći "desni" sistem nema rješenja, jer ne postoje dva broja čiji je zbir istovremeno jednak i 2 i 3. Sistem (5.2) predstavljen je na Slici 6.1a.

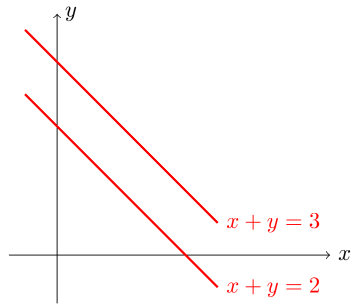
Postavlja se sada pitanje kako ustanoviti egzistenciju i broj rješenja za ne tako jednostavne sisteme kao u slučaju sistema (5.2). Odgovor na ova pitanja (egzistencija–postojanje i broj rješenja) dati su narednim




(a) "Lijevi" sistem, prave se sijeku, jedna tačka je zajednička. Koordinate zajedničke tačke predstavljaju rješenje sistema i rješenje je jedinstveno.




(b) "Srednji" sistem, prave se poklapaju, sve su tačke zajedničke. Ovaj sistem ima beskonačno mnogo rješenja.




(c) "Desni" sistem, nema zajedničkih tačaka, pa prema tome ovaj sistem nema rješenja.

Slika 5.1: Grafički prikaz rješenja sistema (5.2)

teoremama. Sistem (5.1) možemo zapisati u matričnoj formi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

ili

$$A\,X = B,$$

gdje su

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matrica $A$ je matrica sistema, matrica kolona $X$ matrica kolona nepoznatih i matrica kolona $B$ je matrica slobodnih članova. Možemo od matrice $A$ formirati još jednu matricu $A|_B$, tako što ćemo matrici $A$ dodati sa desne strane još jednu kolonu, a to će biti matrica kolona $B$. Ovo je proširena matrica sistema, i vrijedi

$$A|_B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Sada možemo navesti teoreme

Teorema 5.1 (Kronecker[8]–Capelli[9]).

*Sistem (5.1) je saglasan ako i samo ako je rang matrice sistema $A$ jednak rangu proširene matrice sistema $A|_B$, tj.*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|_B.$$

[8]Leopold Kronecker (7. decembar 1823.–29. decembar 1891.) bio je njemački matematičar koj je radio na teoriji brojeva, algebri i logici.

[9]Alfredo Capelli (5. august 1855.–28. januar 1910.) bio je italijanski matematičar.

Teorema 5.2.

*Ako je* rang $A$ = rang $A|_B = r$, *tada sistem*

1. *ima jedinstveno rješenje u slučaju* $r = n$;
2. *beskonačno mnogo rješenja u slučaju* $r < n$ ($n$ *je broj nepoznatih u sistemu* (5.1)).

Primjer 5.1.

Posmatrajmo ponovo sisteme (5.2)

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + y &= 3. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Odrediti egzistenciju i broj rješenja koristeći Teoreme 5.1 i 5.2.

Rješenje:

Zaključili smo da "lijevi" sistem ima jedinstveno rješenje $x = 1, y = 1$, "srednji" sistem ima beskonačno mnogo rješenja, dok "desni" sistem nije saglasan, tj. nema rješenja.

Zapišimo proširenu matricu sistema "lijevog" sistema i odredimo rang te matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{IIv-Iv} \quad \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \tag{5.5}$$

Proširena matrica sistema $A|_B$ formirana je od matrice sistema $A$ sa dodatkom matrice kolone slobodnih članova $B$. Zbog toga iz posljednje matrice (na desnoj strani) u (5.5) možemo odrediti i rang $A$ i rang $A|_B$. Bez kolone sa plavim elementima je matrica istog ranga kao matrica sistema $A$, pa je rang $A = 2$ (zakruženi elementi obojeni u magentu), ako dodamo kolonu elemenata sa elementima matrice $B$ (elementi obojeni u plavo) rang se ne mijenja, tj. rang $A|_B = 2$. Pa vrijedi

$$\text{rang } A = \text{rang } A|_B = 2 = r,$$

pa je po Teoremi 5.1 "lijevi" sistem saglasan, a kako je i $n = 2$, (broj nepoznatih), tj.

$$n = r,$$

to po Teoremi 5.2 "lijevi" sistem ima jedinstveno rješenje.

Posmatrajmo sada "srednji" sistem i njegovu proširenu matricu sistema, vrijedi

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad \text{IIv-2·Iv} \quad \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{5.6}$$

Sada je rang $A$ = rang $A|_B = 1 = r$ i $r = 1 < 2 = n$, pa je sistem saglasan, ali ima beskonačno mnogo rješenja.

I na kraju za "desni" sistem vrijedi

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \text{IIv-Iv} \quad \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{5.7}$$

Vrijedi rang $A = 1$ ali rang $A|_B = 2$, tj. rang $A \neq$ rang $A|_B$, te desni sistem nema rješenja, tj. nesaglasan je.

Napomena 5.1 (Tumačenja zašto je ovaj sistem nesaglasan (posljednji–desni)).

Kako samo elementarne transformacije primjenjujemo na vrste to u desnoj matrici iz (5.7) elementi vrsta su zapravo koeficijenti uz nepoznate i slobodni članovi, pa tako druga vrsta iz desne matrice predstavlja jednačinu

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 1.$$

Sada se postavlja pitanje: Koje brojeve treba uvrstiti umjesto $x$ i $y$ da bi lijeva strana prethodne jednakosti imala vrijednost 1? Znamo da takvi brojevi ne postoje, jednačina nije saglasna pa nije ni "desni" sistem.

## 5.2 Metode za rješavanje sistema linearnih jednačina

Sada kada znamo kako utvrditi za dati sistem da li je saglasan ili nesaglasan, te ako je saglasan da li ima jedno ili beskonačno mnogo rješenja, potrebno je u slučaju saglasnog sistema ta rješenja izračunati. Metode koje će biti ovdje obrađene su Gaußova[1] metoda, Cramerova[2] metoda (metoda determinanti) i matrična metoda.

### 5.2.1 Gaußova metoda

Sistem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{5.8}$$

zapišimo u obliku proširene matrice sistema

$$A|_B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Cilj nam je matricu $A|_B$ svesti na gornju trougaonu matricu ili odgovarajuću trapeznu ili stepenu formu matrice. Da bi to uradili trasformisaćemo datu matricu u matricu kod koje u prvoj koloni samo element $a_{11}$ različit od nule dok svi ostali jednaki nuli. Ovo radimo tako što elemente druge vrste pomnožimo sa $a_{11}$, pa od njih oduzmeno elemente prve vrste pomnožene sa $a_{21}$, zatim elemente treće vrste pomnožimo sa $a_{11}$ i od njih oduzimamo elemente prve vrste pomnožene sa $a_{31}$. Postupak nastavljamo dok ne dobijemo matricu kod koje je samo element $a_{11}$ u prvoj koloni različit od nule. Dobijamo sljedeću matricu.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & \ldots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \ldots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array}\right)$$

Sa $a_{ij}^{(1)}$ i $b_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ su označeni elementi matrice dobijeni poslije oduzimanja odgovarujućih vrsta.

Zatim prelazimo na drugu kolonu. U drugoj koloni ostavljamo prva dva elementa različita od nule, "ispod" elementa $a_{22}$ formiramo nule.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{mn}^{(2)} & b_m^{(2)} \end{array}\right)$$

[1] Johann Carl Friedrich Gauss (30. april 1777.–23. februar 1855.) bio je njemački matematičar, smatra se najvećim matematičarem ili jedan od najvećih u istoriji čovječanstva

[2] Gabriel Cramer (31. juli 1704.–4. januar 1752.) bio je švajcarski matematičar

Dakle ispod elemenata $a_{ii}$, $i = 1, \ldots, n$, trebamo dobiti nule. Postupak ponavljamo dok ne dobijemo trougaonu matricu ili trapezni ili stepeni oblik matrice.

Kako je prethodno opisani postupak korišten i za određivanje ranga proširene matrice sistema, odredimo sada rang matrice sistema $A$ i rang proširene matrice sistema $A|_B$. U slučaju saglasnosti sistema i ako je $n = r$, iz dobijene matrice rekonstruišemo sistem, te iz posljednje jednačine izračunamo posljednju nepoznatu, te njenu vrijednost uvrstimo u prethodnu jednačinu. Ovaj postupak nastavimo dok ne izračunamo i prvu nepoznatu iz prve jednačine.

U slučaju saglasnosti sistema i $r < n$, na desnu stranu prebacujemo $n-r$ nepoznatih i ponavljamo prethodno opisani postupak.

Gaußovom metodom možemo rješavati kako pravougaone tako i kvadratne sisteme. Sljedećim dvjema metodama možemo rješavati samo kvadratne sisteme linearnih jednačina.

### 5.2.2 Metode za rješavanje kvadratnih sistema

Neka je dat kvadratni sistem

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n,
\end{gathered} \tag{5.9}$$

možemo ga zapisati u matričnom obliku

$$AX = B,$$

gdje je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Vrijedi sljedeća teorema.

**Teorema 5.3.**

*Kvadratni sistem linearnih jednačina (5.9) ima jedinstveno rješenje ako je $A$ regularna matrica.*

Ako pođemo od matričnog zapisa sistema linearnih jednačina $AX = B$, a pošto je $A$ regularna matrica, to ima jedinstvenu inverznu matricu (Teorema 4.7). Vrijedi

$$\boxed{AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.}$$

**Napomena 5.2.**

Dakle matrična metoda rješavanja sistema linearnih jednačina sastoji se u sljedećem:

1. Zapišemo kvadratni sistem u matričnom obliku;
2. Ispitamo da li je $A$ regularna matrica;
3. Ako jeste izračunamo $A^{-1}$;
4. Rješenje računamo iz jednakosti $X = A^{-1}B$.

Sljedeća metoda je Cramerova metoda (metoda determinanti). Ova metoda je zasnovana na sljedećoj teoremi.

TEOREMA 5.4 (Cramerova teorema).

*Ako je* $\det A \neq 0$, *sistem* (5.9) *ima jedinstveno rješenje* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *dato sa*

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \ k = 1, 2, \dots, n,$$

*gdje je* $\det A_k$ *determinanta matrice* $A_k$ *koja je dobijena zamjenom* $k$*–te kolone matrice* $A$ *matricom kolonom* $B$.

NAPOMENA 5.3.

Cramerova metoda rješavanja sistema linearnih jednačina sastoji se u sljedećem

1. Izračunamo $\det A$, ako je $\det A \neq 0$, nastavljamo dalje;
2. Izračunamo determinante $\det A_k$, $k = 1, \dots, n$, po uputstvu iz Teoreme 5.4;
3. Nepoznate računamo po formuli $x_k = \dfrac{\det A_k}{\det A}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

PRIMJER 5.2.

Dat je sistem

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ -x + 2y + z = 2 \\ 3x + y - 3z = 1, \end{cases}$$

(*a*) Ispitati saglasnost Kroneker-Capellijevom teoremom, u slučaju saglasnosti

(*b*) Riješiti sistem Gaußovom, Cramerovom i matričnom metodom.

Rješenje:

(*a*) Saglasnost

$$A|_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{IIv–2Iv} \\ \text{IIIv+Iv} \\ \text{IVv–3Iv} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{IIIv–3IIv} \\ \text{IVv+2IIv} \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{11IVv+12IIv} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{IIIv:11} \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pa je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|_B = 3 = r$, ako je i $n = 3$, dakle sistem je saglasan i ima jedinstveno rješenje.

(*b*) Rješavamo sistem dobijen od koeficijenata iz posljednje matrice.

(i) Gaußova metoda

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y - 3z &= -2 \end{aligned}$$

$$z = 1$$

$$----------$$

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 3 \\ y - 3 &= -2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$----------$$

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$----------$$

$$\begin{aligned} x + 1 &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$----------$$

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 1. \end{aligned}$$

(ii) Cramerova metoda

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Pa je

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{1}{1} = 1 \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{1}{1} = 1 \\ z &= \frac{D_z}{D} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

(iii) Matrična metoda. Napišimo sistem u matričnoj formi $AX = B$, tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Izračunajmo inverznu matricu od matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vrijednost determinante je

$$\det A = 1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

Matrica kofaktora

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Adjungovana matrica je

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzna matrica $A^{-1}$ matrice $A$ je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pa je na kraju

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dakle rješenje je $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ ili $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

**Primjer 5.3.**

Dat je sistem $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ 3x + 5y - 3z = 5, \end{cases}$

$(a)$ Ispitati saglasnost Kroneker-Capellijevom teoremom, i u slučaju saglasnosti

$(b)$ Riješiti sistem Gaßuovom, Cramerovom i matričnom metodom.

Rješenje:

$(a)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vidimo da je rang $A$ = rang $A|_B = 2 = r$, a pošto je broj nepoznatih $n = 3$, to je sistem ima saglasan i ima beskonačno mnogo rješenja.

$(b)$ Riješimo sada sistem

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \quad y - 3z = -2, \end{cases}$$

pošto je $n - r = 1$, to ćemo jednu nepoznatu prebaciti na desnu stranu, i dobijamo

$$\begin{cases} x + y = 3 - z \\ \quad y = -2 + 3z, \end{cases}$$

(a) Gaußova metoda

$$\begin{aligned} x + y &= 3 - z \\ y &= -2 + 3z, \\ -----&---- \\ x &= -y + 3 - z \\ y &= -2 + 3z, \\ -----&---- \\ x &= -4z + 5 \\ y &= -2 + 3z, \\ -----&---- \\ x &= -4t + 5 \\ y &= 3t - 2 \\ z &= t, \ t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(b) Cramerov metoda

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ D_x &= \begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ 3t-2 & 1 \end{vmatrix} = -4t + 5, \\ D_y &= \begin{vmatrix} 1 & 3-t \\ 0 & 3t-2 \end{vmatrix} = 3t - 2, \end{aligned}$$

sada je

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{-4t+5}{1} = -4t + 5, \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{3t-2}{1} = 3t - 2, \\ z &= t, \ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Matrična metoda

napišimo sistem

$$\begin{cases} x + y & = 3 - z \\ y & = -2 + 3z, \end{cases}$$

u obliku

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - t \\ 3t - 2 \end{pmatrix},$$

odnosno $AX = B$, gdje je $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 - t \\ 3t - 2 \end{pmatrix}$,

dalje je

$A_{11} = 1,\ A_{12} = 0,\ A_{21} = -1,\ A_{22} = 1,$

matrica kofaktora je

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

adjungovana matrica, matrice $A$ je

$$\operatorname{adj} A = (\operatorname{cof} A)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determinanta je $\det A = 1$, pa je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

te je rješenje sistema

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 - t \\ 3t - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t + 5 \\ 3t - 2 \end{pmatrix},$$

odnosno $x = -4t + 5,\ y = 3t - 2,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$.

Primjer 5.4.

Dat je sistem $\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ 2x + 3y + z - 2w = 3 \\ 3x + 4y + 2z - w = 7, \end{cases}$

1. Ispitati saglasnost Kronecker-Capellijevom teoremom, u slučaju saglasnosti
2. Riješiti sistem Gaußovom, Kramerovom i matričnom metodom.

Rješenje:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

   dakle $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 2$, sistem ima beskonačno mnogo rješenje.

2. Riješimo sada sistem

$$\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ y - z - 4w = -5, \end{cases}$$

   pošto je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 2 = r$, a $n = 4$, pa je $r = 2 < 4 = n$ i $n - r = 2$, prebacimo $z$ i $w$ na desne jednačina. Sada uzmimo $z = a,\ w = b,\ a, b \in \mathbb{R}$, te dalje rješavajmo sistem

$$\begin{cases} x + y = -a - b + 4 \\ y = a + 4b - 5. \end{cases}$$

($1^0$) Gaußova metoda

$$\begin{aligned} x+y &= -a-b+4\\ y &= a+4b-5\\ &\text{------------------}\\ x &= -(a+4b-5)-a-b+4\\ y &= a+4b-5\\ &\text{-----------------}\\ x &= -2a-5b+9\\ y &= a+4b-5\\ z &= a\\ w &= b,\ a,b\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

($2^0$) Cramerova metoda

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -a-b+4 & 1\\ a+4b-5 & 1 \end{vmatrix} = -2a-5b+9$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -a-b+4\\ 0 & a+4b-5 \end{vmatrix} = a+4b-5,$$

pa je $x=-2a-5b+9,\ y=a+4b-5,\ z=a,\ w=b,\ a,b\in\mathbb{R}$.

($3^0$) Matrična metoda

Napišimo sistem

$$\begin{aligned} x+y &= -a-b+4\\ y &= a+4b-5 \end{aligned}$$

u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b+4\\ a+4b-5 \end{pmatrix},$$

izračunajmo matricu kofaktora

$A_{11}=1,\ A_{12}=0,\ A_{21}=-1,\ A_{22}=1$, pa je $\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

adjungovana matrica je $\operatorname{adj} A = (\operatorname{cof} A)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinanta je $\det A = 1$, te je inverzna matrica

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, rješenje sistema je sada

$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a-b+4\\ a+4b-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a-5b+9\\ a+4b-5 \end{pmatrix}$, odnosno

$x=-2a-5b+9,\ y=a+4b-5,\ z=a, w=b,\ a,b\in\mathbb{R}$.

Primjer 5.5.

Dat je sistem $\begin{cases} x+y+z+w=4 \\ x-y+z+2w=3 \\ 2x+y+z-w=3 \\ 4x+y+3z+2w=10, \end{cases}$

1. Ispitati saglasnost Kronecer-Capellijevom teoremom, u slučaju saglasnosti
2. Riješiti sistem Gaußovom, Kramerovom i matričnom metodom.

Rješenje:

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

Dakle $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 3 = r$, tj. sistem ima rješenje, ali pošto ima četiri nepoznate $n = 4$, $n = 4 < 3 = r$, te rješenja ima beskonačno mnogo

2. Polazni sistem ekvivalentan je sljedećem sistemu

$$\begin{aligned} x+y+z+w &= 4 \\ -y-z-3w &= -5 \\ 2z+7w &= 9 \\ w &= a,\ a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned} x+y+z &= -a+4 \\ -y-z &= 3a-5 \\ 2z &= -7a+9 \\ w &= a,\ a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned} x+y+z &= -a+4 \\ -y-z &= 3a-5 \\ z &= \frac{-7a+9}{2} \\ w &= a,\ a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned} x+y+\frac{-7a+9}{2} &= -a+4 \\ -y+\frac{7a-9}{2} &= 3a-5 \\ z &= \frac{-7a+9}{2} \\ w &= a,\ a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

---

$$x+y = \frac{7a-9}{2} - a + 4$$

$$
\begin{aligned}
-y &= \frac{-7a+9}{2} + 3a - 5\\
z &= \frac{-7a+9}{2}\\
w &= a,\ a \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-a-1}{2} + \frac{7a-9}{2} - a + 4\\
y &= \frac{a+1}{2} - 3a + 5\\
z &= \frac{-7a+9}{2}\\
w &= a,\ a \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{4a-2}{2}\\
y &= \frac{a+1}{2}\\
z &= \frac{-7a+9}{2}\\
w &= a,\ a \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

### 5.2.3 Sistemi homogenih linearnih jednačina

U Definiciji 5.1 već je uveden pojam homogenog sistema, da ponovimo to je sistem algebarskih linearnih jednačina u kojem su svi slobodni članovi $b_i$, $i = 1, \ldots, m$ jednaki nuli, tj.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0,
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

ili u matričnoj formi

$$AX = 0.$$

Očigledno svaki homogeni sistem linearnih jednačina ima rješenje $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Ovo rješenje se naziva trivijalno ili nulto rješenje. I iz proširene matrice sistema možemo lako zaključiti da je sistem uvijek saglasan, tj. da ima rješenje

$$
A|_B = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{nn} & 0\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0\\
 & \vdots & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0
\end{array}\right),
$$

jer posljednja kolona matrice sa slobodnim članovima ne utiče na vrijednost ranga matrice $A|_B$ jer su svi njeni jednaki nuli. Osnovni problem u rješavanju homogenih sistema linearnih jednačina je u ispitivanju da li ovaj sistem ima i netrivijalnih rješenja. Rješenje ovog problema dato je u sljedećoj teoremi i njenim posljedicama.

