Matematika 1

Nastavni materijal za predmet Matematika 1
Odsjek hemija
Prirodno–matematički fakultet Univerziteta u Tuzli,
Odsjeci: HIT, PT, IZO
Tehnloški fakultet Univerziteta u Tuzli

Autor
Samir Karasuljić

Email
samir.karasuljic@untz.ba
samir.karasuljic@gmail.com

Akademska 2019/20. godina

Sadržaj

Predgovor

Svrha pisanja ovog materijala je da olakša studenticama i studentima Odsjeka HIT na Tehnološkom fakultetu i studentima Odsjeka hemija Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli pripremu za polaganje ispita Matematika 1. Ovaj materijal ili predavanja napisana su na osnovu Ušćumlić i Miličić [6], Mitrinović, Mihailović i Vasić [5], Dedagić [2], Crnjac, Jukić i Scitovski [1], Jukić i Scitovski [3, 4]. Primjedbe, prijedlozi, uočene greške ☹, a i pohvale ☺ su dobrodošle i možete ih poslati na **samir.karasuljic@untz.ba** ili **samir.karasuljic@gmail.com**.

Poglavlje 1

Uvod

U ovom poglavlju biće navedeni matematički pojmovi koji su koriste u poglavljima koja slijede. Većina ovih pojmova su osnovnog karaktera i studentima trebaju biti poznati iz ranijih nivoa obrazovanja.

1.1 Skup realnih brojeva

Poznato je iz srednje škole da vrijedi lanac inkluzija $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, unija $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ i presjek $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$. Znamo da je sa $\mathbb{N}$ označen skup prirodnih brojeva, sa $\mathbb{Z}$ skup cijelih brojeva, sa $\mathbb{Q}$ skup racionalnih brojeva, sa $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva i $\mathbb{I}$ je oznaka za skup iracionalnih brojeva. Ponovimo u sljedećim paragrafima kako je došlo do formiranja navedih inkluzije skupova, unije i presjeka.

Prirodni brojevi i skup prirodnih brojeva. Istorijski prirodni brojevi su se najranije pojavili, korišteni su za brojanje. To su brojevi $1, 2, \ldots$, tj. $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Prirodne brojeve možemo sabirati i množiti i rezultat ovih operacija je ponovo prirodan broj, pa kažemo da je skup prirodnih brojeva zatvoren u odnosu na ove dvije operacije. Problem se već pojavljuje kada hoćemo da primijenimo operaciju oduzimanja u skupu prirodnih brojeva. Na primjer rezultat oduzimanja $1 - 2$ nije prirodan broj, tj. rezultat je broj koji ne postoji u skupu prirodnih brojeva. Dakle već za operaciju oduzimanja skup prirodnih brojeva je "mali" ili "preuzak", pa je bilo potrebno "proširiti ovaj skup".

Cijeli brojevi i skup cijelih brojeva. Proširivanjem skupa prirodnih brojeva dobijamo skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$. Skup cijelih brojeva čine prirodni brojevi $1, 2 \ldots$, nula 0 i negativni cijeli brojevi $\ldots, -2, -1$, pa vrijedi $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ i $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Pri formiranju skupa cijelih brojeva vođeno je računa da se osobine skupa prirodnih brojeva prenesu i na skup cijelih brojeva, preciznije skup cijelih brojeva je zatvoren u osnosu na operacije sabiranja i množenja, ali zatvoren je i u odnosu na operaciju oduzimanja. Međutim i skup cijelih brojeva nije dovoljno veliki da vršimo sve operacije koje bi htjeli, na primjer ne možemo uvijek dijeliti brojeve, vrlo brzo se pojavlju broj koji nije cio, recimo $3 : 5$. Da bi prevazišli ovaj problem ponovo trebamo "proširiti" ovaj put skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, ovo proširenje nas dovodi do racionalnih brojeva i skupa racionalnih brojeva.

Racionalni brojevi i skup racionalnih brojeva. Skup racionalnih brojeva označavamo sa $\mathbb{Q}$ i definišemo ga sa $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Cijele brojeve možemo predstaviti u obliku $m = \frac{m}{1}$, pa vrijedi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Skup racionalnih brojeva je zatvoren za sabiranje, množenje, oduzimanje i dijeljenje (osim nulom), te u skupu racionalnih brojeva možemo rješavati jednačine oblika $a \cdot x = b$, $a \neq 0$. Znamo da je kod racionalnog broja $\frac{m}{n}$, m brojnik, a n je n nazivnih ili imenilac, te da se dva racionalna broja sabiraju, oduzimaju, množe i dijele po pravilima

$$\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 \pm a_2 b_1}{b_1 b_2}, \ \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}, b_1, b_2 \neq 0,$$

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2}{b_1 a_2}, \ b_1, b_2, a_2 \neq 0.$$

Međutim ni u skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ ne možemo riješiti ni neke vrlo jednostavne jednačine, na primjer $x^2 = 2$. Rješenje ove jednačine je $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$. Pokažimo da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. Pretpostavimo suprotno da postoje brojevi m $\in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$, za koje vrijedi $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ i da su m i n uzajamno prosti (m i n nemaju zajedničkih faktora, na primjer takvi su brojevi 8 i 9). Kvadriranjem dobijamo

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow 2n^2 = m^2,$$

sada zaključujemo da su m^2 i m parni brojevi, pa je $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Dalje je

$$2n^2 = m^2 \Leftrightarrow 2n^2 = (2k)^2 \Leftrightarrow n^2 = 2k^2,$$

što znači da je i n^2 odnosno n paran broj. Sada smo dobili da su i m i n parni brojevi, što je u suprotnosti sa našom pretpostavkom da su m i n uzajamno prosti brojevi. Možemo zaključiti da je greška u pretpostavci, tj. da je $\sqrt{2}$ racionalan broj, dakle $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Iracionalni brojevi i skup iracionalnih brojeva. Prethodni primjer doveo je do formiranja skupa iracionalnih brojeva $\mathbb{I}$. Ovaj skup čine iracionalni brojevi, tj. brojevi koje ne možemo napisati u obliku $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, poznato je da ovi brojevi imaju beskonačan decimalni zapis, čije se cifre ne ponavljaju periodički (kod racionalnih brojeva u ovom zapisu cifre se ponavljaju periodički, zato je $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$). Racionalni brojevi, osim $\sqrt{2}$ su još $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots, e = 3.14159\ldots$, $e = 2.718281\ldots$ i dr.

Realni brojevi i skup realnih brojeva. Racionalni i iracionalni brojevi sačinjavaju zajedno skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, i zajedno ih nazivamo realni brojevi, tj. vrijedi $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

U skupu realnih brojeva definisane su operacije sabiranja $+$ i operacija množenja $\cdot$. Za svaka dva realna broja x i y, jedoznačno su određeni realni brojevi $x + y$ i $x \cdot y$. Ove operacije imaju sljedeće osobine:

(A1) Za svako $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi $(x + y) + z = x + (y + z)$, (asocijativni zakon).

(A2) Postoji samo jedan realan broj $0 \in \mathbb{R}$ takav da je svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x + 0 = 0 + x = x$, (0 je neutralni element za sabiranje).

(A3) Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji sam jedan $-x \in \mathbb{R}$ takav da je $x + (-x) = (-x) + x = 0$, ($-x$ je inverzni element u odnosu na sabiranje).

(A4) Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $x + y = y + x$ (komutativni zakon za sabiranje).

(A5) Za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi $(xy)z = x(yz)$ (asocijativni zakon za množenje).

(A6) Postoji samo jedan realan broj $1 \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (1 je neutralni element za množenje).

(A7) Za svaki $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, postoji jedinstven element $x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ takav da je $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ (x^{-1} je inverzni element za množenje elementa x).

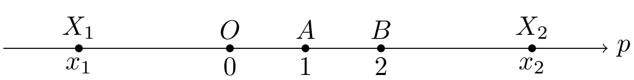
(A8) Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $xy = yx$ (komutativni zakon za množenje).

(A9) Za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi $x(y + z) = xy + xz$ (distributivni zakon množenja prema sabiranju).

NAPOMENA 1.1.

Svaku uređenu trojku $(S, +, \cdot)$ koju čine proizvoljan neprazan skup, te binarne operacije $+$ i $\cdot$ za koje važe osobine (aksiomi) (A1)–(A9) nazivamo polje. Dakle polja su $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, dok $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nisu polja.

Brojna osa. Neka je data prava p, vidi Sliku 1.1. Na pravoj p uočimo bilo koju tačku, na primjer O. Na ovaj način dijelimo pravu p na tri dijela, prvi dio su tačke koje su lijevo od tačke O, samu tačku O i tačke koje su desno od tačke O. Sada hoćemo da svakoj tački prave p pridružimo tačno jedan realan broj. Samoj tački O možemo pridružiti nulu 0, tački A broj 1, tački B broj 2 itd. Tačkama koje su desno od tačke O pridružujemo pozitivan realan broj, na primjer tački X_2 dodjeljujemo broj $x_2 = \overline{OX_2}$, tj. dužinu duži OX_2, dok tačkama lijevo od tačke O dodjeljujemo negativan broj $x_1 = -\overline{OX_1}$. Na ovaj način uspostavljena je bijekcija između tačaka brojne prave i realnih brojeva (svakoj tački brojne prave odgovara samo jedan realan broj i obrnuto). Pravu p zovemo brojna osa (ili prava).



Slika 1.1: Brojna prava

Uređenje na skupu realnih brojeva Vidjeli smo da svakom realnom broju odgovara jedna tačka na brojnoj osi. Ako se tačka koja odgovara broju x nalazi lijevo od tačke koja odgovara broju y, onda je $x < y$ ili $y > x$, tj. x je manje od y ili y je veće od x (ili y je desno od x pa je y veće od x). Dakle bilo koja dva realna broja x i y možemo uporediti, moguća su tri slučaja $x < y$, $x = y$ i $x > y$. Koristimo relaciju uređenja (ili uređajnu relaciju) $\leqslant$, $x \leqslant y$ znači ili je $x < y$ ili $x = y$. Relacija uređenja ima osobine

(A10) Za bilo koja dva realna broja $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$.

(A11) $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$ ako i samo ako je $x = y$.

(A12) Ako je $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$ onda je $x \leqslant z$ (zakon tranzitivnosti).

Relacija uređenja $\leqslant$ je kompatibilna sa sabiranjem i množenjem i vrijedi

(A13) Ako je $x \leqslant y$ onda za svaki $z \in \mathbb{R}$ vrijedi $x + z \leqslant y + z$.

(A14) Iz $(0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y) \Rightarrow 0 \leqslant xy$.

Napomena 1.2.

Svaku uređenu trojku $(S, +, \cdot)$ koju čine neprazan skup S i binarne operacije $+$ i $\cdot$ za koje važe osobine (A1)–(A14) zovemo uređeno polje. Uređeno polje je i $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, dok $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nisu uređena polja.

Intervali i segmenti. Osim podskupova $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ često se koriste i intervali odnosno segmenti. Uobičajena naziv je otvoreni interval ili samo interval, dok zatvoreni interval nazivamo i segment. Otvoreni interval (ili samo interval) u oznaci (a, b) je skup elemenata $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a < x < b$, gdje su a i b realni brojevi i $a < b$, tj.

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Zatvoreni interval (ili samo segment) u oznaci $[a, b]$, je skup elemenata $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a \leqslant x \leqslant b$, i ovdje su a i b realni brojevi i $a < b$, tj.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}.$$

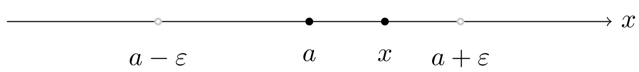
Pored intervala i segmenta mogu se definisati i poluotvoreni intervali

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\},$$

i beskonačni intervali

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\},$$
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}.$$

Otvorena okolina. Otvorena okolina realnog broja a je svaki interval koji sadrži broj a. Ako je a sredina ovog intervala onda takvu okolinu zovemo simetrična otvorena okolina. Ove simetrične okoline su sve oblika $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ i nazivamo ih ε–okolina broja ili tačke a (vidjeti Sliku 1.2). Dužina svake ε–okoline je $a + \varepsilon - (a - \varepsilon) = 2\varepsilon$. Realan broj x pripada ε–okolini tačke a ako i samo ako je ispunjen uslov $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.