Teorema 5.5.

*Homogeni sistem* (5.11) *ima netrivijalna rješenja ako i samo ako je rang matrice sistema manji od broja nepoznatih, tj. ako je* $\operatorname{rang} A = r < n$.

Posljedica 5.1.

Svaki sistem homogenih linearnih jednačina u kome je broj jednačina manji od broja nepoznatih ima netrivijalna rješenja.

Posljedica 5.2.

Homogeni sistem u kome je broj jednačina jednak broju nepoznatih ima netrivijalna rješenja ako i samo ako je determimanta sistema jednaka nuli.

Primjer 5.6.

Riješiti homogeni sistem $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ 3x - y - 4z = 0 \end{cases}$

Rješenje:

Izračunajmo rang proširene matrice sistema

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 61 & 0 \end{array}\right)$$

dakle vrijedi rang $A\big|_B = 3$, a kako je broj nepoznatih $n = 3$, sistem ima samo trivijalna rješenja. Vidimo da posljednja kolona ne igra nikakvu ulogu u određivanju ranga proširene matrice sistema kod homogenih sistema, pa se zato i računa samo rang matrice sistema, kao što je navedeno u Teoremi 5.5. Da sistem ima samo trivijalna rješenja možemo zaključiti koristeći Posljedicu 5.2 jer broj jednačina jednak broju nepoznatih, pa je

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 61 \neq 0.$$

Dakle postoji samo trivijalno rješenje $x = y = z = 0$.

Primjer 5.7.

Riješiti homogeni sistem $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$

Rješenje:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pa je rang $A = 2 < 3 = n$. Dakle sistem ima i netrivijalna rješenja.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ -y - z &= 0 \\ ----&------- \\ x + 2y &= -z \\ y &= -z \\ z &= a,\ a \in \mathbb{R} \\ ----&------- \\ x + 2y &= -a \end{aligned}$$

$$y = -a$$
$$z = a$$

− − − − − − − − − − −

$$x = a$$
$$y = -a$$
$$z = a.$$

## Zadaci za vježbu

1. Riješiti sisteme Gaußovom metodom, Cramerovom i matričnom metodom

(a) $\begin{aligned} x+y+z&=3\\ x+2y+3z&=6;\\ 3x+3y+z&=7\end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x-y+z&=2\\ 2x+2y+4z&=8;\\ 3x-y-2z&=0\end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x+3y-z&=3\\ -3x+2y+z&=0;\\ 2x+3y-3z&=2\end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x-2y+3z&=2\\ 2x+y+4z&=7;\\ 3x-2y-2z&=-1\end{aligned}$ (e) $\begin{aligned} 3x-2y+3z&=4\\ x+2y+z&=4\\ 2x-3y-4z&=-5.\end{aligned}$

2. Ispitati saglasnost sistema Kronecker-Capellijevim stavom i slučaju saglasnosti riješiti dati sistem sa sve tri metode

(a) $\begin{aligned} x+y+z&=3\\ 2x+y+z&=4\\ -x-y+z&=-1\\ 3x-y-z&=1;\end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x+y+z&=3\\ 2x+y+z&=4\\ -x-y+z&=-1\\ 3x-y-z&=1;\end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 2x+2y+z&=5\\ x-y+z&=1\\ -2x-3y+z&=-4\\ x-y-z&=-1;\end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x+2y+3z&=7\\ 2x-y-5z&=-4\\ -x+y+z&=1\\ 3x+y+z&=5;\end{aligned}$ (e) $\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 2x+y+z&=4\\ -x-y+z&=-1\\ 3x-y-z&=1;\end{aligned}$ (f) $\begin{aligned} x+4y-3z&=2\\ -2x-y+6z&=3\\ x-7y+z&=-5\\ x-y-z&=-1.\end{aligned}$

3. Ispitati saglasnost sistema Kronecker-Capellijevim stavom i u slučju saglasnosti riješiti ga

(a) $\begin{aligned} x+y-z+t&=2\\ -2x-y-z+2t&=-3\\ 2x+2y-3z-3t&=4;\\ -4x-3y+z-t&=-7\end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x+2y+z-t&=0\\ -x-y+2z-2t&=-3\\ -2x+y-2z+t&=-1\\ -2x+4y-z-2t&=-4.\end{aligned}$

4. Ispitati saglasnost sistema Kronecker-Capellijevim stavom i slučaju saglasnosti riješiti dati sistem sa sve tri metode

(a) $\begin{aligned} 2x+7y+3z+u&=6\\ 3x+5y+2z+2u&=4;\\ 9x+4y+z+7u&=2\end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x-2y+z+u&=1\\ x-2y+z-u&=-1;\\ x-2y+z+5u&=5\end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 2x-y+z+u&=1\\ x+2y-z+4u&=2\\ x+7y-4z+11u&=3.\end{aligned}$

5. Ispitati ima li homogeni sistem rješenje osim trivijalnog i slučaju da ima izračunati ga

(a) $\begin{aligned} x+y+2z&=0\\ -2x+2y+3z&=0;\\ -5x+2y+z&=0\end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x+y+2z&=0\\ -2x+2y+3z&=0;\\ -x+3y+5z&=0\end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x+2y-2z&=0\\ -x+3y+z&=0;\\ -x+8y&=0\end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} 2x+y-2z&=0\\ -x+2y+z&=0\\ x+3y-z&=0.\end{aligned}$

# Poglavlje 6

# Vektori

U matematici, prirodnim i tehničkim naukama, neke veličine određene su svojom brojnom vrijednošću. Takve su na primjer, masa, zapremina, vrijeme i dr. Međutim postoje veličine za koje nije dovoljno samo znati njihove brojne vrijednosti, na primjer brzina, sila, ubrzanje, jačina električnog polja, jačina magnetnog polja i dr. Na osnovu prethodno iznešenog veličine sa kojimo radimo mogu se podijeliti na:

1. Veličine koje su definisane samo brojnom vrijednošću i njih nazivamo se skalarnim veličinama ili kraće skalarima.

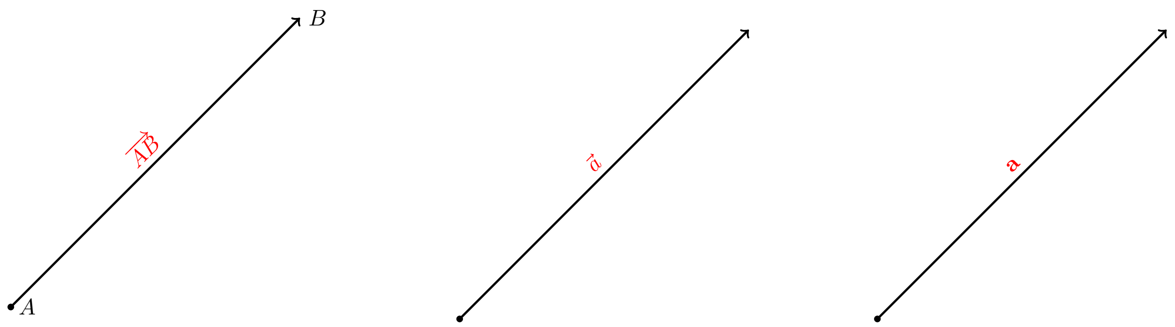
2. Veličine za koje je potrebno poznavati brojnu vrijednost, pravac i smjer. Ove veličine se nazivaju vektorske veličine ili vektori.

### 6.0.1 Pojam vektora

Vektori se geometrijski predstavljaju usmjerenim (ili orjentisanim dužima). Neka su date tačke $A$, $B$, $A \neq B$ prostora. Duž $\overline{AB}$ kojoj je jedna tačka npr. $A$ proglašena za početak, a druga za kraj (tačka $B$) zvaćemo vektor, u oznaci $\overrightarrow{AB}$. Vektor $\overrightarrow{AB}$ ima pravac kao i prava na kojoj leži duž $\overline{AB}$, smjer od tačke $A$ ka tački $B$, a intenzitet (ili modul ili norma) mu je jednak dužini duži $\overline{AB}$.

Vektor je definisan ako znamo njegov intenzitet, pravac i smjer. Vektori se obično označavaju malim slovima latinice sa strelicom iznad, na primjer $\vec{a}$, $\vec{b}, \ldots$, ako su poznate početna i krajnja tačka onda koristimo oznaku $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DF}, \ldots$ Osim ovakvog označavanja koriste se i mala slova latinice, ali podebljana (boldovana) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}, \ldots$

Intenziteti se označavaju sa $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|, \ldots$ ili $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\overrightarrow{DF}\right|, \ldots$ ili $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}| \ldots$ Skup svih vektora prostora označavaćemo sa $V^3$.




(a) (b) (c)

Slika 6.1: Označavanje vektora

Vektor čiji je intenzitet jednak nuli naziva se nula–vektor. Početna i krajnja tačka nula–vektora se poklapaju (tj. iste su), dok pravac i smjer nisu definisani. Nula–vektor označavamo $\vec{0}$ ili $\mathbf{0}$. Vektor čiji je intenzitet jednak 1 zovemo jedinični vektor.

Uobičajeno vektori se dijele u tri kategorije:

1. slobodni vektori;

2. vektori vezani za pravu ili nosač;

3. vektori vezani za tačku.

**Slobodni vektori.** Za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kažemo da su jednaki, tj. $\vec{a} = \vec{b}$ ako imaju jednake intenzitete, iste smjerove a nosači su im paralelni ili se poklapaju. Ovakve vektore nazivamo slobodni. Slobodne vektore možemo paralelno pomjerati duž njihovog nosača ili paraleno nosaču, zadržavajući smjer i intenzitet nepromijenjenim.

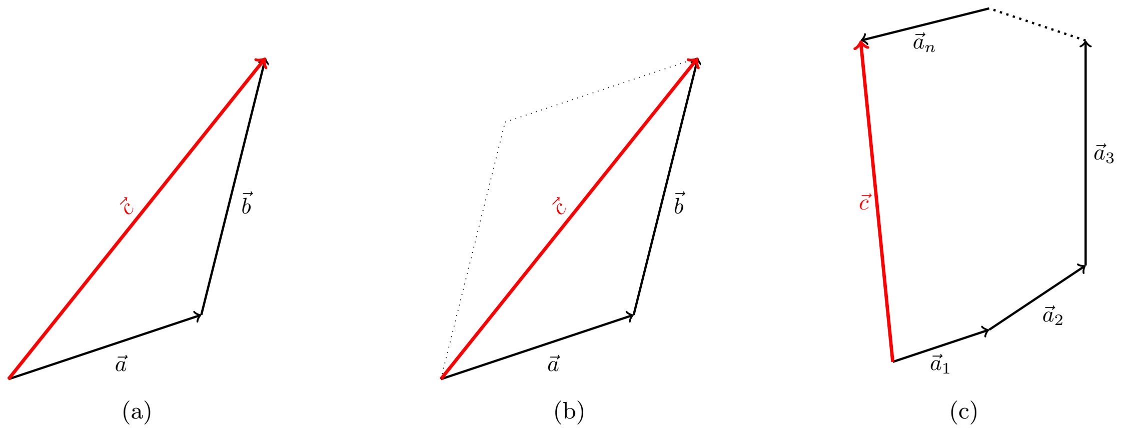
**Vektori vezani za pravu (nosač).** Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su jednaki ako imaju iste module, smjerove i isti nosač. Ovo su vektori vezani za pravu. Možemo ih pomjerati duž njihovog nosača.

**Vektori vezani za tačku.** Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su jednaki ako imaju iste module, smjerove, intenzitete a krajne tačke im se poklapaju. Ovi vektori su vezani za tačku.

U nastavku mi ćemo koristiti **slobodne vektore**.

### 6.0.2 Operacije sa vektorima

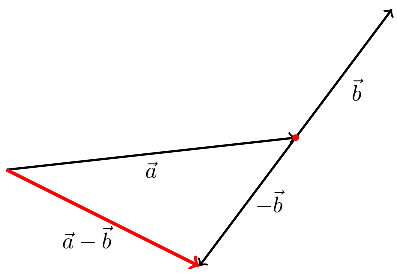
**Sabiranje vektora.** Vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sabiramo tako što početak vektora $\vec{b}$ dovedemo paralelnim pomjeranjem do kraja vektora $\vec{a}$. Rezultantni vektor $\vec{c}$, čiji se početak poklapa sa početkom vektora $\vec{a}$ a kraj sa krajem vektora $\vec{b}$ je zbir vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Ovo je pravilo trougla (Slika 6.2a) ili paralelograma (nadoponjavanjem dobijemo paralelogram, vidjeti Sliku 6.2b –isprekidane linije). U slučaju da trebamo sabrati vektore $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n$ postupamo na sljedeći način. Početak vektora $\vec{a}_2$ dovedemo na kraj vektora $\vec{a}_1$, početak vektora $\vec{a}_3$ na kraj vektora $\vec{a}_2$, postupak nastavimo do vektora $\vec{a}_n$ čiji početak dovodimo do početka vektora $\vec{a}_{n-1}$. Sada rezultantni vektor $\vec{c}$ čiji se početak poklapa sa početkom vektora $\vec{a}_1$ a kraj sa krajem vektora $\vec{a}_n$ predstavlja traženi zbir, tj. $\vec{c} = \vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_n$ (Slika 6.2c). Izloženi postupak često se zove i pravilo (ili princip) nadovezanih vektora.




Slika 6.2: Sabiranje vektora

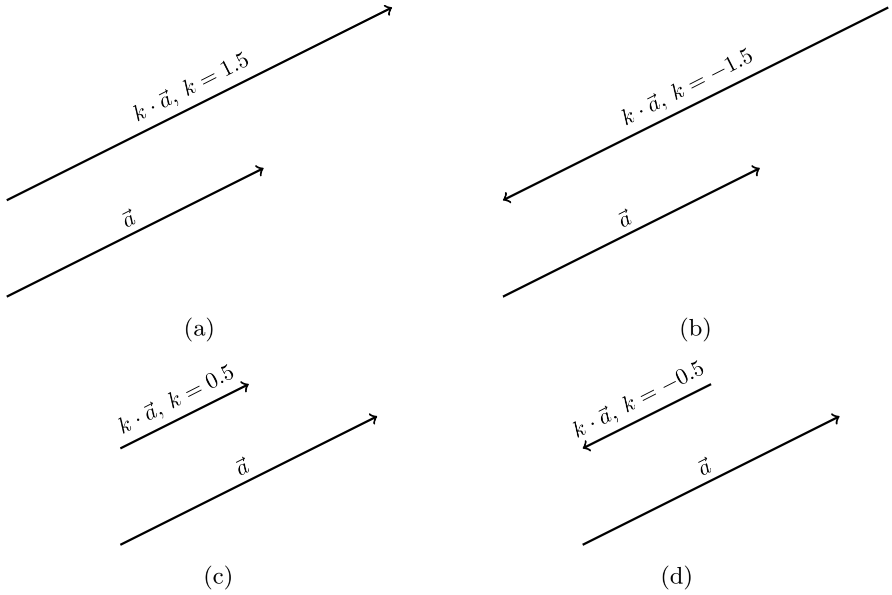
**Oduzimanje vektora.** Suprotan vektor vektora $\vec{b}$ je vektor koji ima isti intenzitet, isti ili paralelan nosač, ali suprotan smjer od vektora $\vec{b}$. Suprotan vektor, vektora $\vec{b}$ označavamo sa $-\vec{b}$.

Oduzimanje vektora $\vec{b}$ od vektora $\vec{a}$ svodimo na sabiranje vektora $\vec{a}$ sa suprotnim vektorom, vektora $\vec{b}$, tj. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.




Slika 6.3: Oduzimanje vektora

**Množenje vektora skalarom.** Proizvod vektora $\vec{a}$ i skalara $k \in \mathbb{R}$ je vektor, čiji se pravac poklapa sa pravcem vektora $\vec{a}$, intenzitet mu je jednak $|k| \cdot |\vec{a}|$, a smjer mu je isti kao i smjer vektora $\vec{a}$ ako je $k > 0$, a suprotan od smjera $\vec{a}$ ako je $k < 0$. Na Slici 6.4a, je vektor $\vec{a}$ i vektor $1.5\vec{a}$. Vidimo da rezultantni vektor $1.5\vec{a}$ ima isti smjer i prava kako vektor $\vec{a}$ ali mu je dužina (intenzitet) veća 1.5 nego dužina vektora $\vec{a}$. Na Slici 6.4b $k = -1.5 < 0$ pa rezultantni vektor ima isti pravac kao i $\vec{a}$, intenzitet mu je 1.5 veći nego kod $\vec{a}$ ali ima suprotan smjer. Na Slikama 6.4c i 6.4d su slučajevi kada je $|k| < 1$. Rezultantni vektor ima intenzitet manji od intenziteta vektora $\vec{a}$. Za $k = -1$ dolazi samo do promjene smjera vektora.




Slika 6.4: Množenje vektora skalarom

### 6.0.3 Linearna kombinacija vektora. Baza prostora $V^3$

Neka je dato $n$ vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ i $n$ skalara $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Linearnom kombinacijom vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ nazivamo sljedeći zbir

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n.$$

DEFINICIJA 6.1 (Zavisni–nezavisni vektori).

Vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ su linearno zavisni ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, od kojih je bar jedan različit od nule, tako da je

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}. \tag{6.1}$$

Ako je jednakost (6.1) zadovoljena jedino kada je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, onda se kaže da su vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linearno nezavisni.

Za dva vektora ili više vektora kažemo da su kolinearni ako leže na istim ili paralelnim nosačima (radimo sa slobodnim vektorima).

Za tri ili više vektora kažemo da su komplanarni ako leže u jednoj ravni ili su paralelelni sa ovom ravni.

Vratimo se sada na prostor $V^3$. Vrijedi sljedeća teorema

TEOREMA 6.1.