Slika 1.2: ε–okolina tačke a

Supremum i infimum.

Definicija 1.1.

Kažemo da je skup $S \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeđen ili ograničen, ako postoji realan broj M takav da je $x \leqslant M$ za svaki $x \in S$. Svaki broj M sa navedenim svojstvom nazivamo majoranta skupa S. Ako skup S nije odozgo omeđen, kažemo da je odozgo neomeđen.

Kažemo da je skup $S \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđen ili ograničen, ako postoji realan broj m takav da je $x \geqslant m$ za svaki $x \in S$. Svaki broj m sa navedenim svojstvom nazivamo minoranta skupa S. Ako skup S nije odozdo omeđen, kažemo da je odozdo neomeđen. Skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je omeđen, ako je i odozgo i odozdo omeđen. U protivnom se se kaže da je S neomeđen.

Primjer 1.1.

Skup prirodnih brojeva ograničen je odozdo, ali nije ograničen odozgo, za minorantu dovoljno je uzeti bilo koji broj manji ili jednak 1, dok sa druge strane za bilo koji prirodan broj n uvijek postoji prirodan broj veći od n, na primjer $n+1$, pa je $\mathbb{N}$ neomeđen odozgo.

Primjer 1.2.

Svi skupovi (a,b), $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ su ograničeni, dok su $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$ ograničeni odozgo, a skupovi $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$ su ograničeni odozdo.

Svaki odozgo ograničen skup S ima više majoranti, isto tako ograničen skup odozdo ima više minoranti, vidjeli smo da su minorante skupa prirodnih brojeva svi brojevi manji ili jednaki 1. Od svih majoranti najzanimljivija je najmanja majoranta, pa je pitanje kada ona postoji, isto tako postavlja se pitanje egzistencije najveće minorante.

Definicija 1.2.

Najmanju majorantu skupa S nazivamo supremum i označavamo sa $\sup S$. Ako je $\sup S \in S$, nazivamo ga maksimalnim elementom i označavamo ga sa $\max S$.

Najveću minorantu skupa S nazivamo infimum i označavamo sa $\inf S$. Ako je $\inf S \in S$, nazivamo ga minimalnim elementom skupa S i označavamo ga sa $\inf S$.

Skup $\mathbb{R}$ ima važnu osobinu:

(A15) Svaki odozgo ograničen skup $S \subset \mathbb{R}$ ima supremum, a svaki odozdo ograničen skup $S \subset \mathbb{R}$ ima infimum.

1.2 Apsolutna vrijednost realnog broja

Definicija 1.3 (Apsolutna vrijednost realnog broja).

Apsolutna vrijednost (ili modul ili norma) realnog broja x, u oznaci $|x|$, je preslikavanje $x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, definisano sa

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x > 0, \\ 0, & \text{ako je } x = 0, \\ -x, & \text{ako je } x < 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Napomena 1.3.

Možemo koristiti i sljedeće definicije koje su ekvivalentne sa Definicijom 1.3

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x,-x\},$$
$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2}.$$

Primjer 1.3.

Vrijedi

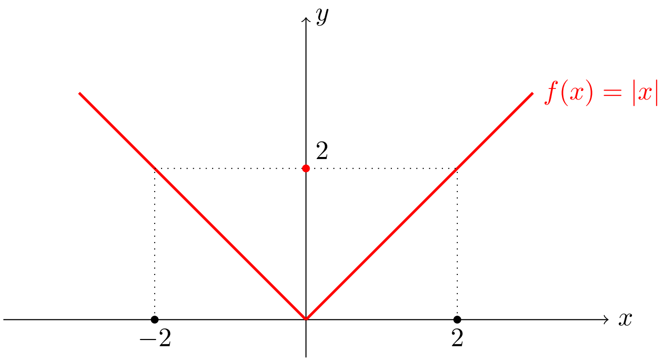
$$|3| = 3, \quad |-3| = 3, \quad |0| = 0.$$

Vrijede sljedeće osobine apsolutne vrijednosti realnog broja

1. $|xy| = |x||y|$, 2. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, 3. $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (nejednakost trougla),
4. $|x-y| \leqslant |x| + |y|$, 5. $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$, $a > 0$, 6. $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$.

Napomena 1.4.

Geometrijski gledano apsolutna vrijednost realnog broja x predstavlja udaljenost realnog broja od koordinatnog početka vidjeti Sliku 1.3.



Slika 1.3: Grafik funkcije $f(x) = |x|$ i udaljenost tačaka 2 i -2 od koordinatnog početka

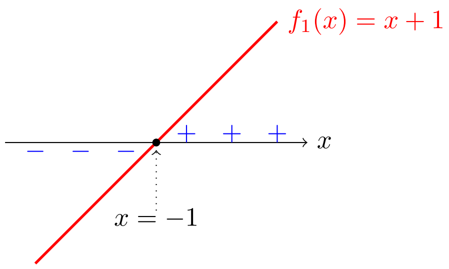
1.3 Zadaci

Primjer 1.4.

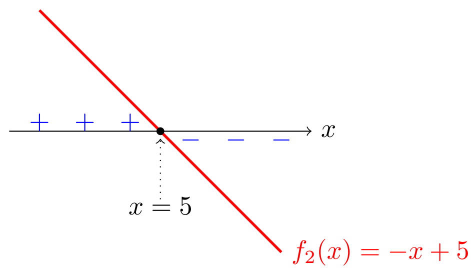
Riješiti jednačinu $3x - 2|x+1| - |5-x| = 3$.

Rješenje:

Odredimo prvo znak izraza $x+1$ i $5-x$, iskoristimo grafike linearnih funkcija $f_1(x) = x+1$ i $f_2(x) = -x+5$, datih na sljedećoj slici



(a) Grafik funkcije $f_1(x) = x+1$



(b) Grafik funkcije $f_2(x) = -x+5$

Slika 1.4: Grafici linearnih funkcija, koji će poslužiti za oslobađanje od apsolutnih vrijednosti

Sada na osnovu grafika dobijamo sljedeću tabelu
Interval I, $x \in (-\infty, -1]$ vrijedi

$$3x - 2[-(x+1)] - (5-x) = 3 \iff 3x + 2x + 2 - 5 + x = 3 \iff 6x = 6 \iff x = 1 \notin (-\infty, -1].$$

Interval II, $x \in (-1, 5]$ vrijedi

$$3x - 2(x+1) - 5 + x = 3 \iff 2x = 10 \iff x = 5 \in (-1, 5].$$

Interval III, $x \in (5, \infty)$

$$3x - 2(x+1) - [-(-x+5)] = 3 \iff 5 = 5,$$

ovo znači da su rješenja jednačine na intervalu III svi $x \in (5, \infty)$. Pa rješenje jednačine unija svih dobijenih rješenja na sva tri intervala $x \in \{5\} \cup (5, \infty) = [5, \infty)$.

	∞	-1	5	+∞
$\lvert x+1\rvert$	$-(x+1)$	$x+1$	$x+1$	
$\lvert 5-x\rvert$	$5-x$	$5-x$	$-(5-x)$	
	I	II	III	

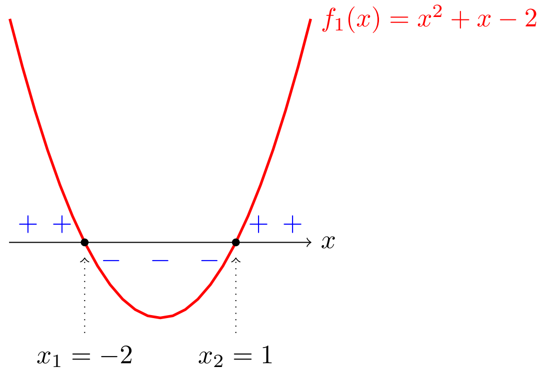
Tabela 1.1: Znak funkcija $f_1(x) = x+1$ i $f_2(x) = -x+5$

PRIMJER 1.5.

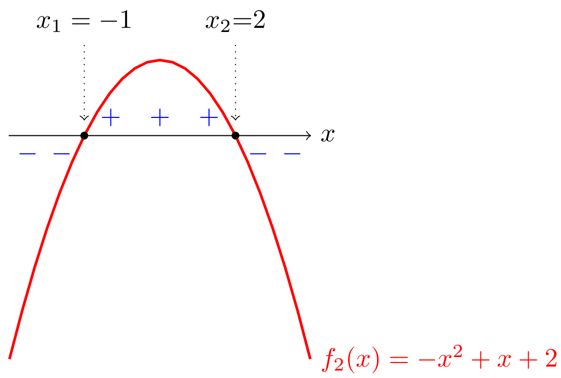
Riješiti jednačinu $\left|x^2+x-2\right| + \left|-x^2+x+2\right| = 2.$

Rješenje:

Da bi odredili znak kvadratnih trinoma unutar zagrada apsolutne vrijednosti, posmatrajmo kvadratne funkcije $f_1(x) = x^2+x-2$ i $f_2(x) = -x^2+x+2$.



(a) Grafik funkcije $f_1(x) = x^2+x-2$



(b) Grafik funkcije $f_2(x) = -x^2+x+2$

Slika 1.5: Grafici kvadratnih funkcija, koji će poslužiti za oslobađanje od apsolutnih vrijednosti

Nule funkcija f_1 i f_2 određujemo rješavajući odgovarajuće kvadratne jednačine po formuli $x_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, vrijedi

$$x^2+x-2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 = -2 \lor x_2 = 1); \quad -x^2+x+2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 = -1 \lor x_2 = 2).$$

Znak izraza pod apsolutnim zagradama određujemo koristeći prethodne grafike

	∞	-2	-1	1	2	+∞
$\lvert x^2+x-2\rvert$	x^2+x-2	$-(x^2+x-2)$	$-(x^2+x-2)$	x^2+x-2	x^2+x-2	
$\lvert -x^2+x+2\rvert$	$-(-x^2+x+2)$	$-(-x^2+x+2)$	$-x^2+x+2$	$-x^2+x+2$	$-(-x^2+x+2)$	
	I	II	III	IV	V	

Tabela 1.2: Znak funkcija $f_1(x) = x^2+x-2$ i $f_2(x) = -x^2+x+2$

Interval I, $x \in (\infty, -2]$, vrijedi

$$x^2+x-2-(-x^2+x+2) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3},\ x_{1/2} \notin (-\infty, -2].$$

Interval II, $x \in (-2, -1]$, vrijedi

$$-(x^2 + x - 2) - (-x^2 + x + 2) = 2 \Leftrightarrow x = -1,\ x = -1 \in (-2, 1].$$

Interval III, $x \in (-1, 1]$, vrijedi

$$-(x^2 + x - 2) - x^2 + x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1,\ x_2 = 1 \in (-1, 1].$$

Interval IV, $x \in (1, 2]$, vrijedi

$$x^2 + x - 2 - x^2 + x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 1,\ x = 1 \notin (1, 2].$$

Interval V, $x \in (2, \infty)$, vrijedi

$$x^2 + x - 2 - (-x^2 + x + 2) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3},\ x_{1/2} \notin (2, \infty).$$

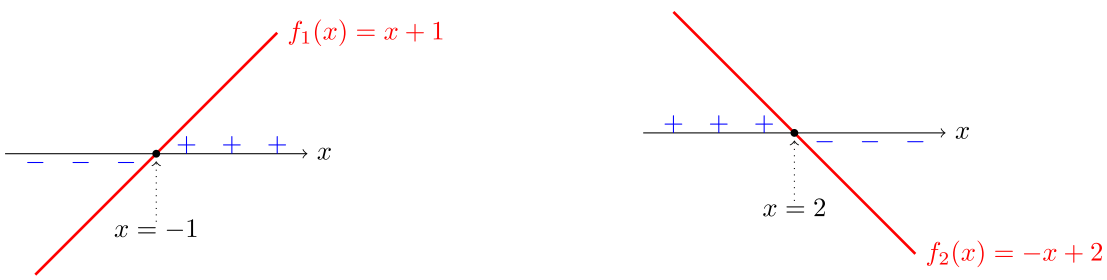
Pa je rješenje jednačine $x \in \{-1, 1\}$.

PRIMJER 1.6.

Riješiti nejednačinu $|2 - x| > |x + 1| - 3$.

Rješenje:

Oslobađanju od zagrada apsolutne vrijednosti pristupamo na isti način kao i slučaju jednačina, koristeći sljedeće grafike.



(a) Grafik funkcije $f_1(x) = x + 1$

(b) Grafik funkcije $f_2(x) = -x + 2$

Slika 1.6: Grafici linearnih funkcija, koji će poslužiti za oslobađanje od apsolutnih vrijednosti

Podatke iz grafika prenesemo u tabelu.

∞ -1 2 $+\infty$

$\lvert x + 1\rvert$	$-(x + 1)$	$x + 1$	$x + 1$
$\lvert 2 - x\rvert$	$2 - x$	$2 - x$	$-(2 - x)$
	I	II	III

Tabela 1.3: Znak funkcija $f_1(x) = x + 1$ i $f_2(x) = -x + 2$

Interval I, $x \in (-\infty, -1]$, vrijedi

$$2 - x > -(x + 1) - 3 \Leftrightarrow 2 - x > -x - 1 - 3 \Leftrightarrow 2 > -4.$$

Nejednakost $2 > -4$ je tačna bez na vrijednost x, tj. $(\forall x \in \mathbb{R})\, 2 > -4$, te je rješenje nejednačine na Intervalu I,

$$x \in \mathbb{R} \cap (-\infty, -1] = (-\infty, -1].$$

Interval II, $x \in (-1, 2]$, vrijedi

$$2 - x > x + 1 - 3 \Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow x < 2,\ x \in (-\infty, -2)$$

pa je rješenje nejednačine

$$x \in (-\infty, 2) \cap (-1, 2] = (-1, 2).$$

Interval III, $x \in (2, \infty)$, vrijedi

$$-(2 - x) > x + 1 - 3 \Leftrightarrow -2 > -2.$$

Ovo je netačna brojna nejednakost pa rješenje u ovom slučaju $\varnothing$ (prazan skup).

Rješenje nejednačine je unija rješenja na svakom posmatranom intervalu

$$x \in (-\infty, -1] \cup (-1, 2) = (-\infty, 2).$$

Primjer 1.7.

Riješiti nejednačinu $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| \leqslant 2$.

Rješenje:

Ovu nejednačinu možemo riješiti kao nejednačinu u Primjeru 1.6, međutim možemo i iskoristiti sljedeću osobinu

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow (-a < x \wedge x < a),\ a \in \mathbb{R}^+.$$

Koristeći prethodnu osobinu realnih brojeva, vrijedi

$$\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant \frac{2x-1}{x+1} \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant \frac{2x-1}{x+1} \wedge \frac{2x-1}{x+1} \leqslant 2.$$

Zatim riješimo dobijene nejednačinem jednu pa drugu. Rješenje polazne nejednačine je presjek dobijenih rješenja, u ovom slučaju

$$x \in \left[-\tfrac{1}{4}, \infty\right).$$

Primjer 1.8.

Riješiti nejednačinu $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| \geqslant 2$.

Rješenje:

U slučaju nejednačine $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| \geqslant 2$, koristimo se osobinom

$$|x| > a \Leftrightarrow (x < -a \vee x > a),\ a \in \mathbb{R}^+,$$

pa je

$$\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| \geqslant 2 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1} \geqslant 2 \vee \frac{2x-1}{x+1} \leqslant -2.$$

Riješe se obje nejednačine, ali rješenje polazne nejednačine je sada unija dobijenih rješenja, pa je na kraju rješenje

$$x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{4}\right].$$

Zadaci za vježbu

1. Riješiti jednačine
   (a) $|2x-1|-2|1-x|=1$; (b) $|x-3|+|1-4x|=2|x+2|$; (c) $|2x-1|-3(3x+1)=|x-1|-2(x+3)-9$;

   (d) $|2x+1|-3|x-3|=|x-1|+x+2$; (e) $4(1-x)+|2x-1|=3x-|x-2|-1$;

   (f) $|2x-1|-3(3x+1)=|x-1|-2(x+3)-9$;

   (g) $|2x+1|-3|x-3|=|x-1|+x+2$; (h) $4(1-x)+|2x-1|=3x-|x-2|-1$;

   (i) $|x^2-4x|+3=x^2+|x-5|$; (j) $|x-1|+|x^2+3x-4|=5$; (k) $|x-5|+|x^2-2x-8|=7$;

   (l) $2x-|5-|x-2||=1$.

2. Riješiti nejednačine
   (a) $2-3|1-x|-2x\leqslant 1-4x-2|2x+3|$; (b) $|x+1|+|3x-1|>2$;

   (c) $|2x-1|-3(3x+1)<|x-1|-2(x+3)-9$;

   (d) $|2x+1|-3|x-3|\leqslant|x-1|+x+2$; (e) $4(1-x)+|2x-1|\geqslant 3x-|x-2|-1$;

   (f) $\left|\dfrac{2x-1}{x+1}\right|\leqslant 2$; (g) $\left|\dfrac{x-1}{2x+1}\right|<1$; (h) $\left|\dfrac{x+1}{2x-3}\right|\geqslant\dfrac{1}{2}$;

   (i) $|x^2-x|-|x|<1$; (j) $|x^2-3x+2|-1>|x-3|$ (k) $|x^2-7x+10|-|x-3|<6$

   (l) $|x-1|+|x^2+3x-4|\geqslant 5$; (m) $|x^2-2x-3|+2-2x\geqslant|x-4|+x^2$; (n) $|x^2+2x-3|<3x+3$;

   (o) $|x^2-4x|+3\geqslant x^2+|x-5|$; (p) $\left|\dfrac{x^2+2x}{x^2-4x+3}\right|<1$.

Poglavlje 2

Procentni račun. Račun smjese.

2.1 Razmjere i proporcije

U raznim proračunima, u prirodnim, inžinjerskim naukama i dr., često se pojavljuju razmjere, odnosi ili omjeri nekih veličina.

Definicija 2.1 (Razmjera).

Razmjera (ili omjer) dva broja a i b (a, $b > 0$) je njihov količnik. Pišemo

$$a : b \text{ ili } \frac{a}{b}, \; a, b > 0.$$

Ako su dvije razmjere $a : b$, i $c : d$ jednake, dobijamo proporciju.

Definicija 2.2 (Prosta proporcija).

Jednakost koju formiraju jednake razmjere nazivamo proporcija. Pišemo

$$a : b = c : d \text{ ili } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Proporcije imaju osobinu

$$\boxed{a : b = c : d = (a \pm c) : (b \pm d).}$$

Ako je više razmjera jednako, vrijedi

$$\boxed{a : b = c : d = e : f = p : q \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow a : c : e : p = b : d : f : q.} \tag{2.1}$$

Proporcije u prethodnom izrazu (2.1) nazivamo produžene proporcije.

Primjer 2.1.

Odrediti x iz proporcije $(x + 9) : 6 = x : 5$.

Rješenje:

$(x + 9) : 6 = x : 5 \Leftrightarrow 5(x + 9) = 6x \Leftrightarrow x = 45.$

Primjer 2.2.

Primjenom osobina produžene proporcije odrediti x, y, z i t, ako je
$x + y + z + t = 198$ i $x : y : z : t = 1 : 2 : 3 : 5$.

Rješenje:

Iz produžene proporcije vrijedi
$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \frac{t}{5} = k,$$
pa je
$$x = k,\ y = 2k,\ z = 3k,\ t = 5k.$$
Sada u jednakosti $x + y + z + t = 198$, zamijenimo x, y, z i t preko k, dobijamo
$$k + 2k + 3k + 5k = 198 \Leftrightarrow 11k = 198 \Leftrightarrow k = 18,$$
pa je na kraju
$$x = 18,\ y = 36,\ z = 54,\ t = 90.$$

Primjer 2.3 (Direktna proporcija.).

Tri majice koštaju 90 KM. Koliko majica možemo kupiti za 240 KM?

Rješenje:

Vrijedi $3 : 90\text{ KM} = x : 240\text{ KM} \Leftrightarrow x \cdot 90\text{ KM} = 3 \cdot 240\text{ KM} \Leftrightarrow x = 8$.

Primjer 2.4 (Obrnuta proporcija.).

Jedan vagon vreća krompira istovarila su tri radnika za 12 sati. Za koliko će sati taj vagon istovariti 4 radnika?

Rješenje:

Vrijedi $3 : 4 = x\,\text{sati} : 12\,\text{sati} \Leftrightarrow 4x = 36 \Leftrightarrow x = 9$ sati.

2.2 Procentni račun

Ako označimo sa
$$\begin{aligned} G &- \text{ glavnicu} \\ p &- \text{ procenat} \\ I &- \text{ iznos,} \end{aligned}$$
tada vrijedi proporcija
$$\boxed{G : 100 = I : p.} \tag{2.2}$$
Glavnica je ukupan iznos ili količina nekog dobra, iznos je dio glavnice, dok je procenat stoti dio glavnice. Oznaka za 1 procenat je
$$1 \text{ procenat} = 1\%.$$
Dakle $1\% = \frac{1}{100}$ glavnice, glavnici odgovara 100%, a iznosu I vrijednost p.

Primjer 2.5.

U grupi je bilo 32 studenta i studentice, sljedeću godinu upisalo je 30-oro. Koliki je procenat prolaznosti?

Rješenje:

Vrijedi $G = 32$, $I = 30$, pa je

$$32 : 100\% = 30 : p \Leftrightarrow 32p = 3000\% \Leftrightarrow p = 93.75\%.$$

Prolaznost je 93.75%.

Primjer 2.6.

Cijena nekog proizvoda je smanjena za 10%, a zatim je povećana za 15%, i sada iznosi 60 KM. Kolika je prvobitna cijena?

Rješenje:

Koristićemo oznaku C za cijenu, i to C_1, C_2, C_3 za prvu, drugu i treću cijenu, respektivno. Vrijedi proporcija

$$C_1 : 100\% = C_2 : (100\% - 10\%) \Leftrightarrow C_2 = \frac{9}{10}C_1,$$

ili

$$C_2 = C_1 - \frac{1}{10}C_1 = \frac{9}{10}C_1, \left(10\% \text{ odgovara } \frac{1}{10}\right).$$

Sljedeće

$$C_3 = C_2 + 0.15C_2 = 1.15C_2 = 1.15 \cdot 0.9C_1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{C_3}{1.15 \cdot 0.9} = \frac{60}{1.15 \cdot 0.9} \approx 57.97 \text{ KM}.$$

Napomena 2.1.

Osim procenta koristi se i promil. Promil je hiljaditi dio od neke cjeline, oznaka za 1 promil je

$$1 \text{ promil } = 1‰.$$

2.3 Račun smjese

Jednostavni (ili prosti) račun smjese Ponekad je potrebno pomiješati proizvode različitih cijena kako bi se dobio proizvod neke zadane cijene. Na primjer trgovac ima u skladištu kafu od 3 KM i kafu od 15 KM . Prva kafa je lošijeg kvaliteta, a druga je preskupa za maloprodaju i on se odlučuje da ih pomiješa da bi dobio kafu unaprijed zadane mase, koja košta 8 KM po kilogramu, koja neće biti ni preskupa a biće zadovoljavajućeg kvaliteta.