*Neka su su $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3 \in V^3$ bilo koja tri linearno nezavisna vektora. Tada se svaki vektor $\vec{a} \in V^3$ može na jedinstven način prikazati kao njihova linearna kombinacija.*

DEFINICIJA 6.2.

Uređenu trojku $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ tri nezavisna vektora iz $V^3$ nazivamo baza prostora $V^3$.

Drugim riječima bilo koji vektor $\vec{a} \in V^3$ možemo izraziti preko vektora $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \vec{a}_3$, tj. predstaviti vektor $\vec{a}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \vec{a}_3$

$$\boxed{\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3.}$$

Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nazivamo koeficijenti ili koordinate vektora $\vec{a}$ u bazi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \vec{a}_3$.

### 6.0.4 Prostorni koordinatni sistem. Ortogonalna baza

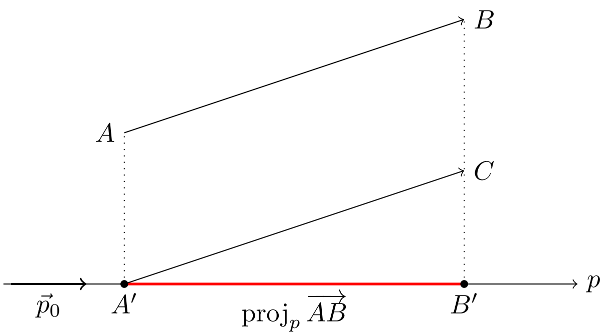
Cilj nam je odabrati bazu tako da što jednostavnije predstavimo vektore.

DEFINICIJA 6.3 (Orjentisana prava ili osa).

Orjentisanom pravom ili osom naziva se prava za čije je dvije proizvoljne tačke utvrđeno, koja se od njih smatra prethodnom a koja sljedećom. Orjentisana prava ili osa može biti okarakterisana jediničnim vektorom $\vec{u}$.

DEFINICIJA 6.4 (Ortogonalna projekcija, Slika 6.5).

Pod ortogonalnom projekcijom vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu $p$ podrazumijeva se dužina duži $A'B'$, tj. $\left|A'B'\right|$, pri čemu su tačke $A'$ i $B'$ ortogonalne projekcije, respektivno tačaka $A$ i $B$ na osu $p$, uzeta sa predznakom $+$ ako je vektor $\overrightarrow{AB}$ orjentisan na istu stranu kao i osa $p$ u odnosu na ravan koja prolazi kroz tačke $A$ i $A'$ a normalna je na pravu $p$, i sa znakom $-$ u suprotnom slučaju.




Slika 6.5: Projekcija vektora na osu

DEFINICIJA 6.5 (Pravougli koordinatni sistem, Slika 6.7a).

Uređeni skup tri ose koje prolaze kroz utvrđenu tačku $O$ (pol ili koordinanti početek) i koje su uzajamno okomite, obrazuju Descartesov[a] pravougli koordinatni sistem

[a]René Descartes (31.mart 1596.–11.februar 1650.) bio je francuski filozof, matematičar i naučnik.

Dakle tri uzajamno ortogonalne orjentisane prave, koje prolaze kroz tačku $O$ obrazuju Descartesov pravougli koordinatni sistem. Prave koje obrazuju pravougaoni koordinatni sistem nazivaju se koordinatne ose a njihova zajednička tačka $O$ koordinatni početak.

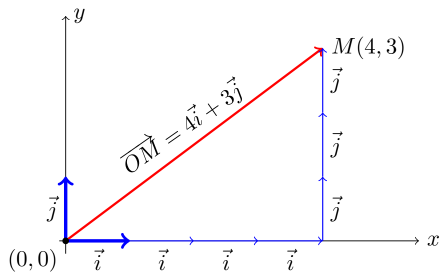
Ako se koordinatne ose obilježe sa $Ox$, $Oy$, $Oz$ i orjentišu se kao na Slici 6.7a kaže se da one obrazuju desni prostorni koordinatni sistem i nazivaju se respektivno apscisna osa, ordinatna osa i aplikativna osa, odnosno $x$–osa, $y$–osa i $z$–osa. Jedinične vektore (ort–vektori ili ortovi) koordinatnih osa $Ox$, $Oy$, $Oz$, (Slika 6.7b) označavaćemo sa $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$.

Pokažimo kako se tačka a zatim i vektor predstavljaju. Posmatrajmo Sliku 6.6, tj. slučaj u ravni ($z = 0$). Tačka $M$ ima koordinate 4 i 3, 4 je njena $x$–koordinata i to je udaljenost od $y$–ose, dok je 3 njena $y$–koordinata i to je udaljenost od $x$–ose. Na ovaj način jednoznačno je određena tačka u ravni. Vektor $\overrightarrow{OM}$ možemo predstaviti u bazi $(\vec{i}, \vec{j})$ pomoću ovih projekcija tačke. Sa Slike 6.6 vidimo da je

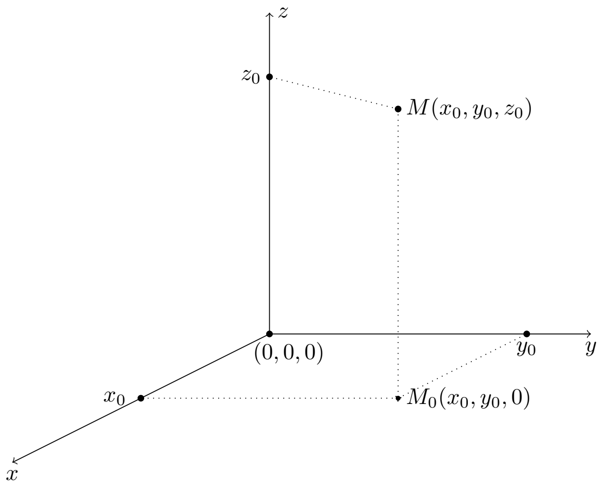
$$\overline{OM} = 4\vec{i} + 3\vec{j}.$$

Na isti način možemo predstaviti tačku u prostoru, samo što imamo jednu dodatnu koordinatu, u ovom slučaju $z$. Odredimo ortogonalne projekcije tačke $M$ na koordinatne ose, u ovom slučaju to su $x_0$, $y_0$, $z_0$, Slika 6.7a. Vektor $\overrightarrow{OM}$ možemo predstaviti kao linernu kombinaciju

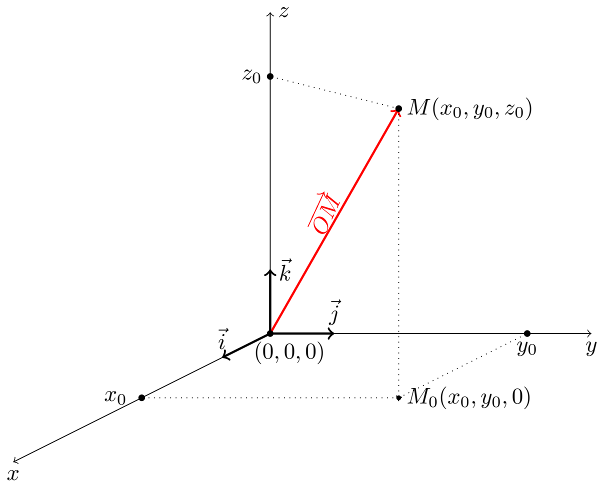
$$\overrightarrow{OM} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}.$$




Slika 6.6: Predstavljanje vektora u ravni




(a) Pravougli koordinatni sistem




(b) Vektor $\overrightarrow{OM}$

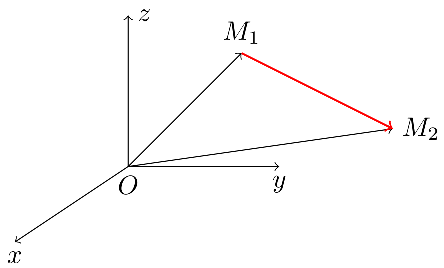
Slika 6.7

Osim notacije $\overrightarrow{OM} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ koristimo i sljedeću notaciju

$$\overrightarrow{OM} = (x_0, y_0, z_0).$$

Inače vektor $\overrightarrow{OM}$ naziva se i vektor položaja tačke $M$.

Ako su date dvije tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ Slika 6.8. Kako izraziti vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$? Vidimo da je $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$ Sada je




Slika 6.8

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.\end{aligned}$$

Dakle, ako su date koordinate početne i krajnje tačke vektora, njegove koeficijente računamo tako što od koeficijenata krajnje tačke oduzimamo koeficijente početne tačke.

Primjer 6.1.

Ispitati da li su vektori $\vec{a} = (4, -6, 10)$ i $\vec{b} = (-6, 9, -15)$ kolinearni.

Rješenje:

Znamo da su dva vektora kolinearna ako leže na istom nosaču (pravoj) ili se mogu paralelnim pomjeranjem dovesti na isti nosač. Ako leže na istom nosaču onda je

$$\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) = k(b_1, b_2, b_3),$$

dva vektora su jednaka ako su im odgovarajući koeficijenti jednaki pa je

$$\begin{aligned} a_1 = kb_1 &\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = k, \\ a_2 = kb_2 &\Leftrightarrow \frac{a_2}{b_2} = k, \\ a_3 = kb_3 &\Leftrightarrow \frac{a_3}{b_3} = k, \end{aligned}$$

pa dobijamo produženu proporciju

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k} \tag{6.2}$$

Sada samo treba ispitati da li koeficijenti vektora zadovoljavaju prethodnu proporciju. Vrijedi

$$\frac{4}{-6} = \frac{-6}{9} = \frac{10}{-15} = -\frac{2}{3},$$

dakle vektori su kolinearni.

Primjer 6.2.

Odrediti parametre $\alpha$ i $\beta$ tako da vektori $\vec{a} = (\alpha, 1, -4)$ i $\vec{b} = (3, 4, \beta)$ budu kolinearni.

Rješenje:

Koristimo ponovo uslov (6.2)

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{4} = \frac{-4}{\beta}, \\ &\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{4}, \\ &\frac{1}{4} = \frac{-4}{\beta} \Leftrightarrow \beta = -16. \end{aligned}$$

Primjer 6.3.

Razložiti vektor $\vec{a}$ u pravcu vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$, ako je $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = -2\vec{p} + \vec{q}$ i $\vec{c} = 7\vec{p} - 4\vec{q}$.

Rješenje:

Vrijedi

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} \\ 3\vec{p} - 2\vec{q} &= \alpha(-2\vec{p} + \vec{q}) + \beta(7\vec{p} - 4\vec{q}) \\ 3\vec{p} - 2\vec{q} &= (-2\alpha + 7\beta)\vec{p} + (\alpha - 4\beta)\vec{q}, \end{aligned}$$

izjednačavajući koeficijente dobijamo sistem

$$\begin{aligned} 3 &= -2\alpha + 7\beta \\ -2 &= \alpha - 4\beta, \end{aligned}$$

čijim rješavanjem dobijamo $\alpha = 2$, $\beta = 1$, pa je

$$\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}.$$

Primjer 6.4.

Ispitati linearnu zavisnost vektora $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (2, -4, 1)$, $\vec{c} = (1, -1, -1)$.

Rješenje:

**I način**–rang matrice
Formirajmo matricu čiji su elementi jedne vrste upravo koeficijenti jednog od vektora, druge vrste koeficijenti drugog vektora, itd. Zatim odredimo rang te matrice. Vrijedi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix},$$

dakle rang $A = 3$, tj. imamo tri nezavisne vrste ili kolone, a pošto su u matrici elementi vrsta koeficijenti od vektora to su naši vektori nezavisni.
**II način**–sistem homogenih jednačina Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su linearno nezavisni ako jednačina $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$ ima samo trivijalno rješenje, tj. za $\alpha = \beta = \gamma = 0$, u suprotnom, ako ima i drugih rješenja, vektori su zavisni. Vrijedi

$$\begin{aligned} & \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \\ & \alpha(\vec{i} + 2\vec{j}) + \beta(2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}) + \gamma(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) = 0 \Leftrightarrow \\ & (\alpha + 2\beta + \gamma)\vec{i} + (2\alpha - 4\beta - \gamma)\vec{j} + (\beta - \gamma)\vec{k} = 0, \ \text{(0 predstavlja nula–vektor)}, \end{aligned}$$

iz posljednje jednakosti dobijamo sistem

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \\ 2\alpha - 4\beta - \gamma &= 0 \\ \beta - \gamma &= 0, \end{aligned}$$

vrijednost determinante je

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0,$$

dakle sistem ima samo trivijalno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Pa zaključujemo da su posmatrani vektori nezavisni.

## 6.1 Skalarni proizvod

Definicija 6.6.

Broj, odnosno skalar

$$|\vec{x}||\vec{y}| \cos \measuredangle(\vec{x}, \vec{y})$$

naziva se skalarni proizvod vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$ i obilježava

$$\vec{x}\cdot\vec{y}.$$

Dakle vrijedi

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\measuredangle(\vec{x},\vec{y}),$$

gdje je $\measuredangle(\vec{x},\vec{y})$ ugao između vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

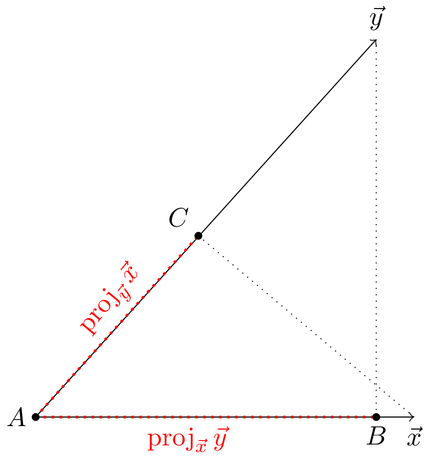
Skalarni proizvod je binarna operacija, koja nije zatvorena, pošto rezultat proizvoda $\vec{x}\cdot\vec{y}$ nije vektor nego skalar.

Primjetimo da je $|\vec{y}|\cos\measuredangle(\vec{x},\vec{y})$ ortogonalna projekcija vektora $\vec{y}$ na osu vektor $\vec{x}$ (ili preciznije na pravu ili nosač vektora $\vec{x}$). Sada je

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}|\operatorname{proj}_{\vec{x}}\vec{y},$$

vrijedi i

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{y}|\operatorname{proj}_{\vec{y}}\vec{x}.$$




Slika 6.9: Projekcije vektora

Osobine skalarnog proizvoda date su u sljedećoj teoremi.

**Teorema 6.2** (Osobine skalarnog proizvoda).

*Neka su $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ proizvoljni vektori, a $\alpha$ je proizvoljan skalar. Vrijedi*

(1) $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x}$;

(2) $\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z}$;

(3) $(\alpha\vec{x})\cdot\vec{y} = \alpha(\vec{x}\cdot\vec{y})$;

(4) $\vec{x}\cdot\vec{x} = |\vec{x}|^2$;

(5) $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$, *(Cauchy–Schwarzova nejednakost).*

*Dokaz.* Dokažimo samo osobinu (4). Na osnovu definicije skalarnog proizvoda je

$$\vec{x}\cdot\vec{x} = |\vec{x}|\cdot|\vec{x}|\cos\measuredangle(\vec{x},\vec{x}) = |\vec{x}|\cdot|\vec{x}|\cos 0 = |\vec{x}|\cdot|\vec{x}| = |\vec{x}|^2.$$

□

Imajući u vidu da je $\cos 0 = 1$, $\cos 90^0 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, izračunajmo skalarne proizvode sa ortovima $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}\vec{i}\cdot\vec{i} &= |\vec{i}|\cdot|\vec{i}|\cos 0 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1,\\ \vec{j}\cdot\vec{j} &= |\vec{j}|\cdot|\vec{j}|\cos 0 = 1,\\ \vec{k}\cdot\vec{k} &= |\vec{k}|\cdot|\vec{k}|\cos 0 = 1,\end{aligned}$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cos\frac{\pi}{2}=1\cdot1\cdot0=0,$$
$$\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|\cdot|\vec{k}|\cos\frac{\pi}{2}=0,$$
$$\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=|\vec{j}|\cdot|\vec{k}|\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Dakle vrijedi

$$\boxed{\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1} \tag{6.3}$$

i

$$\boxed{\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0.} \tag{6.4}$$

U sljedećoj teoremi date su neke geometrijske osobine vektora, koje možemo iskazati preko skalarnog proizvoda.

**Teorema 6.3.**

*Neka su $\vec{x}$, $\vec{y}$ proizvoljni vektori. Vrijedi*

(1) $|\vec{x}|=(\vec{x}\cdot\vec{x})^{\frac{1}{2}}$ *(dužina, intenzitet, modul ili norma vektora);*

(2) $\cos\measuredangle(\vec{x},\vec{y})=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$, *(ugao između vektora, odnosno kosinus ugla između vektora);*

(3) $\operatorname{proj}_{\vec{y}}\vec{x}=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{y}|}$, $\vec{y}\neq0$; *(projekcija vektora $\vec{x}$ na vektor $\vec{y}$);*

(4) $\vec{x}\perp\vec{y}\Leftrightarrow(\vec{x}\cdot\vec{y}=0,\ \vec{x}\neq0\wedge\vec{y}\neq0)$, *(ortogonalnost vektora).*

Kako koristimo ortonormiranu bazu, tj. bazu koju čine vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, pokažimo kako se računaju vrijednosti iskazane u prethodnoj teoremi. Neka su $\vec{x}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$ i $\vec{y}=y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}$. Tada je

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k})\cdot(y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}),$$

a kako vrijedi (6.3) i (6.4) to je

$$\boxed{\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}$$

pa je sada

$$\boxed{\vec{x}\cdot\vec{x}=x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

a kako je $\vec{x}\cdot\vec{x}=|\vec{x}|^2$ to dobijamo

$$\boxed{|\vec{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

Vrijedi

$$\boxed{\cos\measuredangle(\vec{x},\vec{y})=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}}$$

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\vec{y}}\vec{x}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}}$$

te

$$\boxed{\vec{x}\perp\vec{y}\Leftrightarrow(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0,\ \vec{x}\neq0\wedge\vec{y}\neq0}\ )$$

Primjer 6.5.

Dati su vektori $\vec{a} = (-1, 2, 1)$ i $\vec{b} = (1, -3, 2)$.
Izračunati $(a)$ $|\vec{a}|$; $(b)$ $|\vec{b}|$; $(c)$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $(d)$ $\cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$; $(e)$ $\text{proj}_{\vec{a}}\, \vec{b}$.
Rješenje:

Vrijedi

$(a)$ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$;

$(b)$ $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$;

$(c)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = (-1, 2, 1) \cdot (1, -3, 2) = -1 - 6 + 2 = -5$;

$(d)$ $\cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \dfrac{(-1, 2, 1) \cdot (1, -3, 2)}{\sqrt{1 + 4 + 1}\sqrt{1 + 9 + 4}} = \dfrac{-1 - 6 + 2}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \dfrac{-5}{\sqrt{84}}$;

$(e)$ $\text{proj}_{\vec{a}}\, \vec{b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \dfrac{-5}{\sqrt{6}}$.

Primjer 6.6.