Sa matematičke strane, isti problem je u npr. miješanju dvije kiseline različitih koncentracija da bi se dobila kiselina sa unaprijed zadanom koncetracijom i unaprijed zadane zapremine. Preciznija formulacija problema glasi:
U kojem odnosu i u kojim količinama treba pomiješati tačno dvije veličine (dva sastojka) x_1 i x_2 koje imaju neko zajedničko svostvo različitih vrijednosti (intenziteta) s_1 i s_2, tako da se dobije smjesa ukupne količine x i željenog intenziteta s? Problem rješavamo rješavanjem sistema

$$x_1 + x_2 = x$$
$$x_1 s_1 + x_2 s_2 = xs,$$

sada zbog $x_2 = x - x_1$, dobijamo linearnu jednačinu sa jednom nepoznatom

$$x_1 s_1 + (x - x_1)s_2 = xs,$$

čijim rješavanjem dobijamo x_1, a x_2 iz $x_2 = x - x_1$. Traži odnos računamo iz

$$\frac{x_1}{x_2}.$$

Primjer 2.7 (Prost račun smjese.).

Imamo 48% i 78% kiselinu. Koliko je potrebno jedne, a koliko druge nasuti u posudu da bi se dobilo 10 l, 60%–ne kiseline?

Rješenje:

Označimo jednu koncentraciju sa $s_1 = 48\%$, odgovarajuću količinu sa x_1, druga koncentracija je $s_2 = 78\%$ i odgovarajuća količina je x_2. Ukupna količina je $x_1 + x_2 = x = 10$ l, dok je odgovarajuća koncetracija poslije miješanja $s = 60\%$.
Sada vrijedi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 10 \text{ l} \\ x_1 s_1 + x_2 s_2 &= xs, \end{aligned}$$

kako je $x_2 = 10 \text{ l} - x_1$, dobijamo

$$x_1 \cdot 0.48 + (10 - x_1) \cdot 0.78 = 10 \cdot 0.6 \Leftrightarrow x_1 = 6 \text{ l}.$$

Potrebno je 6 l, 48%– kiseline i 4 l, 78%–kiseline.

Primjer 2.8 (Jednostavni račun smjese).

Sa koliko postotnom kiselinom, treba pomiješati 6 l, 48%–ne kiseline, da bi se dobilo 10 l, 60%–ne kiseline?

Rješenje:

Sada vrijedi

$$4p + 6 \cdot 0.48 = 10 \cdot 0.6 \Leftrightarrow p = 0.78,$$

ili u procentima 78%.

Složeni račun smjese Ako imamo više od dvije veličine koje trebamo pomiješati dobijamo sljedeći problem: U kojem odnosu i u kojim količinama treba pomiješati neke veličine iste vrste $x_1, x_2, \ldots, x_n$, koje imaju neko zajedničko svojstvo različitih vrijednosti $s_1, s_2, \ldots, s_n$ da bi dobili smjesu ukupne količine $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ i željenog intenziteta s?

Ovaj problem rješavamo algoritmom šema zvijezde koji ćemo ilustrovati na sljedećem primjeru.

Primjer 2.9 (Složeni račun smjese).

U skladištu su 4 vrste robe po cijenama 160, 140, 110 i 50 KM (svojstva). Kako treba izmiješati ovu robu po vrstama da bi dobili 560 kg ove robe po cijeni od 120 KM po kilogramu?

Rješenje:

U šemi su unešene na lijevoj strani cijene pojedinih roba (vidjeti Sliku 2.1), tj. svojstva s_1, s_2, s_3, s_4, treba izračunati kolike mase su pojedinih vrsta robe koje treba izmiješati (u ovom zadatku ove mase su označena sa x_1, x_2, x_3, x_4). u sredini je tražena cijena, dok su na desnoj strani tražene vrijednosti iz proporcije (ove vrijednosti trebaju biti pozitivne, tj. uzimaju se po apsolutnoj vrijednosti, zato uvijek oduzimamo od veće vrijednosti manju).

Iz sheme na Slici 2.1 dobijemo sljedeću proširenu proporciju

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 70 : 10 : 20 : 40 \Leftrightarrow x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 7 : 1 : 2 : 4.$$

Iz prethodne proširene proporcije vrijedi

$$\frac{x_1}{7} = k \Leftrightarrow x_1 = 7k$$
$$\frac{x_2}{1} = k \Leftrightarrow x_2 = k$$
$$\frac{x_3}{2} = 2k \Leftrightarrow x_3 = 2k$$
$$\frac{x_4}{4} = 4k \Leftrightarrow x_4 = 4k.$$

Koristimo sada ukupnu masu robe

$$7k + k + 2k + 4k = 560 \Leftrightarrow 14k = 560 \Leftrightarrow k = 40.$$

Tražene vrijednosti dobijamo na sljedeći način:

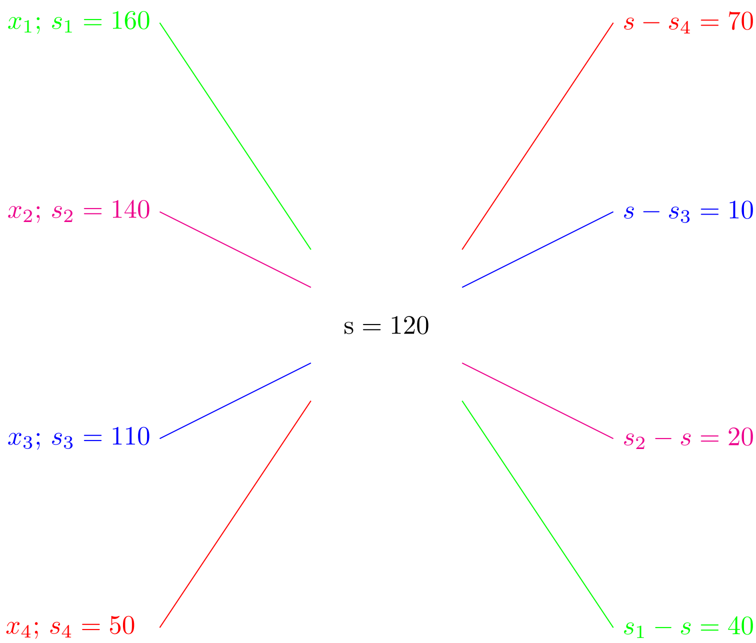
Robe čija je cijena $s_1 = 160$ KM potrebno je $x_1 = 7 \cdot 40$ kg $= 280$ kg;
Robe čija je cijena $s_2 = 140$ KM potrebno je $x_2 = 1 \cdot 40$ kg $= 40$ kg;
Robe čija je cijena $s_3 = 110$ KM potrebno je $x_3 = 2 \cdot 40$ kg $= 80$ kg;
Robe čija je cijena $s_4 = 50$ KM potrebno je $x_4 = 4 \cdot 40$ kg $= 160$ kg .

Provjera

$$280 + 40 + 80 + 160 = 560,$$

i

$$280 \cdot 160 + 40 \cdot 140 + 80 \cdot 110 + 160 \cdot 50 = 560 \cdot 120$$
$$67200 = 67200.$$



Slika 2.1: Šema za dobijanje proširene proporcije

Napomena 2.2.

Ovaj zadatak nema jedinstveno rješenje.

2.4 Zadaci za vježbu

1. Riješiti proporciju (a) $(x-3):4=10:6$; (b) $x:\left(1+\frac{1}{11}\right)=\left(3+\frac{2}{3}\right):2$.
2. Podijeliti duž od 456 m na tri jednaka dijela čije će dužine biti redom proporcionalne brojevima $\frac{2}{3}$, $\frac{9}{8}$ i $\frac{7}{12}$.
3. Unuk, otac i djed imaju zajedno 120 godina. Koliko svaki od njih ima godina, ako su im godine u razmjeri $1:5:9$?
4. Tri osobe uložile su u jedan posao ove svote novca: osoba A 1200 KM, osoba B 9000 KM i osoba C 15000 KM. Ako je ukupna zarada od tog posla 210000 KM, koji dio zarade će pripasti osobi C, (zarada treba da je proporcionalna uloženoj svoti novca)?
5. Brojevi a, b i c su u razmjeri $2:3:4$. Ako je njihova aritmetička sredina 15, koliko iznosi najmanji od njih?
6. Omjer šećera i maslaca u kolaču je $4:3$. U kolač je stavljeno 0.3 kg maslaca. Koliko ćemo staviti šećera u kolač?
7. Sanduk voća težak je 90 kg, od čega je neupotrebljivo 4%. Kolika je težina upotrebljivog voća?
8. Odsutna su 4 studenta, što iznosi 12.5% od ukupnog broja studenata jedne grupe. Koliko studenata ima u toj grupi?
9. Koliko litara mliječne masti ima u 300 l mlijeka, ako to mlijeko sadrži 2.8% mliječne kiseline?
10. Cijena cipela je 270 KM. Kolika će cijena biti nakon sniženja od 15%?
11. Poslije prelaska na novo radno mjesto jednom radniku plata je povećana za 20%. Kolika je plata bila ako je to povećanje 132 KM?
12. Cijena knjige snižena je 10%, a zatim za 20% i sada košta 45 KM . Kolika je bila cijena prije prvog sniženja?
13. Na ispitu radila su se 3 zadatka. Pri tome 12% studenata nije riješilo ni jedan zadatak, 32% studenata riješilo je jedan ili dva zadatka, dok je 14% studenata riješilo sva tri zadatka. Koliko je ukupno studenata radilo ispit?
14. Poslije 3 pojeftinjenja od po 10% cijena robe iznosi 2187 KM . Izračunati prvobitnu cijenu robe?
15. U tri vreće ima 64.2 kg brašna. U prvoj vreći ima 20% manje brašna nego u drugoj, a u trećoj 42.5% od količine brašna iz prve vreće. Koliko brašna ima u svakoj vreći?
16. Na skladištu ima kafe po cijeni od 7.5 KM i 5.5 KM po kg. Napraviti 120 kg mješavine kafe koja će koštati po 6.8 KM po kg.
17. Koliko vode temperature 40^0C i vode temperature 25^0C treba pomiješati da se dobije 90 l vode temperature 30^0C?
18. Koliko treba uzeti sumporne kiseline jačine 52% , a koliko jačine 88% da se dobije mješavina od 144 l jačine 72%?
19. Komad bronze mase 7.5 kg sadrži 72.% bakra. Kada se ovaj komad stopi sa drugim dobije se 10 kg bronze koja sadrži 70% bakra. Koliko je procenata bakra bilo u drugom komadu bakra?
20. Koliko litara 80% alkohola treba dodati u 1 l vode da se dobije 20%–tni alkohol?
21. Imamo 4 vrste neke robe po cijeni od 120, 100, 70 i 50 KM. Kako treba pomiješati tu robu da dobijemo 400 kg robe po cijeni od 80 KM? Koliko mogućih rješenja postoji?
22. Koliko bakra treba pomiješati sa 21 g čistog zlata da se dobije smjesa finoće 0.75?
23. Razblažen je 75% špirit sa 12 l vode i dobijen je 51%– postotni špirit. Kolika je bila prvobitna količina špirita?
24. Koliko vode treba izmiješati sa 150 g, 12%–nog rastvora kiseline da smjesa bude 4%–postotna?
25. Zlatar izmiješa dvije vrste zlata čije su finoće 0.75 i 0.81 (f–finoća zlatne smjese $0 \leqslant f \leqslant 1$) i dobije se 50 g zlata finoće 0.774. Po koliko je grama zlata uzeo obje vrste zlatar?
26. Kada se pomiješa 60 l ruma od 72% sa 70 l alkohola od 96%. Koliko treba vode dosuti u ovu smjesu da se dobije rum od 46%?
27. Koliko 75%–tne otopine soli treba dodati u 20 l da se dobije 60%–tna otopina soli?

Poglavlje 3

Kompleksni brojevi

3.1 Uvod

Proširenjem pojma broja došlo se do polja realnih brojeva $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. U polju realnih brojeva sve jednačine oblika

$$\begin{aligned} a + x &= b, \\ c \cdot x &= d, \\ x^n &= p \\ x^{2n+1} &= q, \end{aligned}$$

gdje su $a, b, d \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, q \in \mathbb{R}$, a $n \in \mathbb{N}$, možemo riješiti. Međutim ponovo je potrebno izvršiti proširenje, jer npr. jednostavna jednačina

$$x^2 + 1 = 0,$$

nije imala rješenje u $\mathbb{R}$.

Ponovo je potrebno izvršiti proširenje, ovaj put skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Definišimo na skupu

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\},$$

operacije sabiranja $+$ i množenja $\cdot$ na sljedeći način

$$\boxed{(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\ (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),}$$

$$\boxed{(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\ (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).}$$

Uređena trojka $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ je polje. Ovo polje naziva se polje kompleksnih brojeva i obilježava se sa $\mathbb{C}$, dok njegove elemente nazivamo kompleksni brojevi. Pokazuje se da vrijede svi aksiomi polja.

Napomena 3.1.

Za polje kompleksnih brojeva koristiti se češće oznaka $\mathbb{C}$, umjesto $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Ista oznaka $\mathbb{C}$ koristiti se i za sam skup kompleksnih brojeva. Iz samog konteksta vidi se radi li se o skupu ili polju, a ako se ne vidi onda se naglasi o čemu se radi.

Kompleksni broj $(0, 0)$ zvaćemo kompleksna nula, a kompleksni broj $(1, 0)$ kompleksna jedinica i označavaćemo

$$(0, 0) = 0$$

i

$$(1, 0) = 1.$$

Kompleksni broj $(0, 1)$ označićemo sa i, tj.

$$(0, 1) = i,$$

zvaćemo imaginarna jedinica. Sad vrijedi,

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x(1, 0) + y(1, 0)(0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot 1 \cdot i = x + yi.$$

Oblik

$$x + yi$$

naziva se algebarski oblik kompleksnog broja. Pri tome je

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
i^1 &= i\\
i^2 &= -1\\
i^3 &= i \cdot i^2 = -i\\
i^4 &= -1 \cdot (-1) = 1\\
i^5 &= i \cdot i^4 = i\\
&\vdots
\end{aligned}$$

te je

$$\boxed{i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,\ n \in \mathbb{N}.}$$

Za kompleksni broj $z = x + yi$, realni broj x je realni dio kompleksnog broja z i piše se

$$\boxed{x = \mathrm{Re}(z),}$$

a realan broj y je imaginarni dio kompleksnog broja z, i piše se

$$\boxed{y = \mathrm{Im}(z).}$$

Za dva kompleksna broja z_1 i z_2 vrijedi

$$\boxed{z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \wedge \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2).} \tag{3.1}$$

Vrijedi ako je $\mathrm{Im}(z) = 0$, tada $z \in \mathbb{R}$. Ali ako je $\mathrm{Im}(z) \neq 0 \wedge \mathrm{Re}(z) = 0$, tada je kompleksni broj čisto imaginaran.

NAPOMENA 3.2.

Polje $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nije uređeno kao polje $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Pretpostavimo suprotno da se može definisati relacija poretka $\leqslant$ u $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Tada bi za $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ vrijedilo $z_1 \leqslant z_2$ ili $z_2 \leqslant z_1$. Prethodno vrijedi i za 0 i za i, dakle imamo $0 \leqslant i$ ili $i \leqslant 0$. Iz $0 \leqslant i \Rightarrow 0 \leqslant i^2 = -1$. Kontradikcija. Slično, iz $i \leqslant 0$ slijedi $0 \leqslant -i$ a sada je $0 \leqslant i^2 = -1$, što ponovo dovodi ko kontradikcije.

Konjugovano–kompleksni broj Za kompleksni broj $z = x + yi$, broj $\overline{z} = x - yi$ je konjugovano–kompleksni broj kompleksnog broja z. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{z}} &= z,\\
\frac{z + \overline{z}}{2} &= \frac{x + yi + x - yi}{2} = x = \mathrm{Re}(z),\\
\frac{z - \overline{z}}{2i} &= \frac{x + yi - (x - yi)}{2i} = y = \mathrm{Im}(z),\\
z \cdot \overline{z} &= (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2.
\end{aligned}$$

3.2 Algebarski oblik

3.2.1 Operacije sa komp. brojevima u alg. obliku

Neka su kompleksni brojevi z_1 i z_2 dati u algebarskom obliku, tj. $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z-2 = x_2 + y_2 i$. Sabiranje, oduzimanje, množenje i dijeljenje se svodi na

$$z_1 + z_2 = x_1 + y_1 i + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = x_1 + y_1 i - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_2 + y_2 i}{x_1 + y_1 i} = \frac{x_2 + y_2 i}{x_1 + y_1 i} \cdot \frac{x_1 - y_1 i}{x_1 - y_1 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} i, \; z_1 \neq 0.$$

Primjer 3.1.

Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 2 - 5i$.
Izračunati (a) $z_1 + z_2$; (b) $z_1 - z_2$; (c) $z_1 \cdot z_2$; (d) $\frac{z_2}{z_1}$, te odrediti $\mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_2}\right)$ i $\mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_2}\right)$; (e) $\frac{\overline{z}_1}{z_1 + \overline{z}_2}$. Rješenje: Vrijedi

(a) $z_1 + z_2 = 3 + 4i + 2 - 5i = 5 - i$;

(b) $z_1 - z_2 = 3 + 4i - (2 - 5i) = 1 + 9i$;

(c) $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i) \cdot (2 - 5i) = 6 - 15i + 8i - 20i^2 = 6 - 7i - (-20) = 26 - 7i$;

(d) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2 - 5i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{(2 - 5i)(3 - 4i)}{9 + 16} = \frac{6 - 8i - 15i + 20i^2}{25} = \frac{-14 - 23i}{25} = -\frac{14}{25} - \frac{23}{25}i$;
te je $\mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{14}{25}$, $\mathrm{Im}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{23}{25}$;

(e) $\frac{\overline{z}_1}{z_1 + \overline{z}_2} = \frac{3 - 4i}{3 + 4i + 2 + 5i} = \frac{3 - 4i}{5 + 9i} \cdot \frac{5 - 9i}{5 - 9i} = \frac{15 - 27i - 20i + 36i^2}{25 + 81} = \frac{-21 - 47i}{106}$.

Primjer 3.2.

Odrediti x i y iz jednakosti $z + 3x - 2\overline{z} = 2 + 3i$.

Rješenje: Iz $z = x + yi$ i $\overline{z} = x - yi$, dobijamo

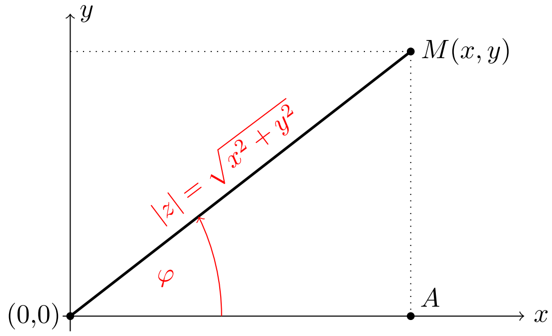
$$x + yi + 3x - 2(x - yi) = 2 + 3i \iff 2x + 3yi = 2 + 3i,$$

sada iz jednakosti dobijamo $2x = 2 \iff x = 1$ i $3y = 3 \iff y = 1$.

3.3 Geometrijska interpretacija kompleksnog broja

Kompleksan broj z možemo intrepretirati kao tačku u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu u ravni. Svakom kompleksnom broju z obostrano–jednoznačno ćemo pridružiti tačku u xOy ravni. Ova ravan je Gaußova[1] ili kompleksna ravan. Na x–osu nanosimo realni dio kompleksnog broja z i zovemo je realna osa, dok na y–osu nanosimo imaginarni dio kompleksnog broja i zovemo je imaginarna osa.

[1] Johann Carl Friedrich Gauß (30. april 1777.–23. februar 1855.godine) bio je njemački matematičar koji je dao doprinos u mnogim oblastima matematike, kao npr. teorija brojeva, algebra, statistika, analiza, diferencijalna geometrija i dr.



Slika 3.1: Predstavljanje tačke $M(x,y)$ u Gaußovoj ravni

Posmatrajmo proizvoljan kompleksni broj $z = x + yi$ predstavljen na Slici 3.1 tačkom $M(x,y)$. Funkcija $|\cdot| : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definisana sa

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2+y^2}}$$

je modul kompleksnog broja $|z|$ (ili ρ). Kako je $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$, to je $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$. Geometrijski modul $|z|$ kompleksnog broja z predstavlja rastojanje tačke $M(x,y)$ od koordinatnog početka $(0,0)$.

Posmatrajmo funkciju $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto (-\pi, \pi]$ definisanu sa

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0 \wedge y \geqslant 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0 \wedge y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y < 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

gdje je $z = x + yi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Broj $\arg z$ je glavna vrijednost ili glavni argument kompleksnog broja z.

Napomena 3.3.

Argument kompleksnog broja $\arg z$ u zadacima označavaćemo sa φ i predstavlja vrijednost ugla, čiji je jedan krak pozitivna realna osa a drugi krak je poluprava koja polazi iz koordinatnog početka i prolazi kroz tačku $M(x,y)$ (Slika 3.1).

Primjer 3.3 (Praktično određivanje ugla φ).

Odrediti vrijednost modula $|z|$ i argumenta $\arg z$, tj. φ, kompleksnog broja $|z|$, ako je (a) $z = 4\sqrt{3} + 4i$; (b) $z = -4\sqrt{3} + 4i$; (c) $z = -4\sqrt{3} - 4i$; (d) $z = 4\sqrt{3} - 4i$; (e) $z = 4\sqrt{3}$; (f) $z = 4i$; (g) $z = -4\sqrt{3}$; (h) $z = -4i$.

Rješenje:

Vrijedi (vidi Sliku 3.2)

(a) $x = 4\sqrt{3}$, $y = 4$, pa je $|z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$, dok je $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, Slika 3.2 gore desno.

(b) $x = -4\sqrt{3}$, $y = 4$, Slika 3.2 gore lijevo, $|z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$, sa slike je $\varphi = \pi - \alpha$, iz trougla $\triangle AOB$ je $\alpha = \operatorname{arcctg} \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, pa je na kraju $\varphi = \frac{5\pi}{6}$;

(c) $x = -4\sqrt{3}, y = -4$, sa Slike 3.2 dole lijevo je $\varphi = \pi + \alpha$, dok je $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, te je $\varphi = \frac{7\pi}{6}$;