Izračunati unutrašnje uglove i obim trougla trougla $\triangle ABC$ čija su tjemena $A(2, -1, 3)$, $B(1, 1, 1)$, $C(0, 0, 5)$.

Rješenje:

Vidjeti Sliku 6.10, vrijedi

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}$$
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cos\beta \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|}.$$

Uglove $\alpha$ i $\beta$ računamo koristeći prethodne formule, dok treći ugao možemo iz $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Dalje je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (-1, 2, -2),\ \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2)\\
\overrightarrow{AC} &= (-2, 1, 2)\\
\overrightarrow{BC} &= (-1, -1, 4)
\end{aligned}$$

pa je

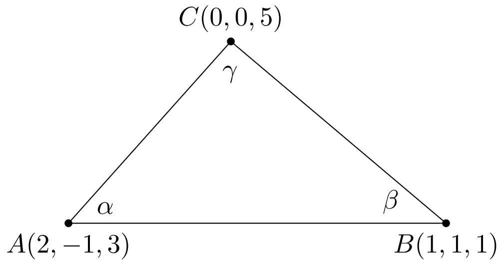
$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{(-1, 2, -2) \cdot (-2, 1, 2)}{\sqrt{1 + 4 + 4}\sqrt{4 + 1 + 4}} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}\\
\cos\beta &= \frac{(1, -2, 2) \cdot (-1, -1, 4)}{\sqrt{1 + 4 + 4}\sqrt{1 + 1 + 16}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

i

$$\gamma = \pi - \alpha - \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Obim trougla je

$$O = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{1 + 4 + 4} + \sqrt{4 + 1 + 4} + \sqrt{1 + 1 + 16} = 6 + \sqrt{18} = 6 + 3\sqrt{2}.$$




Slika 6.10: Trougao $\triangle ABC$

Primjer 6.7.

Date su tačke $A(3,3,-2)$, $B(0,-3,4)$, $C(0,-3,0)$, $D(0,2,-4)$. Izračunati $\text{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD}$.

Rješenje:

Sa Slike 6.11 je

$$\cos\varphi = \frac{\text{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} \text{ pa je } \text{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{CD}|\cos\varphi,$$

znamo da je $\cos\varphi = \cos\frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{AB}|}$, pa je

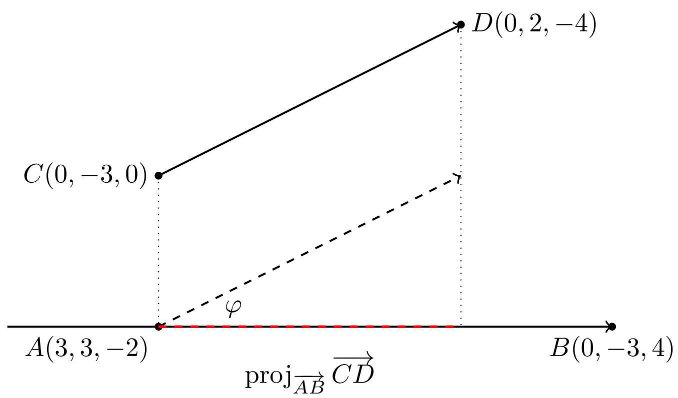
$$\text{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{CD}|\frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{CD}|}.$$

Odredimo sada $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $|\overrightarrow{AB}|$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= (0-0)\vec{i} + (2-(-3))\vec{j} + (-4-0)\vec{k} = (0,5,-4),\\ \overrightarrow{AB} &= (0-3)\vec{i} + (-3-3)\vec{j} + (4-(-2))\vec{k} = (-3,-6,6),\\ |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{9+36+36} = 9,\end{aligned}$$

pa je na kraju

$$\text{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD} = \frac{(0,5,-4)\cdot(-3,-6,6)}{9} = \frac{0-30-24}{9} = -6.$$




Slika 6.11: Projekcija vektora

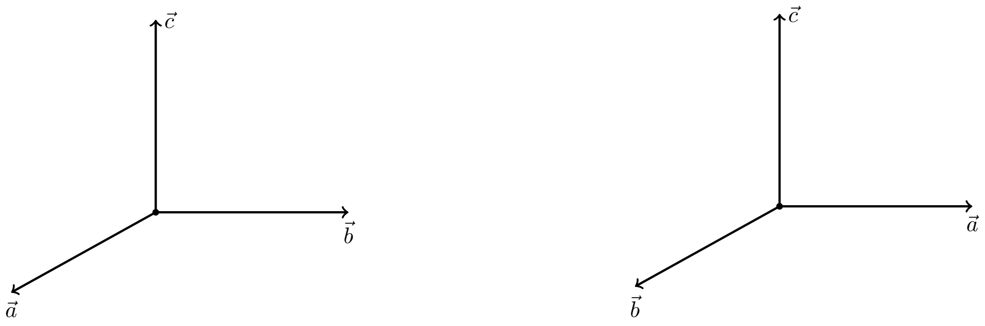
Vidimo da na Slici 6.11 vektori nisu dobro orjentisani, zbog negativne projekcije.

## 6.2 Vektorski proizvod

Definicija 6.7 (Desni triedar).

Kaže se da tri nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sa zajedničkim početkom obrazuju redom desni triedar ako se rotacija vektora $\vec{a}$ prema vektoru $\vec{b}$, najkraćim putem, posmatra sa kraja vektora $\vec{c}$ vrši suprotno kretanju kazaljke sata Slika 6.12a.

Na sličan način definiše se lijevi triedar koji obrazuju tri nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sa zajedničkim početkom Slika 6.12b.




(a) Desni triedar vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (b) Lijevi triedar vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

Slika 6.12

Definicija 6.8 (Vektorski proizvod).

Ako je $\vec{n}_0$ jedinični vektor normalan na ravan koju obrazuju vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ pri čemu $\vec{x}$, $\vec{y}$ i $\vec{n}_0$ obrazuju desni triedar, onda se vektor

$$|\vec{x}||\vec{y}|\sin\measuredangle(\vec{x},\vec{y})\vec{n}_0$$

naziva vektorski proizvod vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$ i obilježava sa $\vec{x}\times\vec{y}$.

Dakle, vrijedi

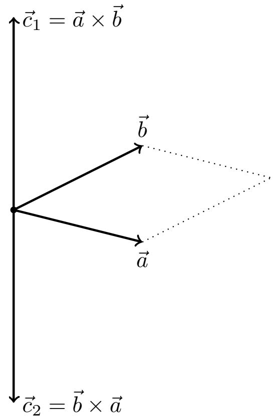
$$\boxed{\vec{x}\times\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\sin\measuredangle(\vec{x},\vec{y})\vec{n}_0}$$

i

$$\boxed{|\vec{x}\times\vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}||\sin\measuredangle(\vec{x},\vec{y})|.}$$

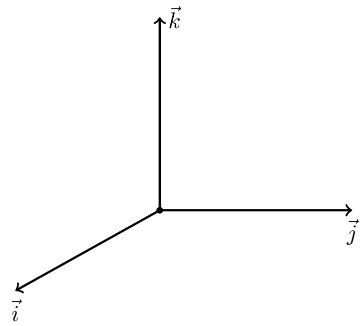
Dakle, vektorski proizvod dva vektora $\vec{x}$, $\vec{y}$ je vektor $\vec{z}$, koji normalan na ravan koju obrazuju vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$, intenzitet mu je jednak površini paralelograma koji formiraju vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$, a smjer mu je takav da $\vec{x}$, $\vec{y}$ i $\vec{z}$ obrazuju triedar desne orjentacije.

Ako je $\vec{c}_1 = \vec{a}\times\vec{b}$ i $\vec{c}_2 = \vec{b}\times\vec{a}$, međusobni raspored vektora prikazan je na Slici 6.13.




Slika 6.13: Vektori $\vec{c}_1$ i $\vec{c}_2$

Kako ortovi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ obrazuju triedar desne orjentacije, kao na Slici 6.14 te na osnovu definicije vektorskog




Slika 6.14: Ort–vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

proizvoda dobijamo

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = 0 & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} = 0 & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} = 0 \end{array}$$

Vrijedi sljedeća teorema.

**Teorema 6.4** (Osobine vektorskog proizvoda).

*Ako su $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ proizvoljni vektori i $\alpha$ je proizvoljan skalar, onda je*

(1) $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$;

(2) $(\alpha\vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (\alpha\vec{y}) = \alpha(\vec{x} \times \vec{y})$;

(3) $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$.

Ako su vektori $\vec{x}$, $\vec{y}$ dati u ortonormiranoj bazi, tj. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ tada je

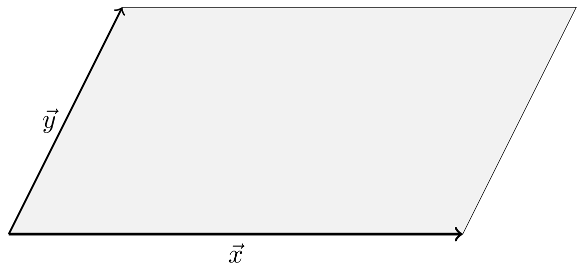
$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= (x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) \times (y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}) \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}. \end{aligned}$$

Posljednju jednakost možemo pisati u obliku determinante

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

**Primjena vektorskog proizvoda**. Iz same definicije vektorskog proizvoda proizilazi da je intenzitet vektorskog proizvoda $\vec{x}$ i $\vec{y}$ jednak površini paraleograma koju formiraju ova dva vektora. Ako označimo sa $P$ ovu površinu, vrijedi

$$\boxed{P = |\vec{x} \times \vec{y}|}$$




Slika 6.15: Površina paralelograma

U slučaju da su vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ paralelni ili ako imaju isti nosač tada je

$$\vec{x} \times \vec{y} = 0,$$

jer je $\measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, pa je $\sin \measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ ($\vec{x} \times \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \measuredangle(\vec{x}, \vec{y})\vec{n}_0$). Pa koristeći vektorski proizvod možemo ispitati kolinearnost vektora, tj. vrijedi

$$\boxed{\vec{x} \times \vec{y} = 0 \Leftrightarrow (\vec{x} \parallel \vec{y},\ \vec{x} \neq 0 \wedge \vec{y} \neq 0).}$$

Primjer 6.8.

Ako je $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, izračunati $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Rješenje:

Vrijedi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25},$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|| \sin \varphi| = 5 \cdot 10 \sqrt{1 - \left(\frac{6}{25}\right)^2} = 2\sqrt{589}$$

Primjer 6.9.

Izračunati površinu i visinu $h_C$ trougla $\triangle ABC$, čiji su vrhovi $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 5, 4)$, $C(2, 5, 8)$.

Rješenje:

Vidi Sliku 6.16, površinu trougla računamo

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} P_{\square ABCD} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Vrijedi

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 3, 1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (1, 3, 5)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=12\vec{i}+16\vec{j}-12\vec{k}$$

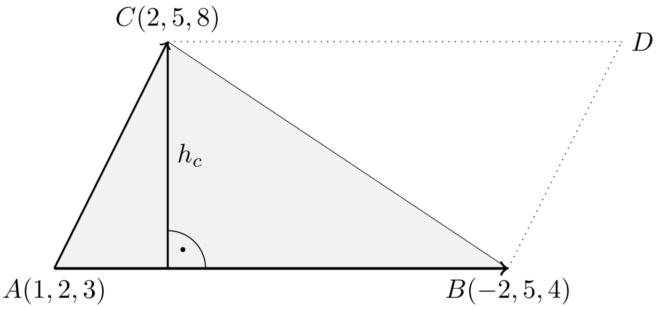
$$P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+16^2+12^2}=\frac{1}{2}\sqrt{544}=2\sqrt{34}.$$

Površina trougla je $P_{\triangle ABC}=2\sqrt{34}$.

Visinu možemo izračunati i na drugi način $P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot h_c$, pa je

$$h_c=\frac{2P_{\triangle ABC}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{4\sqrt{34}}{\sqrt{9+9+1}}=\frac{4\sqrt{34}}{\sqrt{19}}=\frac{4\sqrt{646}}{19},$$

visina je $h_C=\frac{4\sqrt{646}}{19}$.




Slika 6.16: Površina trougla

Primjer 6.10.

Izračunati projekciju vektora $\vec{a}=(3,-12,4)$ na vektor $\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$, ako je $\vec{c}=(1,0,-2)$, $\vec{d}=(1,3,-4)$.

Rješenje:

Izračunajmo prvo vektor $\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$

$$\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 3 & -4\end{vmatrix}=6\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k},$$

sada je projekcija

$$\text{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{(3,-12,4)\cdot(6,2,3)}{\sqrt{6^2+2^2+3^2}}=\frac{6}{7}.$$

Primjer 6.11.

Neka je $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=5$, $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{4}$, izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{m}=2\vec{b}-\vec{a}$ i $\vec{n}=3\vec{a}+2\vec{b}$.

Rješenje:

$$|\vec{m}\times\vec{n}|=|(2\vec{b}-\vec{a})\times(3\vec{a}+2\vec{b})|=|6\vec{b}\times\vec{a}+\underbrace{4\vec{b}\times\vec{b}}_{=0}-\underbrace{3\vec{a}\times\vec{a}}_{=0}-2\vec{a}\times\vec{b}|$$

$$= |6\vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{b} \times \vec{a}| = 8|\vec{b} \times \vec{a}| = 8|\vec{b}||\vec{a}|| \sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})| = 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2}.$$

Primjer 6.12.

Odrediti jedinični vektor koji je normalan na ravan određenu vektorima $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $b = (1, -1, 1)$.

Rješenje:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k},$$

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

## 6.3 Mješoviti proizvod tri vektora

Neka su data tri nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i vektor $\vec{d}$ normalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Pomnožimo li prvo $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektorski, a zatim $\vec{a} \times \vec{b}$ pomnožimo sa $\vec{c}$ skalarno, dobijamo mješoviti proizvod

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c},}$$

tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Ova tri vektora konstruišu (razapinju) paralelopiped Slika 6.17. U ovom slučaju $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. obrazuju triedar desne orjentacije. Površina baze paralelopipeda (Slika 6.17 paraleogram obojen sivo) jednaka je $|\vec{a} \times \vec{b}|$, dok je visina $h$ jednaka $h = \text{proj}_{\vec{d}}\vec{c}$. Pa je sada

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}|\vec{d}_0 \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \text{ proj}_{\vec{d}_0} \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}|h = V,$$

gdje je $\vec{d}_0 = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$.

Sa druge strane, u slučaju drugačije orjentacije, tj. kada vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ obrazuju triedar lijeve orjentacije, projekcija $\text{proj}_{\vec{d}_0} \vec{c}$ bi bila negativna. U ovom slučaju,

$$V = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

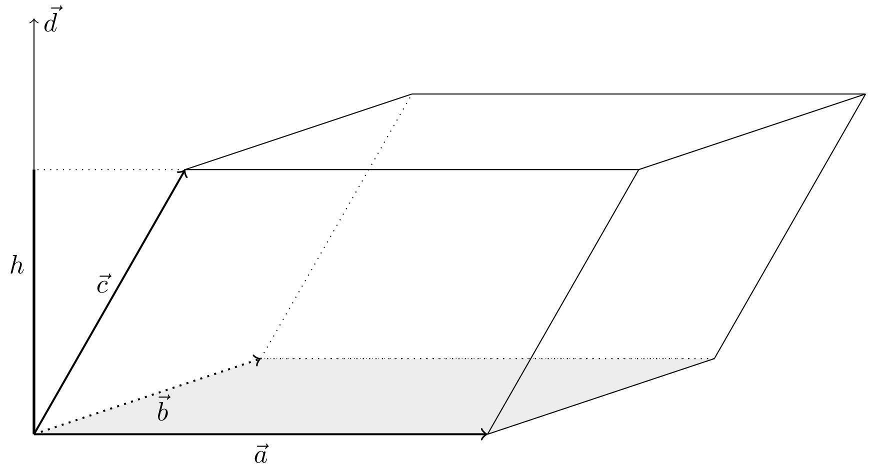
Odnosno, zapreminu paralelopipeda računamo

$$\boxed{V = \pm(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c},}$$

predznak biramo tako da zapremina ne bude negativna.

Ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ dati u ortonormiranoj bazi i ako vrijedi $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, tada zapreminu računamo

$$\boxed{V = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$




Slika 6.17: Zapremina paralelopipeda

Primjer 6.13.

Odrediti parametar $t$ tako da vektori $\vec{a} = (\ln(t-2), -2, 6)$, $\vec{b} = (t, -2, 5)$, $\vec{c} = (0, -1, 3)$ budu komplanarni.

Rješenje:

U slučaju da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanarni, da leže u istoj ravni, njihov mješoviti proizvod bio bi jednak 0. Pa iz uslova $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ računamo vrijednost parametra $t$, vrijedi

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \ln(t-2) & -2 & 6 \\ t & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6\ln(t-2) - 6t + 5\ln(t-2) + 6t = \ln(t-2) = 0$$

$$\ln(t-2) = 0 \Leftrightarrow e^0 = t - 2 \Leftrightarrow t = 3.$$

Primjer 6.14.

Odrediti zapreminu tetraedra čiji su vrhovi $A(3,1,-2)$, $B(-4,2,3)$, $C(1,5,-1)$, $D(-5,-1,2)$. Kolika je visina tetraedra ako se za bazu uzme trougao $\triangle ABC$? Rješenje:

Vidi Sliku 6.18, paralelopiped kojeg razapinju vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ podijelimo na dva dijela sa ravni, čiji je dio predstavljen crvenim paralelogramom $\square BEFC$. Sada treba da izračunamo zapreminu tetraedra $V_T$ određenog vrhovima $A, B, C, D$. Zapremina ovog tetredra predstavlja $\frac{1}{3}$ zapremine prizme $V_P$ određene sa vrhovima $A, B, C, E, F, D$.