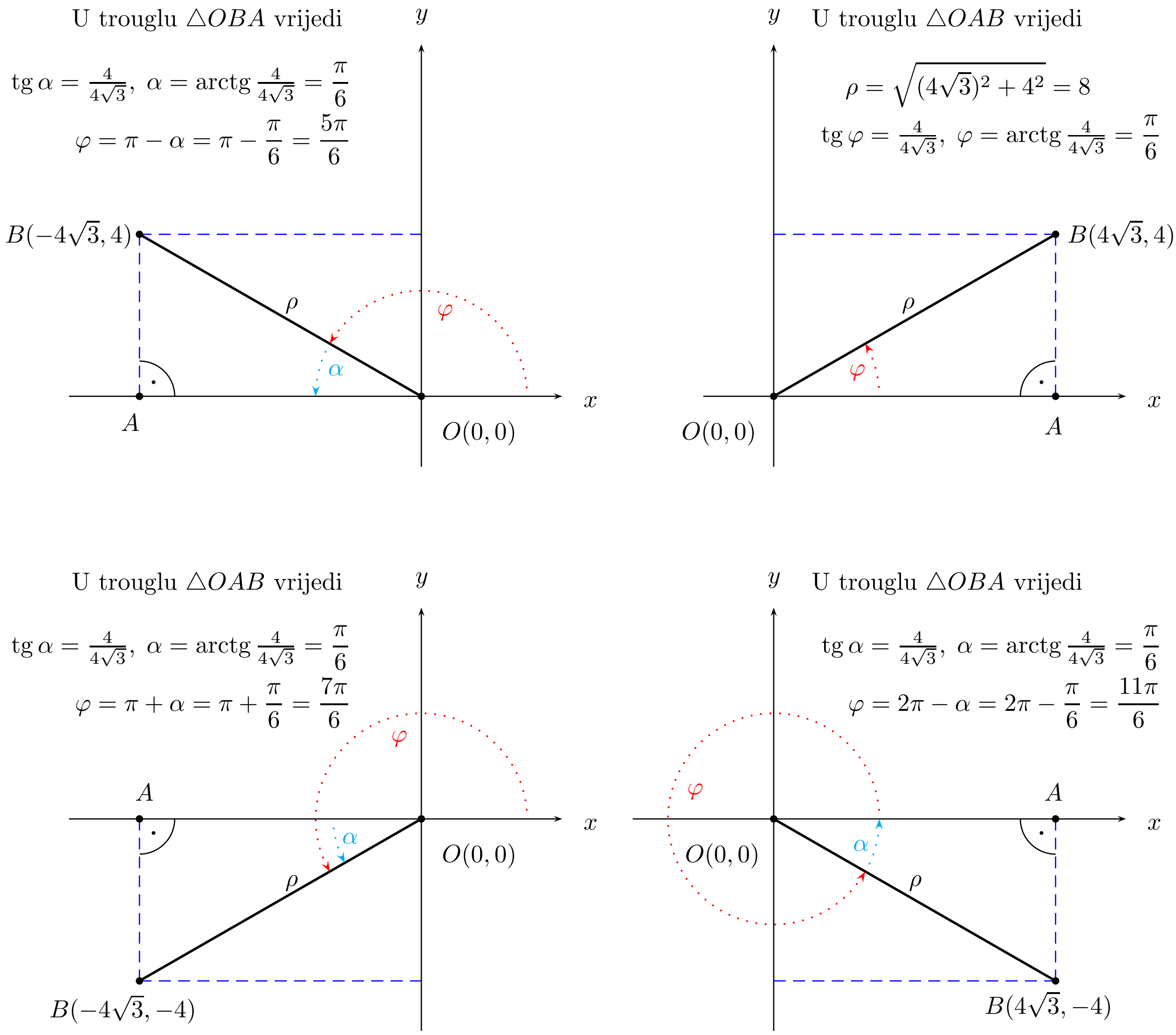
(d) $x = 4\sqrt{3}$, $y = -4$, sa Slike 3.2 dole desno je $\varphi = 2\pi - \alpha$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{11\pi}{6}$;

(e) $x = 4\sqrt{3}$, $y = 0$, $|z| = 4\sqrt{3}$, $\varphi = 0$;

(f) $x = 0,\ y = 4i,\ |z| = 4,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$;

(g) $x = -4\sqrt{3},\ y = 0,\ |z| = 4\sqrt{3},\ \varphi = \pi$;

(h) $x = 0,\ y = -4i,\ |z| = 4,\ \varphi = \frac{3\pi}{2}$.



Slika 3.2: Određivanje ugla

3.4 Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Za $z = x + yi,\ \rho = |z|, \theta = \arg z$ sa Slike 3.1 iz trougla $\triangle OAM$ vrijedi

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0.$$

Ako je $x = 0,\ y > 0$, tada je $\arg z = \frac{\pi}{2}$, odnosno za $x = 0,\ y < 0$, je $\arg z = -\frac{\pi}{2}$. Sada dobijamo trigonometrijski oblik kompleksnog broja $z = x + yi$

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta.)}$$

3.4.1 Množenje i dijeljenje kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku

Neka su data dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ i $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Vrijedi

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)] \cdot [\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)] \\ &= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i(\sin(\theta_1+\theta_2))]. \end{aligned}$$

Množenje dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku vršimo po formuli

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} \cdot \frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]. \end{aligned}$$

Dijeljenje dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku vršimo po formuli

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]}$$

PRIMJER 3.4.

Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 8(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$, $z_3 = 2(\cos 121^0 + i\sin 121^0)$, $z_4 = \cos 14^0 + i\sin 14^0$. Izračunati $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3 \cdot z_4}$.

Rješenje:

Vidi Sliku 3.3, prvo prevedemo z_1 u trigonometrijski oblik kompleksnog broja, sa Slike 3.3 je $z_1 = \sqrt{2}(\cos 45^0 + i\sin 45^0)$, pa je sada

$$\begin{aligned} \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3 \cdot z_4} &= \frac{\sqrt{2}(\cos 45^0 + i\sin 45^0) \cdot 8(\cos 150^0 + i\sin 150^0)}{2(\cos 121^0 + i\sin 121^0) \cdot (\cos 14^0 + i\sin 14^0)} \\ &= \frac{8\sqrt{2}(\cos 195^0 + i\sin 195^0)}{2(\cos 135^0 + i\sin 135^0)} = 4\sqrt{2}[\cos(195^0 - 135^0) + i\sin(195^0 - 135^0)] \\ &= 4\sqrt{2}(\cos 60^0 + i\sin 60^0). \end{aligned}$$

Rezultat možemo napisati i u algebarskom obliku kompleksnog broja

$$\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3 \cdot z_4} = 4\sqrt{2}(\cos 60^0 + i\sin 60^0) = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}i.$$

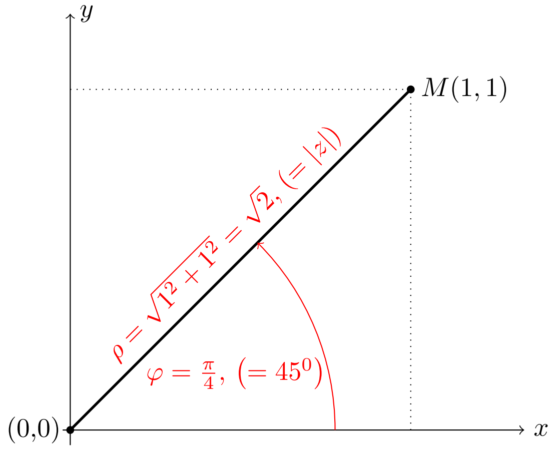
3.4.2 Eksponencijalni kompleksnog broja

Ako uvedemo oznaku $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, kompleksni broj $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ možemo pisati u obliku

$$\boxed{z = \rho e^{\theta i}}$$

ovaj oblik zovemo eksponencijalni ili Eulerov[2] oblik kompleksnog broja.

[2] Leonhard Euler (15. april 1707.–18. septembar 1783. godine) bio je švajcarski matematičar, fizičar, astronom, logičar, inžinjer. Dao veliki doprinos u mnogim oblastima matematike.



Slika 3.3: Kompleksni broj $z_1 = 1 + i$ u Gaußovoj ravni

Vrijedi

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{\theta_1 i} \cdot \rho_2 e^{\theta_2 i} = \rho_1 \rho_2 e^{(\theta_1+\theta_2)i}$$

i

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{\theta_1 i}}{\rho_2 e^{\theta_2 i}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{(\theta_1-\theta_2)i}.$$

3.4.3 Stepenovanje kompleksnog broja

Neka je $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Na osnovu matematičke indukcije[3] slijedi

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \ldots \cdot \rho_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)].$$

Ako je $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$, onda je $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n$ i $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n$, dobijamo

$$\boxed{z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

ili u eksponencijalnom obliku

$$\boxed{z^n = \rho^n e^{n\theta i}}$$

Moivreov (Moavrov) obrazac (ili formula)

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.}$$

3.4.4 Korjenovanje kompleksnog broja

Neka je data jednačina

$$z^n = u,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$, a u je kompleksan broj različit od nule. Tada pišemo

$$z = \sqrt[n]{u}.$$

Potrebno je za broj u odrediti kompleksni broj z. Neka je $u = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Tada je $(\rho(\cos\theta + i\sin\theta))^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, pa na osnovu jednakosti kompleksnih brojeva $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, odakle je

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

[3]Princip matematičke indukcije: Jedan iskaz $P(n)$ istinit je za svaki prirodan brod n, 1) Ako je istinit za prirodan broj 1; 2) Ako implikacija $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ važi za svaki prirodan broj n.

Međutim, različite vrijednosti cijelih brojeva ne daju u suštini različite argumente. Ako uzmemo da je $k = n$ biće $\frac{\varphi+2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$, ista se vrijednost dobije za $k = 0$. Slično, dobijamo da je $\frac{\varphi+2(n+k)\pi}{n} = \frac{\varphi+2k\pi}{n} + 2\pi$. Dakle, poslije n uzastopnih cijelih brojeva kompleksni brojevi se ponavljaju, pa imao n različitih vrijednosti $\sqrt[n]{u}$, a to su

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k = 0,\dots,n-1}$$

ili u eksponencijalnom obliku

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{r}e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\ k = 0,\dots,n-1.}$$

Sva ova rješenja leže na kružnici poluprečnika $\sqrt[n]{r}$ i čine tjemena pravilnog n–to ugla, čije je jedno tjeme (z_0) sa argumentom $\frac{\varphi}{n}$, a za svako sljedeće tjeme argument se povećava za $\frac{2\pi}{n}$.

Primjer 3.5.

Dat je kompleksni broj $z = i^{81} + i^{43} + \frac{(-1-i)^{80}}{2^{40}} + i^{19}$. Izračunati $\sqrt[3]{z}$.

Rješenje:

Izračunajmo prvo $\frac{(-1-i)^{80}}{2^{40}}$, prevedemo ovaj kompleksni broj u trigonometrijski oblik, sa Slike 5.1a je

$$\begin{aligned}\frac{(-1-i)^{80}}{2^{40}} &= \frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^{80}}{2^{40}}\\ &= \frac{2^{40}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\cdot 80\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\cdot 80\right)\right]}{2^{40}} = \cos 100\pi + i\sin 100\pi = 1,\end{aligned}$$

pa je sada

$$z = i^{81} + i^{43} + \frac{(-1-i)^{80}}{2^{40}} + i^{19} = i^{4\cdot 20+1} + i^{4\cdot 10+3} + 1 + i^{4\cdot 4+3} = 1 - i.$$

Koristeći Sliku 5.1b pretvorimo kompleksni broj iz algebarskog u trigonometrijski oblik, i dobijamo

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

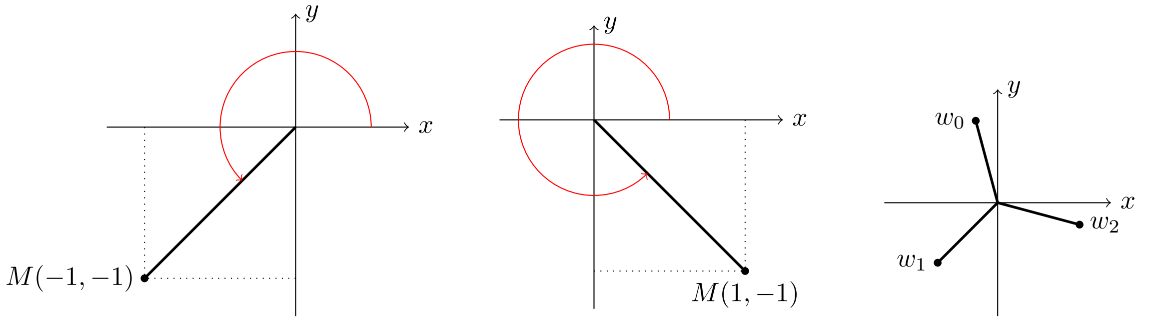
Sada je

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}\right),$$

te rješenja w_0, w_1 i w_2 dobijamo uvrštavajući $k = 0, 1, 2$ u prethodnu jednakost, pa vrijedi

$$\begin{aligned} k &= 0\\ w_0 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right),\\ k &= 1\\ w_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right),\\ k &= 2\\ w_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right).\end{aligned}$$

Rješenja su predstavljena na Slici 5.1c.



(a) Kompleksni broj $z = -1 - i$ (b) Kompleksni broj $z = 1 - i$ (c) Rješenje jednačine $\sqrt[3]{z}$

Slika 3.4: Gaußova ravan u kojoj su predstavljeni kompleksni brojevi $-1-i$, $1-i$, w_0, w_1 i w_2

3.5 Zadaci za vježbu

1. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 2i$. Izračunati
   (a) $z_1 + z_2$, (b) $z_1 - z_2$, (c) $z_1 \cdot z_2$, (d) $\frac{z_1}{z_2}$, (e) $|z_1|$, (f) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$, (g) $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$, (h) $\mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.
2. Izračunati
   (a) $i^{25} + (-i)^{50} + i^{40} + i^{62} + i^{83}$, (b) $\dfrac{1+3i}{(-1+i)^2} + \dfrac{(-4+i)(-4-i)}{1+i}$, (c) Za $z = 1 - 3i$, $\dfrac{2z - 2z\overline{z}}{z\overline{z} + i}$.
3. Izračunati
   (a) x i y iz jednačine $3x + xi - 2y = 12 - yi - i$, (b) z iz uslova $(2+i)z + 2z - 3 = 4 - 6i$.
4. Odrediti kompleksan broj z iz uslova $|z-4| = |z-2| \wedge |z-3| = |z-2i|$.
5. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i$, $z_2 = -6\sqrt{3} - 6i$, $z_3 - 5 + 5i$.

   (a) Pretvoriti date kompleksne brojeve iz algebarskog u trigonometrijski oblik;
   (b) Izračunati $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$;
   (c) Izračunati $\dfrac{z_3^{40} \cdot z_2^{60}}{z_2^{30}}$.
6. Kompleksni broj $z = \frac{1+4i+i^{29}}{2-3i}$ napisati u trigonometrijskom obliku;
7. Izračunati
   (a) $\sqrt[3]{-3-\sqrt{3}i}$, (b) $\sqrt[4]{3-3\sqrt{3}i}$, (c) z ako je $z^3 = 2 - 2\sqrt{3}i$.
8. Izračunati kompleksan broj z iz uslova $\mathrm{Re}\left(\frac{z-\overline{z}}{2}\right) + 10i\,\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}-1}{3+i}\right) = x + 1 + 2i$, a zatim izračunati $\sqrt{z}$.
9. Riješiti jednačinu $z^3 + 2 + 2i = 0$.
10. Zadaci za vježbu [4]

    (a) Riješiti jednačinu $z^5 - \sqrt{3} + i = 0$.
    (b) Dat je kompleksan broj $z = 4\sqrt{3} - 12i$, izračunati $\sqrt[4]{z}$.
    (c) Dat je kompleksan broj $z = 6 - 2\sqrt{3}i$, izračunati $\sqrt[4]{z}$.
    (d) Riješiti jednačinu $z^5 - \sqrt{3} + i = 0$.
    (e) Ako je $z = 5 - 5\sqrt{3}i$, odrediti z^5 i $\sqrt[3]{z}$.
    (f) Riješiti jednačinu u skupu racionalnih brojeva $4z^3 + 7\sqrt{3}i = 7$.
    (g) U skupu kompleksnih brojeva riješiti jednačinu $z^4 - 3\sqrt{3} = -3i$.
    (h) U skupu kompleksnih brojeva riješiti jednačinu $z^4 + 2i = \sqrt{3} - i$.
    (i) Riješiti jednačinu $z = \sqrt{\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}}$.

[4] Malo teži zadaci

(j) Riješiti jednačinu $z = \sqrt[3]{\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}}$.

(k) U skupu kompleksnih brojeva riješiti jednačinu $\sqrt{2}z^3 + 2i = 3i + 1$.

(l) Izračunati kompleksan broj z iz uslova $i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{z}+2}{1+i}\right) + \mathrm{Im}\left(\frac{2\overline{z}+z}{2}\right) + z = 1 + 3i$,

(m) Izračunati kompleksan broj z iz uslova $\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{z}}{z_1}\right) = \frac{2-3\sqrt{3}}{13}$ i $\mathrm{Im}\left(\frac{z\cdot z_1}{2}\right) = \frac{-3-2\sqrt{2}}{2}$, gdje je $z_1 = 2 - 3i$, a zatim izračunati z^{12}.

(n) Izračunati kompleksan broj z iz uslova $\left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right| = \dfrac{5}{3}$ i $\left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| = 1$.

(o) Izračunati z i $\sqrt[3]{z}$ ako je $|z-2| + \overline{z}\,\mathrm{Re}(2z) + z^2 - 4z = 4i$.

(p) Izračunati z^{50} ako je $2\overline{z} - i\,\mathrm{Re}\left(z + \frac{1}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} - i$.

(q) Izračunati $\sqrt{z}$ ako je $\frac{2}{i}\left(z(2-i) + \frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{2}\right) = -3(1 + 2\sqrt{3} + 2i)$.

(r) Pokazati da $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z} - \frac{2}{3}\right) = 0$ predstavlja jednačinu kružnice.

Poglavlje 4

Matrice i determinante

4.1 Osnovni pojmovi o matricama

Prelazak promjenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na nove promjenljive $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pomoću formula

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n,\ a_{ij} \in \mathbb{C},\ i,j = 1,\ldots,n \end{aligned} \tag{4.1}$$

zove se linearna transformacija promjenljivih $x_1, \ldots, x_n$ u $y_1, \ldots, y_n$. Koeficijente promjenljivih $x_1, \ldots, x_n$ možemo izdvojiti i staviti ih u sljedeću shemu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Ovu shemu (4.2) zovemo matrica (ili matrica linearne transformacije).

- Koeficijenti a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, su elementni matrice.
- Elementi $a_{i1}, \ldots, a_{in}$, $i = 1, \ldots, n$, čine i–tu vrstu matrice.
- Elementi $a_{1j}, \ldots, a_{nj}$, $j = 1, \ldots, n$, čine j–tu vrstu matrice.
- Elementi $a_{11}, \ldots, a_{nn}$, čine glavnu dijagonalu matrice.
- Elementi a_{1n}, $a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$, čine sporednu dijagonalu matrice.
- Matricu kraće zapisujemo $A = (a_{ij})$.

Matrica kod koje je jednak broj vrsta i kolona, kao kod matrice A iz (4.2), zovemo kvadratna matrica. U slučaju da broj kolona i vrsta nije jednak dobijamo pravougaonu matricu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Za matricu koja ima m vrsta i n kolona, kažemo da je tipa, ili formata, ili dimenzije $m \times n$ ili jednostavno matrica $m \times n$, i pišemo

$$\boxed{A_{m \times n}.}$$

Matrica formata $1 \times n$ je takođe matrica formata $m \times n$, tj. $m = 1$,

$$(a_1\ a_2\ \ldots\ a_n),$$

ovo je matrica vrsta. Na isti način rezonujemo za format $n \times 1$, sada je $n = 1$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ovo je matrica kolona. U slučaju matrice kolone i matrice vrste, obično se ne piše drugi indeks elementa. Matrice kolone i matrice vrste nazivaju se i vektori. U slučaju $m = n = 1$ dobijamo matricu sa samo jednim elementom (a_1). Skup svih vektora tipa $n \times 1$ sa realnim odnosno kompleksnim elementima obilježava se sa $\mathbb{R}^n$ odnosno sa $\mathbb{C}^n$, respektivno.

Primjer 4.1.

Date su matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matrice A i C su pravougaone, formata 2×4, 3×2, respektivo, dok je matrica B kvadratna matrica, formata 3×3. Prethodno možemo zapisati: $A_{2\times4}$, $B_{3\times3}$, $C_{3\times2}$.

Jednakost matrica

Definicija 4.1.

Dvije matrice jednake su ako su istog formata i ako su im odgovarajući elementi jednaki.

Drugim riječima, matrica $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ formata $m \times n$ su jednake ako je ispunjeno $m \times n$ uslova

$$a_{ij} = b_{ij}, \; i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Primjer 4.2.

Date su matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \, D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Samo su matrice A i D jednake, tj. $A = D$.

4.1.1 Operacije sa matricama

Sabiranje matrica

Definicija 4.2.

Zbir matrica $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$, formata $m \times n$, u oznaci $A + B$ je matrica $C = (c_{ij})$, formata $m \times n$, gdje je $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Drugim riječima, matrice sabiramo ako su istog formata i to radimo tako što im sabiramo elemente na istim pozicijama. Analogno se vrši i oduzimanje, tj. $C = A - B$ vršimo tako što od elementa a_{ij} matrice A oduzimamo odgovarajući element matrice B, $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Množenje matrice brojem

DEFINICIJA 4.3.

Proizvod matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i broja α definiše se sa

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ & \vdots & & \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Pomnožiti matricu A sa brojem α, znači svaki element matrice a_{ij} pomnožiti sa brojem α.

PRIMJER 4.3.

Date su matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Izračunati

(a) $A + B$;

(b) $C - A$;

(c) $2A - 3B + 4C$.

Rješenje:

Vrijedi

(a) $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 1-1 & 2-5 & 0+0 \\ 3-0 & 1-1 & 2+2 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $C-A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 & 0-1 & 2-2 & 0-0 \\ 3-3 & 1-1 & 2-2 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(c)

$$\begin{aligned}
&2A - 3B + 4C = \\
&= 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3\cdot 3 & 3\cdot(-1) & 3\cdot(-5) & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\cdot(-2) & 4\cdot 0 & 4\cdot 2 & 4\cdot 0 \\ 4\cdot 3 & 4\cdot 1 & 4\cdot 2 & 4\cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -3 & -15 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 0 & 8 & 0 \\ 12 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4-9-8 & 2+3+0 & 4+15+8 & 0+0+0 \\ 6-0+12 & 2+3+4 & 4-6+8 & 2-3+4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -13 & 5 & 27 & 0 \\ 18 & 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Teorema 4.1.

Množenje matrice brojem ima osobine

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;
2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$;
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
4. $1 \cdot A = A$; .

gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *i* A, B *su matrice istog formata.*

Množenje matrica

Definicija 4.4.

Proizvod matrica $A = (a_{ij})_{m\times n}$ i $B = (b_{jk})_{n\times p}$, u oznaci $A \cdot B$ ili AB, je matrica

$$C = (c_{ik})_{m\times p} = \left(\sum_{j=i}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)_{m\times p}.$$

Dakle, element c_{ik} matrice C dobijamo na taj način što se elementi i–te vrste matrice A

$$(a_{i1}\, a_{i2}\, \dots\, a_{in})$$

pomnože sa odgovarajućim elementima k–kolone matrice B

$$\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

i dobijeni proizvodi se saberu. Množenje matrice u opštem slučaju nije komutativna operacija, sama za neke matrice vrijedi ova osobina.

Definicija 4.5.

Ako je $AB = BA$, matrice A i B zovu se komutativne matrice.

Teorema 4.2.

Množenje matrica ima osobine

1. $(AB)C = A(BC)$ *(asocijativnost);*
2. $(A+B)C = AC + BC$ *(distributivnost);*
3. $A(B+C) = AB + AC$ *(distributivnost).*

Primjer 4.4.

Date su matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Izračunati (a) AB; (b) BA; (c) AC; (d) DB.

Rješenje:

Vrijedi

$$(a)\ AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 1\cdot 0 - 2\cdot(-1) & 3\cdot 1 + 1\cdot 4 - 2\cdot 0 \\ 0\cdot 2 + 2\cdot 0 + 0\cdot(-1) & 0\cdot 1 + 2\cdot 4 + 0\cdot 0 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$(b)\ BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(c)\ AC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(d)\ DB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (4,\ 5)$$

4.1.2 Trougaona, dijagonalna, skalarna, jedinična i transponovana matrica

Definicija 4.6 (Trougaone matrice).

Kvadratne matrice oblika

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

zovu se donja i gornja trougaona matrica, respektivno.

Primjer 4.5.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

matrica A je donja trougaona, a matrica B je gornja trougaona.

Definicija 4.7 (Dijagonalna matrica).

Kvadratna matrica, čiji su svi elementi van glavne dijagonale nule zove se dijagonalna matrica, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

PRIMJER 4.6.

Matrica

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

je dijagonalna matrica.

DEFINICIJA 4.8 (Skalarna matrica).

Dijagonalna matrica čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki zove se skalarna matrica.

DEFINICIJA 4.9 (Jedinična matrica).

Dijagonalna matrica čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jedinice, zove se jedinična matrica i obilježava se sa I (ili E).

PRIMJER 4.7.

Matrica

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

je skalarna matrica, dok je matrica

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jedinična matrica.