Pa je

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{1}{3}V_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}V = \frac{1}{6}V \\ V &= \pm(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB} &= (-7, 1, 5) \\ \overrightarrow{AC} &= (-2, 4, 1) \\ \overrightarrow{AD} &= (-8, -2, 4) \\ (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} -7 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -8 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 54, \\ V_T &= \frac{1}{6} \cdot 54 = 9. \end{aligned}$$

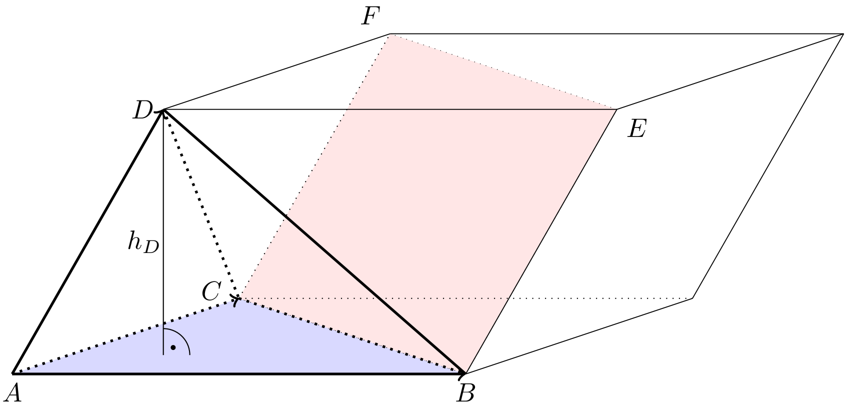
Visinu računamo na sljedeći način

$$V_T = \frac{1}{3} P_{\triangle ABC} \cdot h_D \Leftrightarrow h_D = \frac{3V_T}{P_{\triangle ABC}}$$

$$P_{\triangle} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -7 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -19\vec{i} - 3\vec{j} - 26\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-19)^2 + (-3)^2 + (-26)^2} = \sqrt{1046}$$

$$h_D = \frac{54}{\sqrt{1046}} = \frac{54\sqrt{1046}}{1046}.$$




Slika 6.18: Zapremina tetraedra

## Zadaci za vježbu

**Linearna zavisnost vektora. Razlaganje vektora po bazi**

1. Odrediti parametre $u$ i $v$, tako da vektori $\vec{a} = (u, 1, -2)$ i $\vec{b} = (-1, 3, v)$, budu kolinearni.
2. Da li su vektori $\vec{a} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 10\vec{k}$ i $\vec{b} = -6\vec{i} + 9\vec{j} - 15\vec{k}$ kolinearni?
3. Ako je $\vec{a} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{3}\right)$, odrediti $x, z$ vektora $\vec{b} = (x, 4, z)$, tako da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ budu kolinearni.
4. Odrediti parametar $k$, tako da vektori $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (2, k, -4)$, $\vec{c} = (k, 12, 6)$, budu komplanarni. Za takvu vrijednost parametra $k$ razložiti vektor $\vec{a}$ po pravcima vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.
5. Ispitati linearnu zavisnost vektora $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (4, 2, 0)$ i $\vec{c} = (1, 1, 1)$.
6. Ispitati linearnu zavisnost vektora $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$, a ako su zavisni razložiti vektor $\vec{l}$ na $\vec{m}$ i $\vec{n}$,
   (a) $\vec{l} = (2, -1, -1)\,, \vec{m} = (-1, 2, -1)\,, \vec{n} = (-1, -1, 2)$; (b) $\vec{l} = (1, 1, 1)\,, \vec{m} = (0, 1, 1)\,, \vec{n} = (-1, 0, 1)$; (c)

**Skalarni proizvod vektora**

1. Dati su vektori $\vec{a} = (2, 1, -2)$, $\vec{b} = (-1, 4, 3)$. Izračunati $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$, $\operatorname{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$ i $\operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$.
2. Tjemena trougla su $A(2, -1, 3)$, $B(1, 3, -4)$, $C(0, 2, 4)$. Odrediti unutrašnje uglove trougla i dužine stranica trougla.
3. Neka je $|a| = 3$, $|b| = 6$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Izračunati $|\vec{a} + \vec{b}|$ i $|2\vec{a} - \vec{b}|$.
4. Izračunati dužinu dijagonala paralelograma, ako su mu stranice vektori $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$, $\vec{b} = -3\vec{m} + 5\vec{n}$ i $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 3$, $\measuredangle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.
5. Odrediti projekciju vektora $\vec{d} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$ na vektor $\vec{c}$, ako su $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (3, -2, 1)$, $\vec{c} = (2, -4, 5)$.
6. Za koje su vrijednosti parametra $m$ vektori $\vec{a} = (-2, 1, m)$, $\vec{b} = (1, -2, 3)$ ortogonalni.

**Vektorski proizvod vektora**

1. Ako je $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$ i $\vec{a}\cdot\vec{b} = 45$, izračunati $|\vec{a}\times\vec{b}|$.
2. Ako je $\vec{p} = 2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a}-2\vec{b}$ i $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ i $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, izračunati $\vec{p}\times\vec{q}$.
3. Stranice paralelograma date su vektorima $\vec{p} = -3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a}+4\vec{b}$ i $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ i $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. Izračunati površinu paralelograma i ugao izmedju dijagonala.
4. Izračunati projekciju $\vec{a} = (2,1,-3)$ na vektor $\vec{b} = \vec{c}\times\vec{a}$, ako je $\vec{c} = (1,0,-2)$ i $\vec{b} = 1,3,-4)$.
5. Neka je $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p}-4\vec{q}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{p}+5\vec{q}$ i $|\vec{q}| = |\vec{q}| = 1$, $\measuredangle(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Izračunati površinu trougla i visinu $h_c$.
6. Dati su vektori $\vec{a} = (1,1,-1), \vec{b} = (-2,-1,2)$, $\vec{c} = (1,-1,2)$.
   (a) Razložiti vektor $\vec{c}$ po pravcima vektora $\vec{a},\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$;
   (b) Odrediti ugao koji obrazuju vektor $\vec{c}$ sa ravni odredjenom vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

**Mješoviti vektorski proizvod**

1. Ispitati da li tačke $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,13)$ pripadju istoj ravni.
2. Dokazati da su vektori $\vec{a} = (-1,3,2)$, $\vec{b} = (2,-3,4)$, $\vec{c} = (-3,12,6)$ komplanarni.
3. Izračunati zapreminu tetraedra i visinu $h_D$, čiji su vrhovi $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,6)$, $D(2,3,8)$.

**Razni zadaci**

1. Dati su vektori $\vec{a} = -2\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p}-2\vec{q}$, $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$. Izračunati $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}, \measuredangle(\vec{a},\vec{b})$, $\mathrm{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a}$ i $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$.
2. Ako je $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{AC}| = 4$, $\measuredangle(\vec{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ i tačka M je sredina duži $BC$, izračunati $\overrightarrow{AM}$ preko $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, a zatim $|\overrightarrow{AM}|$.
3. Izračunati ugao izmedju simetrala koordinatnih osa $yOz$ i $xOz$.
4. Izračunati ugao izmedju vektora $2\vec{a}-4\vec{b}$ i $3\vec{a}+2\vec{b}$, ako je $\vec{a} = (2,-1,3)$, $\vec{b} = (3,-2,2)$.
5. U trouglu $\triangle$, $ABC$ poznato je $A(2,1,-3)$, $\vec{AB} = (2,-3,5)$, $\vec{BC} = (3,-2,4)$. Odrediti koordinate vrhova B i C i koeficijente vektora $\vec{AC}$ i $\measuredangle\gamma$.
6. Odrediti projekciju vektora $\vec{a} = (2,4,\sqrt{5})$ na osu koja zaklapa uglove $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$ a sa $z$-osom tup ugao.
7. Izračunati površinu trougla čije su dvije stranice vektori $\vec{a} = 4\vec{j}-\vec{k}+3\vec{k}$ i $\vec{b} = (5,-3,7)$.
8. Odrediti parametar $\lambda$ tako da vektori $\vec{a} = 14\vec{j}+\lambda\vec{k}+3\vec{i}$ i $\vec{b} = (\lambda,-2,\lambda)$ budu okomiti.
9. Odrediti parametar $k$ tako da vektori $\vec{a} = (-1,3,2)$, $\vec{b} = (2,k,-4)$ i $\vec{c} = (k,12,6)$ budu komplanarni. Za tako dobijenu vrijednsot parametra $k$ razložiti vektor $\vec{a}$ po pravcima vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.
10. Dat je trougao čiji su vrhovi $A(5,2,-4)$, $B(9,-8,-3)$ i $C(16,-6,-11)$. Odrediti površinu $\triangle\,ABC$ i unutrašnje uglove trougla.
11. Izračunati površinu nad vektorima $\vec{a} = (2,1,-k)$ i $\vec{b} = (-1,1,-7)$ i izračunati ugao izmedju vektora $\vec{a}$ i $\vec{a}+2\vec{b}$.
12. Izračunati visinu paralelopipeda koju obrazuju vektori $\vec{a} = (1,-4,5)$, $\vec{b} = (0,2,-4)$ i $\vec{c} = (2,-2,1)$.
13. Dati su vektori $\vec{a} = (2,-1,7)$, $\vec{b} = (0,-4,3)$ i $\vec{c} = (-1,-2+1)$. Ispitati komplanarnost vektora. Ako nisu komplanarni izračunati visinu tetraedra koju obrazuju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, ako se za bazu uzmu vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
14. Izračunati visinu paralelopipeda koju obrazuju vektori $\vec{a} = (1,-4,5)$, $\vec{b} = (0,2,-4)$ i $\vec{c} = (2,-2,1)$.
15. Izračunati dužinu visine trougla koju obrazuju vektori $\vec{a} = (1,-4,5)$ i $\vec{b} = (0,2,-4)$ i to onu koja odgovara stranici koja je odredjena vektorom $\vec{a}$.
16. Dati su vektori $\overrightarrow{OA} = (5,2,-1)$, $\overrightarrow{OB} = (1,-3,4)$, $\overrightarrow{OC} = (-2,1,3)$, $\overrightarrow{OD} = (2,6,-2)$. Pokazati da je $\square\,ABCD$ paralelogram i izračunati ugao izmedju dijagonala.
17. Data su tri tjemena paralelograma $A(2,-1,0)$, $B(3,4,1)$, $C(-1,0,-1)$. Odrediti četvrto tjeme i ugao izmedju dijagonala.

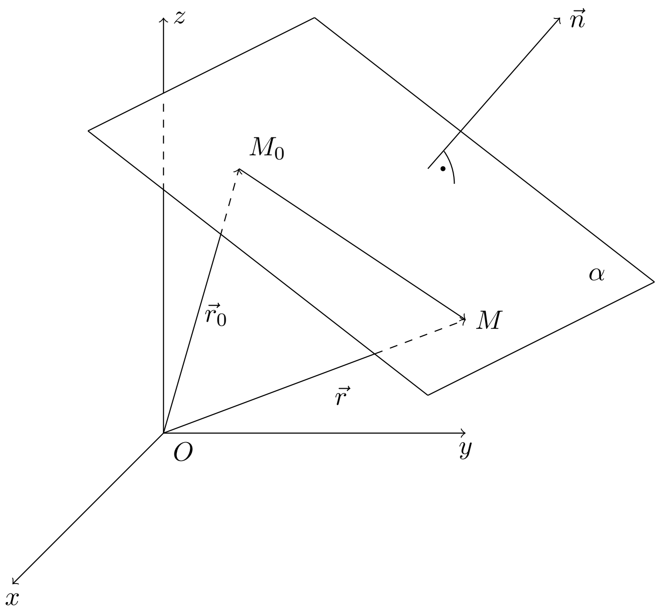
# Poglavlje 7

# Ravan i prava

## 7.1 Ravan

### 7.1.1 Jednačine ravni

Posmatrajmo Sliku 7.4a.




Slika 7.1: Ravan $\alpha$

U pravouglom Descartesovom koordinatnom sistemu data je ravan $\alpha$, određena tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i vektorom $\vec{n} = (A, B, C)$, koji je normalan na ravan $\alpha$. Nekaje $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka ravni $\alpha$ i neka je $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ njen vektor položaja (vektor čiji je početak u tački $O$ a završetak u tački $M$). Vektor položaja tačka $M_0$ je $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$. Iz trougla $\triangle ABC$ je $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{r} - \vec{r}_0$. Kako je vektor $\vec{n}$ normalan na ravan samim tim normalan je i svaku pravu i vektor koj leže u ravni $\alpha$, te je tako vektor normalan $\vec{n}$ normalan i na vektor $\vec{r} - \vec{r}_0$. Iz poglavlja sa vektorima poznat je uslov $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow (\vec{x} \cdot \vec{y} = 0,\ \vec{x} \neq 0, \vec{y} \neq 0)$. Ako sada iskoristimo ovaj uslov dobijamo

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \tag{7.1}$$

Ako sada označimo $\vec{n} \cdot \vec{r}_0 = a$, onda (7.1) možemo pisati u obliku

$$\boxed{\vec{n} \cdot \vec{r} = a} \tag{7.2}$$

Jednačina (7.2) naziva se opšta vektorska jednačina ravni.

Napišimo sada vektore $\vec{n}, \vec{r}$ i $\vec{r}_0$ preko koordinata, vrijedi $\vec{n} = A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $\vec{r}_0 = x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}$. Sada iz (7.1) dobijamo

$$(A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}) \cdot ((x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}) = 0,$$

odnosno

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

ova jedna čina predstavlja skalarna jednačina ravni kroz datu tačku sa poznatim vektorom normale. U ovoj jednačini $x, y, z$ su koordinate bilo koje tačke ravni, $x_0, y_0, z_0$ su koordinate poznate tačka, dok su $A, B, C$ koeficijenti vektora normale.

Dalje je

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

možemo označiti $-(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D$, te dobijamo

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \tag{7.3}$$

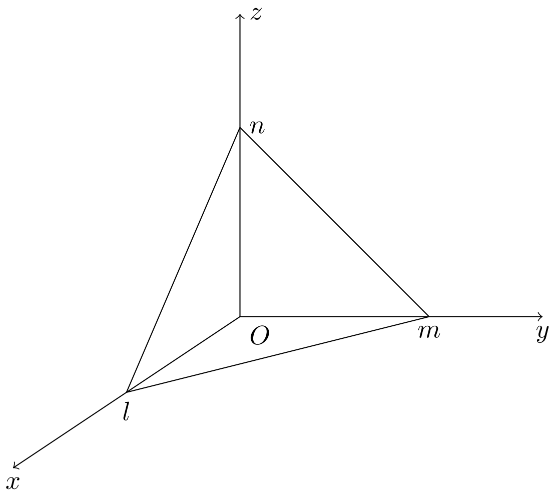
Jednakost (7.3) predstavlja opštu skalarnu jednačinu ravni.

Ako je $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ vrijedi

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz = -D \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1} \tag{7.4}$$

gdje su $-\frac{D}{A} = l$, $-\frac{D}{B} = m$, $-\frac{D}{C} = n$. Jednakost (7.4) predstavlja segmentni oblik jednačine ravni. Brojevi $l, m, n$ su odječci ravni $\alpha$ na koordinatnim osama $x, y, z$, respektivno Slika 7.2.




Slika 7.2: Ravan $\alpha$ sa odsječcima (segmentima) $l, m, n$

Jedinični vektor, u oznaci $\vec{a}_0$, proizvoljnog vektora $\vec{a}$ dobijamo tako što vektor $\vec{a}$ podijelimo sa njegovim intenzitetom $|\vec{a}|$, pa je

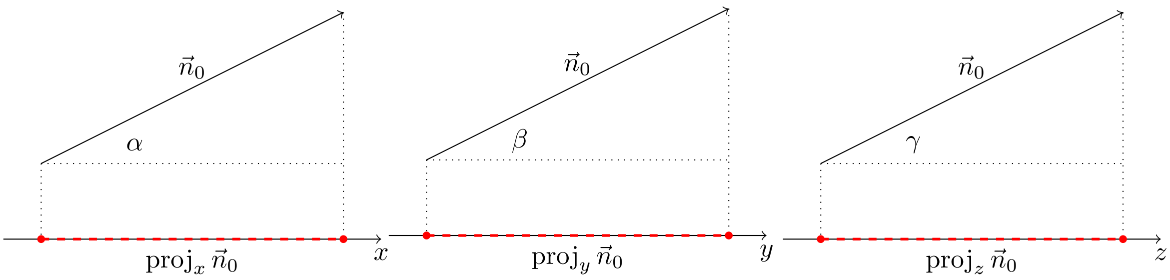
$$\boxed{\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$$

Neka je $\vec{n}_0$ jedinični vektor, i neka vektor $\vec{n}_0$ zahvata uglove $\alpha, \beta, \gamma$ sa $x, y, z$ osom respektivno, tada je sa Slike 7.3

$$\boxed{\text{proj}_x\, \vec{n}_0 = \cos\alpha,\ \text{proj}_y\, \vec{n}_0 = \cos\beta,\ \text{proj}_z\, \vec{n}_0 = \cos\gamma,} \tag{7.5}$$

i

$$\boxed{\vec{n}_0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}.} \tag{7.6}$$



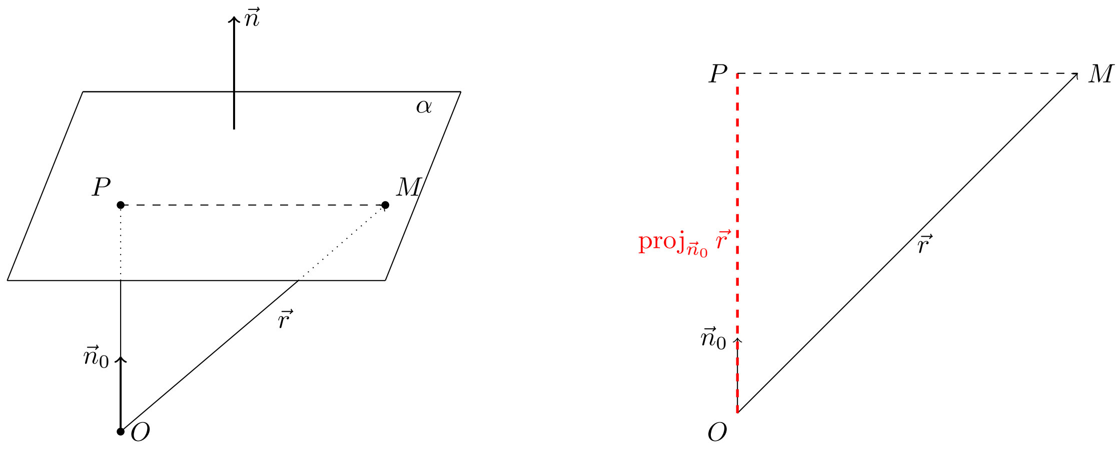

(a) (b) (c)

Slika 7.3: Projekcije jediničnog vektora $\vec{n}_0$ na $x, y$ i $z$ osu

Kako je $\vec{n}_0$ jedinični vektor ($|\vec{n}_0| = 1$), vrijedi $|\vec{n}_0| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$ i

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

Posmatrajmo Sliku 7.4.




(a) (b)

Slika 7.4: Projekcije vektora $\vec{r}$ na jedinični vektor $\vec{n}_0$

Vektoru normale $\vec{n}$ odgovara jedinični vektor $\vec{n}_0$. Pošto radimo sa slobodnim vektorima, prenesimo vektor $\vec{n}_0$ u koordinatni početak, kao na Slici 7.4a. Dužina duži $|OP|$, tj. rastojanje ravni od koordinatnog početka, jednaka je apsolutnoj vrijednosti projekcije vektora $\vec{r}$ na osu na kojoj leži vektor $\vec{n}_0$. Ova osa normalna je na ravan $\alpha$.

Dakle vrijedi

$$\text{proj}_{\vec{n}_0}\,\vec{r} = \pm|OP| = \frac{\vec{n}_0 \cdot \vec{r}}{|\vec{n}_0|} = \vec{n}_0 \cdot \vec{r},$$

označimo ovu projekciju sa $p$, pa je sada

$$p = \vec{n}_0 \cdot \vec{r}.$$

Ako se sada vratimo u jednačinu ravni (7.2), $\vec{n} \cdot \vec{r} = a$, i podijelimo je sa $|\vec{n}|$ dobijamo

$$\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{|\vec{n}|} = \frac{a}{|\vec{n}|} \Leftrightarrow \frac{\vec{n}}{\vec{n}_0} \cdot \vec{r} = \frac{a}{|\vec{n}|} \Leftrightarrow \vec{n}_0 \cdot \vec{r} = \frac{a}{|\vec{n}|},$$

a kako je pokazano $\vec{n}_0 \cdot \vec{r} = p$, to

$$\boxed{\vec{n}_0 \cdot \vec{r} = p}, \tag{7.7}$$

predstavlja normalnu jednačina ravni u vektorskom obliku.

Kako je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ i $\vec{n}_0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$, i poslije množenja ova dva vektora u (7.7), dobijamo

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{7.8}$$

a ovo normalna jednačina ravni u skalarnom obliku.

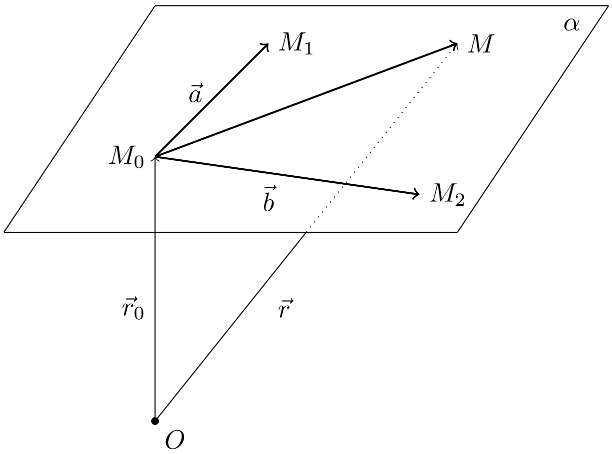
Da bi izveli još jedan oblik jednačine ravni, posmatrajmo Sliku 7.5. Neka je data ravan $\alpha$ i tri tačke ravni $\alpha$, i to $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Neka vrijedi i $\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{M_0M_2}$, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ i $M \in \alpha$. Jasno je da vrijedi $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, te da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{r} - \vec{r}_0$ linearno zavisni pošto pripadaju istoj ravni $\alpha$. Zbog toga vektor $\vec{r} - \vec{r}_0$ možemo predstaviti kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, drugim riječima postoje realni brojevi $u$ i $v$ (zvaćemo ih parametri) takvi da je

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = u\vec{a} + v\vec{b},$$

ili

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}. \tag{7.9}$$

Mijenjajući koordinate tačke $M$ ($M$ ostaju u ravni $\alpha$) mijenjaju se i vrijednosti parametara $u$ i $v$, zato jednačinu (7.9) zovemo vektorska parametarska jednačina ravni.




Slika 7.5: Tri tačke u ravni

Prelaskom na koordinate dobijamo

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y &= y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z &= z_0 + ua_3 + vb_3, \end{aligned} \tag{7.10}$$

gdje su $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Jednačine (7.10) predstavljaju parametarske jednačine ravni.

Ako iskoristimo uslov komplanarnosti vektora $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$, tj. $\left(\overrightarrow{M_0M} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right) \cdot \overrightarrow{M_0M_2} = 0$, dobijamo jednačinu ravni kroz tri tačke

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.11}$$

**Primjer 7.1.**

Napisati sve oblike jednačine ravni koja je određena tačakama $M_0(1, 1, 0)$, $M_1(-2, 0, 4)$, $M_2(2, 3, -1)$.

Rješenje:

Vidi Sliku 7.6, odredimo prvo vektore $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= (1,1,0)\\ \vec{r} &= (x,y,z)\\ \overrightarrow{M_0M_1} &= (-3,-1,4)\\ \overrightarrow{M_0M_2} &= (1,2-1),\end{aligned}$$

sada vektor normale $\vec{n}_\alpha$

$$\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{M_0M_2} \times \overrightarrow{M_0M_1} = \begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & -1\\ -3 & -1 & 4\end{vmatrix} = (7,-1,5).$$

- Za oblik jednačine ravni $\vec{n}_\alpha \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

$$(7\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) \cdot (\vec{r} - \vec{i} - \vec{j}) = 0,$$

- za $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{r} = a$ je

$$(- - 7\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) \cdot \vec{r} = -6,$$

- za $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ je

$$7(x-1) - (y-1) + 5(z-0) = 0,$$

- za $Ax + By + Cz = 0$ je

$$7x - y + 5z - 6 = 0,$$

- za $\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$ je

$$\frac{x}{\frac{6}{7}} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{\frac{6}{5}} = 1,$$

- za $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, vrijedi

$$\begin{aligned} p &= \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{r}_0}{\vec{n}_\alpha} = \frac{(7,-1,5)(1,1,0)}{\sqrt{49+1+25}} = \frac{6}{\sqrt{75}}\\ \cos\alpha &= \frac{A}{|\vec{n}_\alpha|} = \frac{7}{\sqrt{75}}\\ \cos\beta &= \frac{B}{|\vec{n}_\alpha|} = \frac{-1}{\sqrt{75}}\\ \cos\gamma &= \frac{C}{|\vec{n}_\alpha|} = \frac{5}{\sqrt{75}},\end{aligned}$$

  pa je jednačina ravni u ovom slučaju

$$x\frac{7}{\sqrt{75}} + y\frac{-1}{\sqrt{75}} + z\frac{5}{\sqrt{75}} - \frac{6}{\sqrt{75}} = 0$$

- za $\vec{r} = \vec{r}_0 + u\overrightarrow{M_0M_2} + v\overrightarrow{M_0M_1}$ je

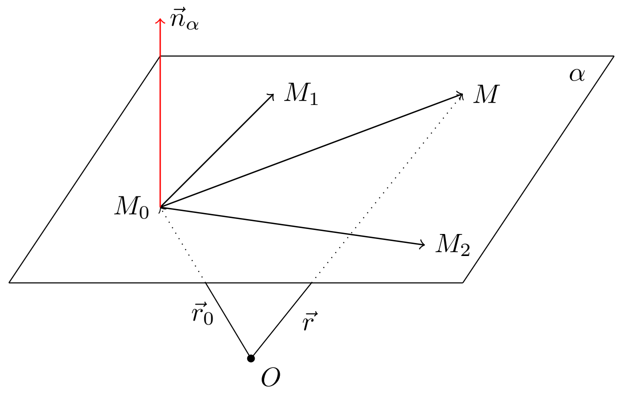
$$\vec{r} = \vec{i} + \vec{j} + u(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) + v(-3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}),$$

- parametarski oblik

$$\begin{aligned} x &= 1 + u - 3v\\ y &= 1 + 2u - v\\ z &= -u + 4v,\end{aligned}$$

- jednačina ravni kroz tri tačke

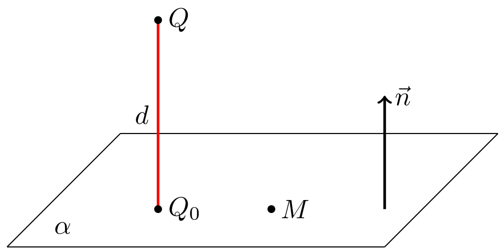
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ -2-1 & 0-1 & 4-0 \\ 2-1 & 3-1 & -1-0 \end{vmatrix} = 0.$$




Slika 7.6: Ravan $\alpha$

### 7.1.2 Rastojanje tačke od ravni

Neka je data ravan $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ i neka tačka $M(x_2, y_2, z_2)$ pripada ravni $M \in \alpha$, tada vrijedi $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$, tj. koordinate tačke $M$ zadovoljavaju jednačinu ravni $\alpha$. Zanima nas kako da izračunamo rastojanje neke tačke, koja ne pripada ravni, od ravni. Posmatrajmo Sliku 7.7. Tačka $Q(x_1, y_1, z_1)$ ne pripada ravni. Kako da izračunamo rastojanje $d$ tačke $Q$ od ravni $\alpha$. Spustimo normalu iz tačke $Q$ na ravan,




Slika 7.7: Rastojanje tačke od ravni

dobijamo tačku $Q_0(x_0, y_0, z_0)$. Pošto tačka $Q_0$ pripada ravni $\alpha$ njene koordinate zadovoljavaju jednačinu ravni

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

ali $Q \notin \alpha$, pa je $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0$. Vrijedi $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ i za vektor čija je početna tačka $Q_0$ a krajnja $Q$, $\overrightarrow{Q_0Q} = (x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j} + (z_1 - z_0)\vec{k}$. Sada je

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D - (\underbrace{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}_{=0}) \\ &= A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{Q_0Q} = |\vec{n}| \left|\overrightarrow{Q_0Q}\right| \cos\measuredangle(\vec{n}, \overrightarrow{Q_0Q}), \end{aligned}$$

a kako su vektori $\vec{n}$ i $\overrightarrow{Q_0Q}$ kolinearni, to može biti $\cos\measuredangle(\vec{n}, \overrightarrow{Q_0Q}) = \pm 1$, i $\left|\overrightarrow{Q_0Q}\right| = d$ pa je

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = \pm|\vec{n}|d,$$

i zbog

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

dobijamo

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \tag{7.12}$$

Jednakost (7.12) predstavlja obrazac za računanje rastojanja tačke od ravni.

PRIMJER 7.2.

Izračunati visinu piramide $h_s$ čiji su vrhovi $S(0,6,4)$, $A(3,5,3)$, $B(-2,11,-5)$, $C(1,-1,4)$.

Rješenje:

Visinu možemo izračunati kao rastojanje tačke $s$ od ravni koja je određena tačkama $A, B, C$. Odredimo prvo jednačinu ravni kroz ove tri posljednje tačke. Vrijedi

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-3 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pa je $2x - y - 2z + 5 = 0$, dakle $A = 2$, $B = -1$, $C = -2$, $D = 5$. Rastojanje je

$$d = \left|\frac{Ax_s + By_s + Cz_s + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| = \left|\frac{0 - 6 - 8 + 5}{\sqrt{4 + 1 + 4}}\right| = 3.$$

### 7.1.3 Ugao između dvije ravni

Neka su date dvije ravni

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Ako se ravni $\alpha$ i $\beta$ sijeku tada se ugao $\phi$ između ove dvije ravni definiše kao ugao između njihovih vektora normala $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$. Kako je

$$\vec{n}_\alpha = (A_1, B_1, C_1),$$
$$\vec{n}_\beta = (A_2, B_2, C_2),$$

pa je $\cos\phi = \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}$, odnosno

$$\boxed{\cos\phi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}} \tag{7.13}$$

U slučaju da su ravni paralelne $\alpha \parallel \beta$, vektori normala $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$ su kolinearni, što je ekvivalentno uslovu

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}} \tag{7.14}$$

Ako su ravni $\alpha$ i $\beta$ okomite, tj. $\alpha \perp \beta$, to je ekvivalentno uslovu

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0} \tag{7.15}$$

PRIMJER 7.3.

Izračunati ugao između ravni $\alpha : x + 3y - 4z + 5 = 0$ i $\beta : 2x + 2y + 2z - 7 = 0$.

Rješenje:

Vektori normala su $\vec{n}_\alpha = (1,3,-4)$ i $\vec{n}_\beta = (2,2,2)$. Označimo ugao između ovih ravni $\phi = \measuredangle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)$. Vrijedi

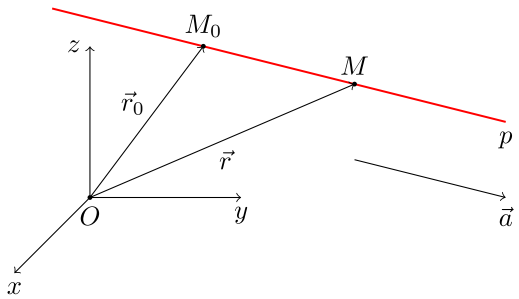
$$\cos\phi = \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|} = \frac{(1,3,-4)\cdot(2,2,2)}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-4)^2}\sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{2+6-8}{\sqrt{18}\sqrt{12}} = 0,$$

pa je $\phi = \frac{\pi}{2}$.

## 7.2 Prava

Neka kroz datu tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$ paralelno sa vektorom $\vec{a} = (l, m, n)$ prolazi prava $p$, Slika 7.6. Ova prava je jedinstvena. Sa slike vidimo da je $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ te da je $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$, a kako se radi o slobodnim vektorima to




Slika 7.8: Prava

su $\vec{r} - \vec{r}_0$ i $\vec{a}$ linearno zavisni, te možemo $\vec{r} - \vec{r}_0$ izraziti preko $\vec{a}$ i obrnuto, tj.

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}$$

odsnosno

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a},\ t \in \mathbb{R}} \tag{7.16}$$

Jednačina (7.16) je parametarska vektorska jednačina prave. Vektor $\vec{a}$ zove se vektor pravca prave $p$.

Kako je $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{a}$ to je $\vec{a} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$, a ako označimo $\vec{b} = \vec{a} \times \vec{r}_0$, dobijamo jednakost

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{r} = \vec{b}} \tag{7.17}$$

koja predstavlja opštu vektorsku jednačinu prave. U posljednoj jednačini prave (7.17) vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su dati, dok je $\vec{r}$ vektor položaja proizvoljne tačke prave, ovom slučaju $p$.

Neka su $x, y, z$ koordinate tačke $M \in p$, a $x_0, y_0, z_0$ su koordinate tačke $M_0$ iz jednakosti (7.16) dobijamo

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \\ z &= z_0 + nt,\ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}} \tag{7.18}$$

Jednakošću (7.18) date su parametarske jednačine prave u skalarnom obliku. Sada iz jednačina datih u (7.18) izrazimo parametar $t$

$$x = x_0 + lt \Leftrightarrow t = \frac{x - x_0}{l}$$
$$y = y_0 + mt \Leftrightarrow t = \frac{y - y_0}{m}$$
$$z = z_0 + nt \Leftrightarrow t = \frac{z - z_0}{n}$$

pa dobijamo

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}} \tag{7.19}$$

Posljednje jednakosti predstavljaju kanonske jednačine prave.

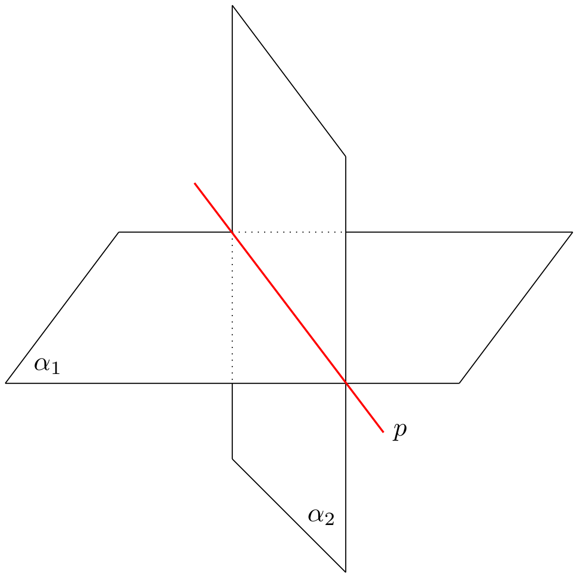
Pravu možemo predstaviti i kao dvije ravni koje se sijeku. Neka su date ravni

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

koje se sijeku, tada

$$p : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{7.20}$$

predstavlja jednačinu prave Slika 7.9.




Slika 7.9: Prava $p$ u presjeku dvije ravni $\alpha_1$ i $\alpha_2$

Primjer 7.4.

Pravu $p : \begin{cases} 2x - y - z - 4 = 0 \\ 2x - 3y - 2z + 7 = 0 \end{cases}$ napisati u
$(a)$ kanonskom; $(b)$ parametarskom obliku.
Rješenje:

Jednačina prave u kanonskom obliku je

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Potrebno je da odredimo vektor pravca $\vec{a} = (l, m, n)$ i tačku $M(x_0, y_0.z_0)$ koja pripada pravoj. Odredimo prvo vektor pravca $\vec{a}$ prave kao $\vec{a} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$, gdje su $\alpha : 2x - y - z - 4 = 0$ $\beta : 2x - 3y - 2z + 7 = 0$. Pošto je $\vec{n}_\alpha = (2, -1, -1)$ $\vec{n}_\beta = (2, -3, -2)$, vrijedi

$$\vec{a} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Tačku $M$ dobićemo rješavajući sistem $\begin{cases} 2x - y - z - 4 = 0 \\ 2x - 3y - 2z + 7 = 0. \end{cases}$ Sistem je neodređen i ima beskonačno mnogo rješenja. Svako rješenje ovog sistema predstavlja jednu tačku prave $p$. Uvrstimo na primjer $x = 0$ i riješimo sistem, dobijamo $y = 15$, $z = -19$. Pa je tražena jednačina prave u kanonskom obliku

$$p : \frac{x - 0}{-1} = \frac{y - 15}{2} = \frac{z + 19}{-4}.$$

Iz posljednje jednakosti je $\frac{x-0}{-1} = \frac{y-15}{2} = \frac{z+19}{-4} = t$ pa je sada dobijamo parametarske jednačina prave

$$\frac{x-0}{-1} = t \Leftrightarrow x = -t$$
$$\frac{y-15}{2} = t \Leftrightarrow y = 2t + 15$$
$$\frac{z+19}{-4} = t \Leftrightarrow z = -4t - 19.$$

### 7.2.1 Uzajamni odnos dvije prave

Neka su date dvije prave $p_1$ i $p_2$ u kanonskim oblicima

$$p_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$
$$p_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

gdje su $\vec{a}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ i $\vec{a}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ vektori pravca pravih $p_1$ i $p_2$, respektivno i znamo da je $M_1(x_1, y_1, z_1) \in p_1$ i $M_2(x_2, y_2, z_2) \in p_2$.

**Ugao između dvije prave**

Pod uglom $\phi$ između dvije prave smatramo ugao između njihovih vektora pravaca, u našem slučaju $\phi = \measuredangle(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, pa

$$\cos\phi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_2^2 + n_2^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \tag{7.21}$$

U slučaju $\phi = \frac{\pi}{2}$, vrijedi $p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$, pa je

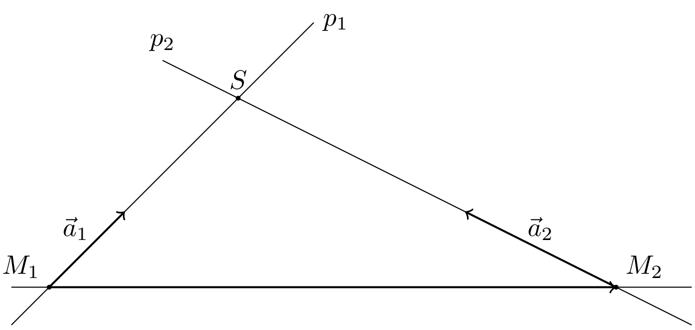
$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \tag{7.22}$$

Za $\phi = 0$ sada je $p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$, pa je

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \tag{7.23}$$

**Uslov komplanarnosti i uslov da se dvije prave sijeku**

Posmatrajmo Sliku 7.10. Ako su vektori $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ i $\overrightarrow{M_1M_2}$ komplanarni,




Slika 7.10: Prave $p_1$ i $p_2$

tada je

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_2 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{7.24}$$

vrijedi i obrnuto. Sada mogu nastupiti dva slučaja, da se prave sijeku ili da su paralelne, tj.

1. Ako je ispunjen uslov (7.24) i ako su elementi druge vrste proporcionalni elementima treće vrste, tada su prava paralelne $p_1 \parallel p_2$.
2. Ako je ispunjen uslov (7.24), ali ako elementi druge vrste nisu proporcionalni elementima treće vrste tada se prave sijeku.

**Rastojanje između dvije mimoilazne prave**

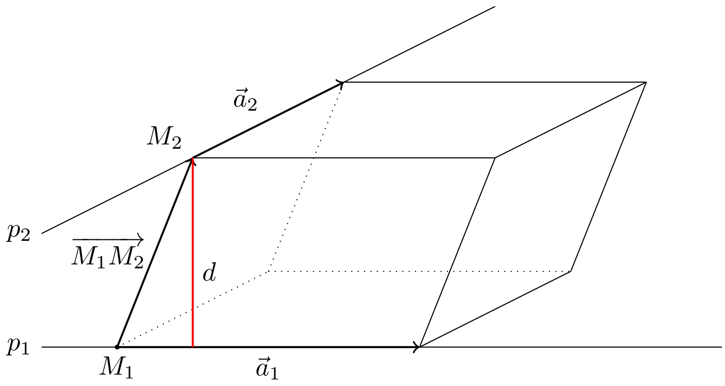
Mimoilazne prave su prave koje nisu paralelne i nemaju zajedničkih tačaka.

Zapreminu paralelopipeda možemo izračunati na sljedeći način

$$V = \left| (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \right|$$

kao i

$$V = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|\, d,$$




Slika 7.11: Mimoilazne prave

pa je sada

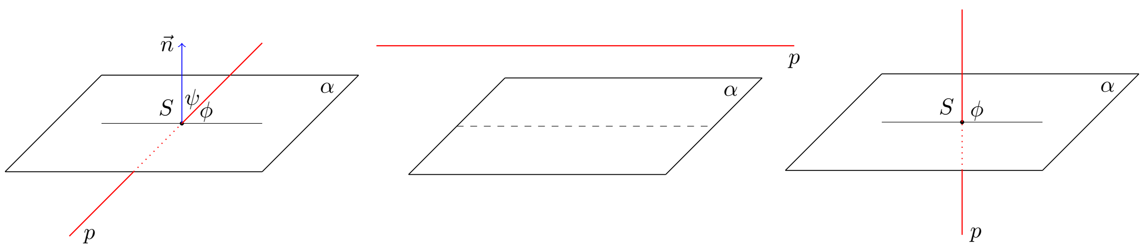
$$d = \frac{\left| (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \right|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \tag{7.25}$$

### 7.2.2 Uzajamni odnos prave i ravni

Neka su dati ravan $\alpha$ i prava $p$ sa

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$
$$p : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

gdje je $\vec{n} = (A, B, C)$ vektor normale ravni $\alpha$, $\vec{a} = (l, m, n)$ vektor pravca prave $p$ i tačka $M_0(x_0, y_0.z_0) \in p$.




(a) Prodor prave (b) Prava i ravan su paralelne (c) Prava i ravan su okomite $\phi = \frac{\pi}{2}$

Slika 7.12: Odnos prave i ravni

Ugao $\phi$ (u našem slučaju Slika 7.12a), prave $p$ prema ravni $\alpha$, računamo kao

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \psi.$$

Kako je $\cos\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi$, to vrijedi

$$\boxed{\sin\phi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}} \tag{7.26}$$

Ako su prava i ravan paralelne Slika 7.12b, vrijedi

$$p \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \boxed{Al + Bm + Cn = 0}$$

Ako su prava i ravan normalne Slika 7.12c, vrijedi

$$p \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \boxed{\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}}$$

Da bi prava $p \subset \alpha$ potrebno je i dovoljno da vrijedi $M_0 \in \alpha \wedge p \parallel \alpha$, tj.

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D &= 0 \\ Al + Bm + Cn &= 0. \end{aligned}$$

Tačku prodora $S$ prave $p$ kroz ravan $\alpha$, Slika 7.12a, najlakše je odrediti tako što pravu izrazimo preko parametarskih jednačina (7.18). Zatim promjenljive $x, y, z$ u jednačini ravni izrazimo preko jednačina (7.18). Dobijamo

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + t(Al + Bm + Cn) = 0,$$

odakle se računa $t$.

## Zadaci za vježbu

1. Izračunati ugao izmedju ravni $\alpha : -x + 3y - z - 4 = 0$ i $\beta : -3x + 6z - 6 = 0$.
2. Odrediti jednačinu ravni $\alpha$, koja prolazi kroz tačke $A(2, -1, 0)$ i $B(3, , 2 - 5)$, a normalna je na ravan $\beta : 2x - y + 3z - 7 = 0$.
3. Izračunati visinu piramide $h_S$, čiji su vrhovi u tačkama $S(1, -2, 3)$, $A(2, -4, 2)$, $B(2, 3, 4)$, $C(1, 2, 3)$.
4. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M(-2, 3, -1)$ i
   (a) na koordinatnim osama odsijeca jednake odsječke;
   (b) prolazi kroz $y-$osu;
   (c) prolazi kroz koordinatni početak i tačku $A(2, 1 - 5)$.
5. Izračunati jednačinu ravni u obliku $\vec{r} \cdot \vec{n} = \alpha$, koja je paralelna sa ravni $\vec{r} \cdot (3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -5$ i prolazi kroz tačku $M(0, 1, 2)$.
6. Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačke $M(2, 1, -1)$, $N(-1, 0, 1)$ a okomita je na ravan $2x - y + 4z - 1 = 0$.
7. Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačke $M(-1, 1, 2)$, $N(0, 2, 1)$ a okomita je na ravan $x - 3y + 4z - 7 = 0$.
8. Pravu $l : \begin{cases} -2x - y + 3z - 4 = 0 \\ x + 2y - z = 1, \end{cases}$ napisati u
   (a) kanonskom obliku;
   (b) parametarskom obliku.
9. Odrediti rastojanje tačke $A(2, 1, 0)$ od prave $l : \begin{cases} -x - y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - z = 1. \end{cases}$
10. Odrediti jednačinu ravni $\alpha$ koja sadrži pravu $p : \dfrac{2 - x}{3} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{-2z}{3}$ i normalna je ravan $\alpha : 3x - 4y + 2z - 1 = 0$.
11. Izračunati jednačinu ravni kojoj pripada prava $p : \dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y + 2}{1} = \dfrac{z}{2}$, a paralelna je pravoj $q : \dfrac{x - 2}{-1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z + 3}{1}$.

12. Napisati jednačinu ravni koja sadrži prave $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ i $q : \frac{x+1}{-4} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2}$.

13. Napisati jednačinu normale povučenu iz tačke $M(1,1,2)$ na pravu $p : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$.

14. Napisati jednačinu ravni koja sadrži pravu $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ i prolazi kroz tačku $M(2,1-,0)$.

15. Izračunati jednačinu ravni koja sadrži taču $M(1,0,1)$ i pravu $\begin{cases} 2x+3y-z-5=0 \\ x-3y+2z+2=0. \end{cases}$

16. Data je jednačina prave date u vektroskom obliku $\vec{r} \times (2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Odrediti odgovarajući kanonski i parametarski oblik jednačine prave.

17. Odrediti najkraće rastojanje izmedju pravih $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{-1}$ i $q : \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-3}$.

18. Odrediti jednačinu normale povučene iz tačke $P(1,3,2)$ na pravu $l : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

19. Odrediti jednačinu ortogonalne projekcije prave $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{3}$ na ravan $x+2y+z-3=0$.

# Poglavlje 8

# Nizovi

Neka su $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva i $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva.

PRIMJER 8.1.

$$\begin{aligned}
&1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\dots\\
&1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\\
&2,\ 4,\ 6,\ 8,\dots\\
&1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \dots\\
&1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{4}},\dots\\
&a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \dots
\end{aligned} \tag{8.1}$$

DEFINICIJA 8.1 (Niz).

Svako preslikavanje $a : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ zove se realni niz.

Elementi skupa vrijednosti niza su $a(1),\ a(2),\ a(3),\dots,a(n),\dots$ koje kraće označavamo sa $a_1,\ a_2,\dots,a_n,\dots$ i zovemo ih članovi niza. Za prvi red (8.1) iz Primjera 8.1 vrijedi $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3},\dots$ Član niza $a_n$ je $n$–ti član niza ili opšti član niza. Niz je određen ako mu je poznat opšti član. Broj $n$ je indeks opšteg člana. Niz se obilježava sa $(a_n)$, $n = 1,2\dots$ ili $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ili $(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$ ili jednostavno kratko sa $(a_n)$. Skup $\mathbb{N}$ je domen ili skup indeksa niza $(a_n)$, dok se skup $a(\mathbb{N})$ zove skup vrijednosti ili kodomen niza $(a_n)$.

PRIMJER 8.2.

Ako je poznat opšti član niza $a_n$ odrediti nekoliko prvih članova niza.
$(a)$ $a_n = \frac{1}{n+1}$, $(b)$ $a_n = \frac{1}{2^n}$, $(c)$ $a_n = n^2$.

Rješenje:

$(a)$ $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\dots$

$(b)$ $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3}\ \dots$

$(c)$ $1,\ 4,\ 9,\dots$

**Grafički prikaz niza** Niz $(a_n)$ na brojnoj pravoj predstavljamo tako što članovima niza pridružujemo odgovarajuće tačke brojne prave.

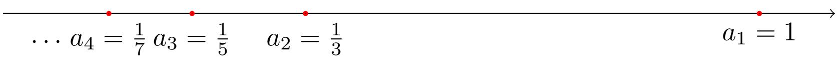
**Primjer 8.3.**

Predstaviti na brojnoj osi nizove
$(a)$ $a_n = \frac{1}{2n-1}$, $(b)$ $a_n = \frac{n-1}{n}$.

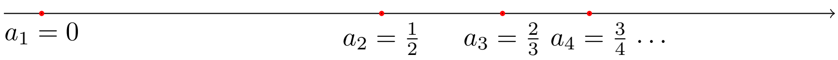
Rješenje:

$(a)$ $(a_n) = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$ (vidjeti Sliku 8.1);

$(b)$ $(a_n) = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ (vidjrei Sliku 8.2).




Slika 8.1: Tačke niza čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{2n-1}$



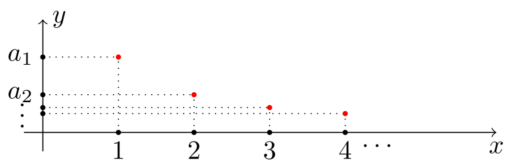

Slika 8.2: Tačke niza čiji je opšti član $a_n = \frac{n-1}{n}$

Članove niza možemo predstavljati i u pravouglom koordinatnom sistemu.

**Primjer 8.4.**

Predstaviti u pravouglom koordinatnom sistemu članove niza čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$.

Rješenje: Vidjeti Sliku 8.3.




Slika 8.3: Članovi niza u koordinatnom pravouglom sistemu čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$, predstavljeni su crvenim tačkama

**Definicija 8.2** (Aritmetički niz).

Niz $(a_n)$ kod kojeg za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_{n+1} - a_n = d$, $d \in \mathbb{R}$, naziva se aritmetički niz.

Broj $d$ je razlika ili diferencija niza. Opšti član ovog niz je

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d,}$$

dok se suma $S_n$ prvih $n$ članova aritmetičkog niza računa

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

ili

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d].}$$

Iz definicije aritmetičkog niza vrijedi $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ pa je

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.}$$

Dakle svaki član aritmetičkog niza (osim prvog člana) je aritmetička sredina prethodnog i sljedećeg člana, otuda i ime aritmetičkog niza.

**Definicija 8.3** (Geometrijski niz).

Niz $(a_n)$ za koji važi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q,\ q \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

naziva se geometrijski niz.

Broj $q$ je količnik niza. Opšti član je

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1},}$$

dok sumu $S_n$ prvih $n$ članova računamo po formuli

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},\ q \neq 1.}$$

Iz same definicije geometrijskog niza je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, pa je

$$\boxed{a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}},}$$

tj. svaki član, osim prvog, geometrijskog niza je geometrijska sredina prethodnog i sljedećeg člana, odakle je geometrijski niz dobio ime.

## Granična vrijednost niza

**Definicija 8.4** ($\varepsilon$–okolina tačke).

Interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ nazivamo $\varepsilon$–okolina tačke $x_0$. Broj $\varepsilon$ je poluprečnik okoline.

Okolina tačke $+\infty$ je interval $(M, +\infty)$, gdje je $M$ realan broj, dok je okolina tačke $-\infty$ interval $(-\infty, M)$, $m$ je realan broj.

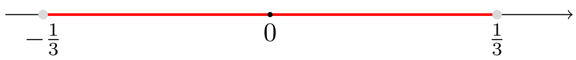
Dakle $\varepsilon$–okolina tačke $x_0$ je skup realnih brojeva za koje vrijedi $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, odnosno $|x - x_0| < \varepsilon$.

**Primjer 8.5.**

Odrediti $\varepsilon$–okolinu tačke $x_0 = 0$, ako je $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

Rješenje:

Tražena $\varepsilon$–okolina je interval $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, odnosno skup tačaka koje imaju osobinu $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$, tj. $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}\}$, vidjeti Sliku 8.4




Slika 8.4: $\varepsilon$–okolina tačke $x_0 = 0$, za poluprečnik konvergencije $\frac{1}{3}$

Definicija 8.5 (Tačka nagomilavanja niza).

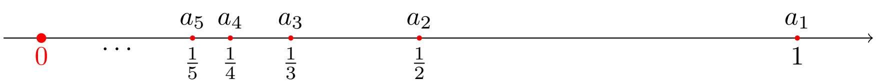
Tačka $x_0$ je tačka nagomilavanja niza $(a_n)$ ako se u svakoj njenoj $\varepsilon$–okolini nalazi beskonačno mnogo članova niza $(a_n)$.

Primjer 8.6.

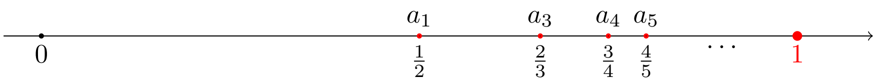
Odrediti tačke nagomilavanja za nizove sa opštim članovima
$(a)\ a_n = \frac{1}{n}$, $(b)\ a_n = \frac{n}{n+1}$, $(c)\ a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$.

Rješenje:

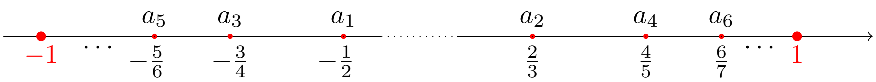
1. Članovima niza su $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, (vidjeti Sliku 8.5);
2. Članovima niza su $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$, (vidjeti Sliku 8.6);
3. Članovima niza su $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$, (vidjeti Sliku 8.7).




Slika 8.5: Članovi niza čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$, dakle tačka nagomilavanja je 0.




Slika 8.6: Članovi niza čiji je opšti član $a_n = \frac{n}{n+1}$, dakle tačka nagomilavanja je 1.




Slika 8.7: Članovi niza čiji je opšti član $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$, pa ovaj niz ima dvije tačke nagomilavanja i to $-1$ i 1.

Napomena 8.1.

Izraz ”gotovo svi članovi niza” znači svi članovi niza osim njih konačno mnogo.

Definicija 8.6 (Granična vrijednost niza).

Ako postoji tačka $x_0$ takva da se u svakoj njenoj $\varepsilon$–okolini nalaze skoro svi članovi niza $(a_n)$, kažemo da je niz konvergentan i da je $x_0$ njegova granična vrijednost (ili limes).

Definiciji 8.6 ekvivalentna je sljedeća definicija.

Definicija 8.7.

Niz $(a_n)$ je konvergentan i $x_0$ mu je granična vrijednost, ako za svako $\varepsilon$ postoji prirodan broj $n_0$ (određen u zavisnosti od $\varepsilon$) takav da je

$$|a_n - x_0| < \varepsilon,$$

za svako $n > n_0$.

Ovo se piše $a_n \to x_0$, $n \to \infty$ ili $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ ili $\lim a_n = x_0$ i kaže da niz $(a_n)$ konvergira ka $x_0$ ili da $a_n$ teži ka $x_0$.

Konvergenta niz ima samo jednu tačku nagomilavanja, ova tvrdnja iskazana je u sljedećoj teoremi.

Teorema 8.1.

*Ako niz $(a_n)$ ima graničnu vrijednost ona je jedinstvena.*

Drugim riječima ako $a_n \to a$ i $a_n \to b$, tada je $a = b$.

Definicija 8.8.

Za niz koji nije konvergentan kaže se da je divergentan.

Definicija 8.9 (Ograničeni niz).

Niz $(a_n)$ je ograničen sa gornje strane ako postoji realan broj $M$ takav da je $a_n \leqslant M$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Broj $M$ zove se gornja granica niza $(a_n)$. Niz $(a_n)$ je ograničen sa donje strane ako postoji realan broj $m$ takav da je $m \leqslant a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Broj $m$ zove se donja granica niza $(a_n)$. Niz $(a_n)$ je ograničen ako je ograničen i sa gornje i sa donje strane.

Primjer 8.7.

$(a)$ Neka je dat niz čiji je opšti član $a_n = n$. Skup vrijednosti ovog niza je $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Vidimo da je $1 \leqslant a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, pa možemo donju granicu izabrati $m = 1$, tj. niz je ograničen odozdo.

$(b)$ Neka je $a_n = 5 - n$ opšti član niza $(a_n)$. Skup vrijednosti je $\{4, 3, 2, 1, 0, -1, \ldots\}$. Vrijedi $a_n \leqslant 4$, pa izaberimo gornju granicu $M = 4$. Dakle niz je ograničen odozgo.

$(c)$ Neka je sada $a_n = \frac{1}{n}$. Skup vrijednosti niza je $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. Vrijedi $0 < a_n \leqslant 1$, pa možemo izabrati $m = 0$ i $M = 1$, dakle niz je ograničen i odozdo i odozgo, tj. ograničen je.

Definicija 8.10 (Monoton niz).

Niz $(a_n)$ je

$(a)$ rastući ako je $a_{n+1} \geqslant a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$;

$(b)$ strogo rastući ako je $a_{n+1} > a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$;

$(c)$ opadajući ako je $a_{n+1} \leqslant a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$;

$(d)$ strogo opadajući ako je $a_{n+1} < a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Napomena 8.2.

Nizove definisane pod (a), (b), (c) i (d) skraćeno zovemo monotoni nizovi.

Teorema 8.2 (Računanje limesa).

*Neka su $(a_n)$ i $(b_n)$ konvergentni nizovi i neka je $\lim a_n = a$ i $\lim b_n = b$, tada vrijedi*

(1) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n = a \pm b$;

(2) $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = a \cdot b$;

(3) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$;

(4) $c \cdot \lim a_n = c \cdot \lim a_n = c \cdot a$;

(5) $\lim (a_n)^k = (\lim a_n)^k = a^k$.

U Primjeru 8.6 vidjeli smo da niz čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$ ima jednu tačku nagomilavanja i to $x_0 = 0$, tj. da se u svakoj $\varepsilon$–okolini tačke $x_0 = 0$ nalaze skoro svi članovi niza, pa sada na osnovu Definicije 8.6 vrijedi sljedeći limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{8.2}$$

PRIMJER 8.8.

Izračunati limese

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n},\ (b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2},\ (c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1},\ (d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{6n-4},$$
$$(e)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3-2n-4n^2}{3n^2-2n+5},\ (f)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-n+1}{4n^2+2n+3},\ (g)\ \lim_{n\to\infty}\frac{-n^4+n^3+n+4}{n^2+3n+10},$$
$$(h)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+10}{-n^4+n^3+n+4},\ (i)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}}{n-4},\ (j)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n-4}{\sqrt[3]{n^3+n^2+3}},$$
$$(k)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right),\ (l)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-n\right),\ (m)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right),$$
$$(n)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2},\ (o)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+4+4^2\ldots+4^{n-1}}{1+6+6^2+\ldots+6^{n-1}};\ (p)\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right].$$

Rješenje:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 2\cdot 0 = 0;$$

$$(b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\cdot 0 = 0;$$

$$(c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} : \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1;$$

$$(d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{6n-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{6n-4} : \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{6-\frac{4}{n}} = \frac{2}{3};$$

$$(e)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3-2n-4n^2}{3n^2-2n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-2n-4n^2}{3n^2-2n+5} : \frac{n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n}-4}{3-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}} = -\frac{4}{3};$$

$$(f)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-n+1}{4n^2+2n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-n+1}{4n^2+2n+3} : \frac{n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}} = +\infty;$$

$$(g)\ \lim_{n\to\infty}\frac{-n^4+n^3+n+4}{n^2+3n+10} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n^4+n^3+n+4}{n^2+3n+10} : \frac{n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+n+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{10}{n^2}} = -\infty;$$

$$(h)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+10}{-n^4+n^3+n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+10}{-n^4+n^3+n+4} : \frac{n^4}{n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}+\frac{10}{n^4}}{-1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{4}{n^4}} = 0;$$

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}}{n-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}}{n-4} : \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n^2+3}}{n}}{1-\frac{4}{n}} == \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n^2+3}{n^2}}}{1-\frac{4}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}}{1-\frac{4}{n}} = 1;$$

$(j)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-4}{\sqrt[3]{n^3+n^2+3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-4}{\sqrt[3]{n^3+n^2+3}}:\dfrac{n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{4}{n}}{\frac{\sqrt[3]{n^3+n^2+3}}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{4}{n}}{\sqrt[3]{\frac{n^3+n^2+3}{n^3}}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{4}{n}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}}}=1;$

$(k)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0;$

$(l)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-n\right)\cdot\dfrac{\sqrt{n^2+2n+2}+n}{\sqrt{n^2+2n+2}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+2n+2}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+2n+2}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+2}{\sqrt{n^2+2n+2}+n}:\dfrac{n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+2n+2}+n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+1}=1;$

$(m)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\cdot\dfrac{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2+\sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n}+\left(\sqrt[3]{n}\right)^2}{(\sqrt[3]{n+1})^2+\sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n}\right)^3}{(\sqrt[3]{n+1})^2+\sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(\sqrt[3]{n+1})^2+\sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2}=0;$

$(n)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$

U brojniku je suma prvih $n$ članova aritmetičkog niza, vrijedi $a_1=1$, $a_n=n$, $d=1$. Sumu prvih $n$ članova aritmetičkog niza računamo po formuli $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$, pa je $1+2+\ldots+n=\frac{n}{2}(1+n)$, sada je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{2n^2}:\dfrac{n^2}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{2}=\dfrac{1}{2};$

$(o)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+4^2\ldots+4^{n-1}}{1+6+6^2+\ldots+6^{n-1}}$. I u brojniku i u nazivniku su sume prvih $n$ članova geometrijskog niza. Ove sume računamo po formuli $S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$. Za sumu u brojniku količnik je $q=4$, dok je za sumu u nazivniku količnik je $q=6$, prvi član za oba niza je $a_1=1$. Sada vrijedi

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+4^2\ldots+4^{n-1}}{1+6+6^2+\ldots+6^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot\frac{4^n-1}{4-1}}{1\cdot\frac{6^n-1}{6-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5(4^n-1)}{3(6^n-1)}:\dfrac{6^n}{6^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5(\frac{4^n}{6^n}-\frac{1}{6^n})}{3(1-\frac{1}{6^n})}=0;$

$(p)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$

Svi razlomci u $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ dobijeni su po istom obrascu, uvrštavajući $n=1$ u $\frac{1}{n(n+1)}$ dobijen je razlomak $\frac{1}{1\cdot2},\ldots$ Zbog toga šablon za razlaganje $\frac{1}{n(n+1)}$ na proste razlomke možemo iskoristiti za razlaganje svih razlomaka koji se pojavljuju u limesu.

Razložimo razlomak $\frac{1}{n(n+1)}$ na sljedeći način

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1},$$

gdje su $A$ i $B$ konstante koje trebamo odrediti. Dakle, vrijedi

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}=\frac{(A+B)n+A}{n(n+1)},$$

da bi polazni i posljednji razlomak bili isti, moraju biti isti izrazi u brojniku i nazivniku. Nazivnici su isti, a brojnici će biti isti ako su koeficijenti uz odgovarajuće stepene isti. Iz posljednjeg uslova dobijamo sistem

$$\begin{aligned}A+B&=0\\A&=1.\end{aligned}$$

Rješenje sistema je $A = 1$, $B = -1$, pa je

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Primjenjujući posljednje pravilo za razlaganje razlomaka dobijamo

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Pa je sada

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

**Broj** $e$
Vrijedi teorema.

TEOREMA 8.3.

*Niz* $(a_n)$ *čiji je opšti član* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *je konvergentan.*

Granična vrijednost ovog niza je broj $e$. Broj $e$ je baza prirodnog ili Neperovog logaritma. Broj $e$ je iracionalan broj i njegova vrijednost, data na nekoliko decimalnih mjesta, je $e = 2.7182818284\ldots$

Dakle, vrijedi

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e} \tag{8.3}$$

PRIMJER 8.9.

Izračunati limese

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n;\ (b)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n+5}\right)^n;\ (c)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)^n;$$
$$(d)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{3n-1};\ (e)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n;\ (f)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2+n+3}{6n^2+n+1}\right)^{n^2+n};$$
$$(g)\ \lim_{n\to\infty} n\left(\ln n - \ln(n+2)\right);\ (h)\ \lim_{n\to\infty}(3n+1)\left(\ln(n^2+2n+4) - \ln(n^2+n+2)\right).$$

Rješenje:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}\cdot\frac{5}{n}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{5}{n}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} e^5 = e^5;$$

$$(b)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n+5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n+5}\right)^{(4n+5)\cdot\frac{1}{4n+5}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{4n+5}\cdot n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4n+5}:\frac{n}{n}}$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4+\frac{5}{n}}} = e^{\frac{1}{4}};$$

$$(c)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{-n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n\cdot\frac{1}{3n}\cdot(-n)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{3n}\cdot(-n)} = e^{-\frac{1}{3}};$$

$$(d)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{3n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n\cdot\frac{1}{5n}\cdot(3n-1)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{5n}\cdot(3n-1)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n}:\frac{n}{n}}$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{5}} = e^{\frac{3}{5}};$$

$$(e)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2}{n-1}\cdot n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n-1}\,:\,\frac{n}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{n}}}=e^2;$$

$$(f)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2+n+3}{6n^2+n+1}\right)^{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2+n+1+2}{6n^2+n+1}\right)^{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{6n^2+n+1}\right)^{n^2+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{6n^2+n+1}{2}}\right)^{\frac{6n^2+n+1}{2}\cdot\frac{2}{6n^2+n+1}\cdot(n^2+n)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2}{6n^2+n+1}\cdot(n^2+n)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2n^2+2n}{6n^2+n+1}\,:\,\frac{n^2}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2+\frac{2}{n}}{6+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=e^{\frac{1}{3}};$$

$$(g)\ \lim_{n\to\infty}n\left(\ln n-\ln(n+2)\right)=\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)^{-n}=\ln\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{-n}$$

$$=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{-n}=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot(-n)}=\ln\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2}{n}\cdot(-n)}=\ln e^{-2}=-2;$$

$$(h)\ \lim_{n\to\infty}(3n+1)\left(\ln(n^2+2n+4)-\ln(n^2+n+2)\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n^2+2n+4}{n^2+n+2}\right)^{3n+1}=\ln\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+4}{n^2+n+2}\right)^{3n+1}$$

$$=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+2}{n^2+n+2}\right)^{3n+1}=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+n+2}{n+2}}\right)^{\frac{n^2+n+2}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n^2+n+2}\cdot(3n+1)}=\ln\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n+2}{n^2+n+2}\cdot(3n+1)}$$

$$=\ln\lim_{n\to\infty}e^{\frac{3n^2+7n+2}{n^2+n+2}}=\ln e^3=3.$$

## Zadaci za vježbu

1. Izračunati granične vrijednosti

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-3}{6n+5}$; (b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3-2n-4n^2}{3n^2-2n+5}$; (c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3+3n^2-n+1}{4n^2+2n-3}$; (d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-4n+11}{3n^4-n^2+n+2}$;

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3}}{n+4}$; (f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-2}{\sqrt[3]{n^3+n^2-5}}$; (g) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

(h) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n-3}-n\right)$; (i) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-4n+3}\right)$;

(j) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n+5}\right)$; (k) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{2n}\right)$;

(l) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2+n-12}{1+2+\ldots+(2n-1)+2n}$; (m) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+5+25+\ldots+5^{n-1}}{1+2+4+\ldots+2^{n-1}}$;

(n) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{100}+\ldots+\dfrac{1}{10^{n-1}}\right)$;

(o) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$;

(p) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^n$; (q) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{4n}\right)^{2n+2}$; (r) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+4}{n-2}\right)^n$;

(s) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n+6}{2n-5}\right)^{3n-5}$; (t) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3n-2}{3n+4}\right)^{2n+4}$;

(u) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{6n^2+n+3}{6n^2+n+1}\right)^{n^2+n}$; (v) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+3}{2n^2+n+2}\right)^{3n-1}$;

(w) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[\ln n-\ln(n+2)\right]$; (x) $\lim\limits_{n\to+\infty}2n\left[\ln(2n^2+3n+2)-\ln(2n^2+n+1)\right]$.

# Poglavlje 9

# Redovi

Neka je dat niz realnih brojeva

$$(a_n) \tag{9.1}$$

Koristeći niz (9.1) možemo induktivno definisati niz $(s_n)$ na sljedeći način

$$\begin{cases} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ \quad \vdots \\ s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ \quad \vdots \end{cases} \tag{9.2}$$

Poznavajući članove niza $(s_n)$ možemo izračunati članove niza $(a_n)$

$$\begin{cases} a_1 = s_1 \\ a_2 = s_2 - s_1 \\ \quad \vdots \\ a_n = s_n - s_{n-1} \\ \quad \vdots \end{cases} \tag{9.3}$$

Nizovi $(a_n)$ i $(s_n)$ su povezani, što se vidi iz sljedećeg primjera.

Primjer 9.1.

Posmatrajmo broj $\frac{1}{9}$. Podijelimo 1 sa 9, vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} &= 0.1 + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \text{ (prvo dijeljenje)} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\left(0.1 + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{9} \text{ (drugo dijeljenje)} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^3} \cdot \frac{1}{9} \text{ (treće dijeljenje)} \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{9} \text{ ($n$–to dijeljenje)}, \end{aligned}$$

pa je

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n}.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{9} = 0$, to je

$$\frac{1}{9} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{9}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n}\right),$$

pa je

$$\frac{1}{9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}. \tag{9.4}$$

Brojeve $a_1 = \frac{1}{10}$, $a_2 = \frac{1}{10^2}, \ldots, a_n = \frac{1}{10^n}, \ldots$ dobijamo dijeljenjem, prvim, drugim itd. Broj $\frac{1}{9}$ ima beskonačno mnogo decimalnih mjesta poslije decimalnog zareza različitih od nule tj.

$$\frac{1}{9} = 0.11111\ldots = 0.111\dot{1}$$

ili

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots$$

Brojevi

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 = \frac{1}{10} \\
s_2 &= a_1 + a_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n}
\end{aligned}$$

su prva, druga, treća aproksimacija, ..., $n$–ta aproksimacija, respektivno, broja $\frac{1}{9}$. Odgovarajuće greške aproksimacije su

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1}{9} - s_1 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \\
r_2 &= \frac{1}{9} - s_2 = \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{9} \\
r_3 &= \frac{1}{9} - s_3 = \frac{1}{10^3} \cdot \frac{1}{9} \\
&\vdots \\
r_n &= \frac{1}{9} - \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{9} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Precizirajmo sada šta je red i prateće pojmove.

Definicija 9.1 (Red).

Neka je dat niz realnih brojeva $(a_n)$, tada izraz oblika

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

ili kraće

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

zovemo brojni red. Broj $a_n$ naziva se opštim članom reda. Sumu prvih $n$ članova niza, tj.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

zovemo $n$–ta parcijalna suma i označavamo sa $s_n$, dok

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

prestavlja $n$–ti ostatak reda.

Primjer 9.2.

Nekoliko primjera redova

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + \ldots + n + \ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \quad (harmonijski\ red)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots \quad (geometrijski\ red)$$

## 9.1 Konvergencija reda

Vidjeli smo da je vrijednost reda iz Primjera 9.1 jednaka $\frac{1}{9}$. Međutim, vrijednost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + 2 + \ldots \tag{9.5}$$

reda nije jednaka ni jednom realnom broju.

Definicija 9.2 (Konvergencija reda).

Za red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{9.6}$$

realnih brojeva kažemo da je konvergentan ako je niz $(s_n)$ parcijalnih suma reda (9.6) konvergentan. Ako je red (9.6) konvergentan, onda se broj

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n \tag{9.7}$$

zove suma reda (9.6) i vrijedi

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$$

Red (9.6) je divergentan ako je niz $(s_n)$ divergentan.

Na osnovu prethodne definicije red iz Primjera 9.1 konvergentan, dok je red (9.5) divergentan.
Za proizvoljan red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

postavljaju se sljedeća pitanja: da li je konvergentan ili ne, u slučaju da je konvergentan kolika mu je suma? Za veoma veliki broj redova odgovoriti na oba pitanja je veoma teško ili nemoguće. Za neke redove je to moguće uraditi i zato postoje razni kriterijumi koji omogućavaju da se bar ustanovi da li neki red konvergira.

U najjednostavnijim slučajevima možemo ispitati direktno konvergenciju $n$–te parcijalne sume, te izračunati njenu vrijednost.

Primjer 9.3.

Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

Rješenje:

Iz prethodnog poglavlja znamo da je

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

i

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

pa je sada

$$s = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

te na kraju dobijamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Kako što je pomenuto samo u slučaju najjednostavnijih redova možemo ispitati konvergenciju i odrediti sumu kao u prethodnom primjeru. Prvi korak u ispitivanju ”složenijih” redova dat je u sljedećoj teoremi.

Teorema 9.1 (Potreban uslov konvergencije redova).

*Ako red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira, onda niz* $(a_n)$ *konvergira ka nuli.*

Drugim riječima vrijedi implikacija

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konvergira}\right) \Rightarrow (a_n \to 0).$$

Međutim obrnuta implikacija ne vrijedi, na primjer u slučaju harmonijskog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$. Opšti član $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ međutim $s_n \to \infty$.

I sljedeća je teorema korisna u ispitivanju konvergencije redova.

Teorema 9.2.

*Neka su*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\; i \;\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

*konvergentni redovi čije su sume* $A$, $B$, *respektivno. Tada su redovi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n),\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n),\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n,$$

*konvergentni redovi za svako* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i njihove sume su*

$$A + B,\ A - B,\ \lambda A,$$

*respektivno.*

Drugim riječima, za svako $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ red $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$ konvergira i vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

### 9.1.1 Dovoljni uslovi konvergencije pozitivnih redova

U nastavku biće dati dovoljni uslovi za konvergenciju pozitivnih redova, tj. redova za čije članove važi $a_n > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 9.3.

*[D'Alembertov kriterijum] Ako za pozitivni brojni red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *i realan broj* $q$ *tako da je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1,$$

*za svako* $n \geqslant n_0$*, tada je dati red konvegentan. Ako postoji* $n_1 \in \mathbb{N}$ *sa osobinom* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ *za* $n \geqslant n_1$*, onda je dati red divergentan. Štaviše, ako postoji* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$*, tada za* $l < 1$ *red konvergira, a za* $l > 1$ *divergira.*

Teorema 9.4.

*[Cauchyjev kriterijum] Ako za pozitivni red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *i* $q \in [0,1)$*, tako da je*

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q, \text{ za svako } n \geqslant n_0,$$

*onda red konvergira. Ako postoji* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tako da je*

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1 \text{ za svako } n \geqslant n_1,$$

*onda je dati red divergentan. Osim toga, ako postoji*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c,$$

*tada za* $c < 1$ *red konvergira, dok za* $c > 1$ *red divergira.*

Teorema 9.5.

*[Raabeov kriterijum] Neka je* $(a_n)$ *niz pozitivnih brojeva i* $r_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$*, gdje je* $a_n > 0$*,* $n \in \mathbb{N}$ *opšti član reda* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*. Tada vrijedi*

(a) *ako počev od nekog* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r > 1$*, tada red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira;*

(b) *ako je pak,* $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1$*, onda red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*

# Literatura i reference


[1] M. Crnjac, D. Jukić and R. Scitovski. *Matematika.* Ekonomski fakultet Osijek, R.Hrvatska, 1994.

[2] F. Dedagić. *Uvod u višu matematiku.* Univerzitet u Tuzli, Tuzla, BiH, 1997.

[3] D. Jukić and R. Scitovski. *Matematika 1.* Prehrambeno tehnološki fakultet i Elektrotehnički fakultet Osijek, R. Hrvatska, 1998.

[4] D. Jukić and R. Scitovski. *Matematika 1.* STUDIO HS Internet d.o.o., Osijek, R. Hrvatska, 2017. ISBN: 978-953-6032-18-1.

[5] D.S. Mitrinović, D. Mihailović and P.M. Vasić. *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija.* Beogradski izdavački zavod, Beograd, SFRJ, 1973.

[6] P.M. Ušćumlić M.P. i Miličić. *Elementi više matematike.* IP "Nauka", Beograd, Srbija, 2002.

# Indeks i pojmovi