DEFINICIJA 4.10 (Transponovana matrica).

Transponovana matrica, matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

je matrica

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(i–ta vrsta u A postaje i-ta kolona u A^T).

TEOREMA 4.3.

Operacija transponovanja ima osobine

1. $\left(A^T\right)^T = A$;

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$;
5. $(A_1 A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T \cdots A_2^T A_1^T$.

PRIMJER 4.8.

Date su matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Odrediti A^T i B^T.

Rješenje:

$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ i $B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Zadaci za vježbu

1. Date su matrice
$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$E = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ i $F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.
Izračunati
(a) $A + B$; (b) $2A + 3B$; (c) $3A - B$; (d) $A \cdot B$; (e) $B \cdot A$; (f) $C \cdot D$; (g) $D \cdot C$; (h) $E \cdot F$; (i) $F \cdot E$.

2. Date su matrice
$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -9 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -9 & 6 \\ -3 & -2 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 10 \\ 5 & 9 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.
Izračunati
(a) $A \cdot B$; (b) $B \cdot A$; (c) $C \cdot D$; (d) $D \cdot C$.

3. Date su matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Izračunati
(a) $2A$; (b) $A + B$; (c) $B - C$; (d) $A^2 - 3AB^T + 4C - 2I$; (e) $B^2C^T - 2A + B$.

4. Izračunati $AB - 2A + B$ ako je $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Izračunati $A^2 - 3B$ ako je $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

4.2 Determinante

Posmatrajmo sistem od dvije linearne algebarske jednačine

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2. \end{aligned}$$

Rješenja možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ y &= \frac{a_{11}b_1 - a_{21}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \end{aligned}$$

za $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. Koeficijente koji se nalaze u nazivniku možemo izdvojiti u kvadratnu matricu drugog reda

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

ovoj matrici možemo pridružiti broj $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ili zapisan u obliku kvadratne sheme

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Na sličan način kvadratnoj matrici $A = (a_{ij})$ reda n možemo pridružiti broj ili odgovarajući izraz, kao što je urađeno u sljedećoj definiciji.

Definicija 4.11.

Neka je data kvadratna matrica $A = (a_{ij})$ reda n, čiji su elementi a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ realni ili kompleksni brojevi. Pod determinantnom matrice A podrazumijeva se zbir svih proizvoda oblika

$$(-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n},$$

gdje je k broj svih inverzija u permutaciji koju obrazuju indeksi k_1, $k_2, \ldots, k_n$ od brojeva 1, 2 $\ldots, n$, dok je broj sabiraka jednak broju svih permutacija koje obrazuju indeksi, tj. broj sabiraka iznosi $n!$.

Determinanta matrice A (determinanta n–tog reda) obilježava se kratko sa $\det A$ ili sa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Napomena 4.1.

U literaturi su dostupne i definicije koje su praktičnije sa stanovišta samog računanja vrijednosti determinante. Jedna takva definicija biće u nastavku ove sekcije navedena.

4.2.1 Osobine determinanti

Neka su date kvadratne matrice $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ proizvoljnog reda. Za determinante $\det A$ i $\det B$ vrijede sljedeće osobine

1. $\det A = \det A^T$;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \text{ vidimo da je } \det A = \det A^T.$$

2. Ako su u determinanti $\det A$ elementi jedne vrste (ili kolone) jednaki sa elementima druge vrste (ili kolone), tada je $\det A = 0$;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0;$$

3. Determinanta $\det A$ pomnoži se sa brojem λ tako što se svaki element samo jedne vrste ili kolone te determinante pomnoži sa tim brojem;

$$-5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 \cdot 1 & -5 \cdot 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \cdot \begin{vmatrix} -5 \cdot 1 & 2 \\ -5 \cdot 3 & 4 \end{vmatrix} = 10;$$

4. Ako su elementi jedne vrste (ili kolone) u determinanti $\det A$ proporcionalni elementima druge vrste (ili kolone), tada je $\det A = 0$;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0;$$

5. Ako svaki element k–te vrste determinante $\det A$ zbir dva broja (tj. $a_{kj} = a_{kj}^{(1)} + a_{kj}^{(2)}$), onda je determinanta $\det A$ jednaka zbiru dvije determinante, istog reda pri čemu su elementi k-te vrste u jednoj determinanti prvi sabirci ($a_{kj}^{(1)}$), a elementi k-te vrste druge determinante drugi sabirci ($a_{kj}^{(2)}$). Ostali elementi u obje determinante jednaki su odgovarajućim elementima determinante $\det A$ (ista osobina vrijedi i za kolone);

$$\det A = \begin{vmatrix} 2+3 & 2 \\ 1+2 & 4 \end{vmatrix} = 14$$

$$\det A^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6$$

$$\det A^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8.$$

Vidimo da je $\det A = \det A^{(1)} + \det A^{(2)}$.

6. Determinanta ne mijenja vrijednost ako se elementima jedne vrste (ili kolone) dodaju odgovarajući elementi druge vrste (ili kolone) pomnoženi istim brojem;

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 14$$

$$\begin{vmatrix} 5+3 \cdot 2 & 2 \\ 3+3 \cdot 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 15 & 4 \end{vmatrix} = 44 - 30 = 14.$$

7. Ako u determinanti $\det A$ dvije vrste (ili kolone) međusobno promijene mjesta determinanta $\det A$ mijenja znak;

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 14$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 20 = -14.$$

8. $\det(AB) = \det A \det B$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15$$

$$\det AB = \begin{vmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -20 \end{vmatrix} = -90.$$

Vidimo da je $\det(AB) = \det A \det B$.

4.2.2 Računanje determinanti

Za računanje determinanti drugog i trećeg reda koristimo sljedeće formule

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

Primjer 4.9.

Date su determinata

1. $\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 - (-4 \cdot 3) = 28 + 12 = 40;$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 6 \cdot (-1) - (0 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 6 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot (-2)) = -86.$

Razvijanje determinante po elementima neke vrste ili kolone Posmatrajmo ponovo kvadratnu matricu $A = (a_{ij})$ reda n. Njena determinanta je

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definicija 4.12 (Minor).

Determinanta koja se dobije iz $\det A$ odbacivanjem i–te vrste i j–te kolone, naziva se minor elementa a_{ij} i obilježava se sa M_{ij}.

Definicija 4.13 (Algebarski kofaktor).

Broj $(-1)^{i+j}M_{ij}$ naziva se algebarski komplement (ili kofaktor) elementa a_{ij} i označava se sa A_{ij}.

Sljedeća teorema daje pravilo razlaganja determinante po elementima proizvoljne vrste ili kolone

Teorema 4.4.

Ako je $\det A$ *reda* n, *onda je*

- $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$,
- $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$,

za $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Primjer 4.10.

Determinatu

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix},$$

razviti po elementima druge vrste i prve kolone.

Rješenje:

Razvoj po elementima druge vrste

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= -1(-4+6) + 2(-6) - 4(18) = -86.$$

Razvoj po elementima prva kolone

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 3(-4-24) - (-4+6) = -86.$$

U posljednjem primjeru vidimo da je korisno ako je neki element u vrsti ili koloni, po kojoj vršimo razvoj, jednak nuli. Ovo će biti iskorišteno u sljedećem primjeru

Primjer 4.11.

Izračunati vrijednost determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

Rješenje:

Da bi pojednostavili razvijanje determinante, od prve kolone oduzmimo treću kolonu prethodno pomnoženu sa 2, te od četvrte kolone oduzmino drugu kolonu, vrijedi

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{I kol-2×III kol}}{=} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{IV kol-II kol}}{=} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Razvijmo sada determinatnu po elementima prve kolone

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Razvijmo posljednju determinantu po elementima treće kolone

$$-2\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2(-6-2) = 16.$$

Primjer 4.12.

Dokazati

$$\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = a(x-y)(x-z)(z-y).$$

Rješenje:

$$\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{IIv-Iv} \\ \text{IIIv-Iv} \end{matrix} = \begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ a(y-x) & (y-x)(y+x) & 0 \\ a(z-x) & (z-x)(z+x) & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{izvučemo } a \text{ iz Ik} \\ \text{izvučemo zajednički faktor } y-x \\ \text{izvučemo zajednički faktor } z-x \end{matrix}$$

$$= a(y-x)(z-x) \begin{vmatrix} x & a^2+x^2 & 1 \\ 1 & y+x & 0 \\ 1 & z+x & 0 \end{vmatrix} \text{ razvijemo determinantu po elementima IIIk}$$

$$= a(y-x)(z-x) \cdot 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & y+x \\ 1 & z+x \end{vmatrix} = a(y-x)(z-x)[z+x-(y+x)]$$

$$= a(y-x)(z-x)(z-y) = a[-(x-y)][-(x-z)](z-y)$$
$$= a(x-y)(x-z)(z-y).$$

Primjer 4.13.

Dokazati

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{vmatrix} = -8abcd.$$

Rješenje:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{izvučemo } a \text{ iz Ik} \\ \text{izvučemo } b \text{ iz IIk} \\ \text{izvučemo } c \text{ iz IIIk} \\ \text{izvučemo } d \text{ iz IVk} \end{matrix} = abcd \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ IIv+Iv}$$

$$= abcd \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ razvijemo determinantu po elementima IIv}$$

$$= abcd \cdot 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ IIv+Iv}$$

$$= -2abcd \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ razvijemo determinantu po elementima IIv}$$

$$= -2abcd \cdot 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4abcd(-1-1) = -8abcd.$$

Zadaci za vježbu

1. Izračunati vrijednost determinati

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 2+2i & 3-i \\ -3+4i & -1-i \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} \frac{x^2+1}{1-x^2} & \frac{2x}{1-x^2} \\ \frac{2x}{1-x^2} & \frac{x^2+1}{1-x^2} \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} \sin x + \sin y & \cos x + \cos y \\ \cos y - \cos x & \sin x - \sin y \end{vmatrix}$; (e) $\begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}$;

(f) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; (g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; (h) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$; (i) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

(j) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; (k) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$; (l) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

(m) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; (n) $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$.

2. Pokazati da je

(a) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+a^3 \\ 1 & a^2 & a^3+a \\ 1 & a^3 & a+a^2 \end{vmatrix} = 0$;

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = (1-a)(1-b)$; (d) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-c)(b-a)(a-c)$;

(e) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$; (f) $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = a(x-y)(x-z)(z-y)$;

(g) $\begin{vmatrix} 1 & bc & b+c \\ 1 & ac & a+c \\ 1 & ab & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$; (h) $\begin{vmatrix} a-b & 2a & 2a \\ 2b & b-a & 2b \\ a-b & 2a & a-b \end{vmatrix} = (a+b)^3$;

(i) $\begin{vmatrix} a+b & -a & -b \\ -b & b+c & -c \\ -a & -c & c+a \end{vmatrix} = 0$; (j) $\begin{vmatrix} -x & y & z & 1 \\ x & -y & z & 1 \\ x & y & -z & 1 \\ x & y & z & -1 \end{vmatrix} = -8xyz$;

(k) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{vmatrix} = -8abcd$; (l) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = -a(a-b)(c-b)(d-c)$.

3. Izračunati

(a) $\begin{vmatrix} a^{-4} & a^{-3} & a^{-2} \\ a^{-1} & 1 & a \\ a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix}$ $(=0)$; (b) $\begin{vmatrix} a & b & a & 1 \\ b & a & b & 1 \\ a & -a & b & 1 \\ b & -b & a & 1 \end{vmatrix}$ $(=2(a+b)(b-a)^2)$;

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$, ako je $z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$; (d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & z^2 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$, ako je $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$;

(e) $\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix}$; $(= 0)$ (f) $\begin{vmatrix} 1+\cos x & 1+\sin x & 1 \\ 1-\sin x & 1+\cos x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $(= 1)$.

4. Riješiti jednačine

(a) $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$; (b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$; (c) $\begin{vmatrix} \log_c x & \log_c x - n \\ \log_c x - m & \log_c x \end{vmatrix} = 0$, $(0 < c \neq 1)$;

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$; (e) $\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0$;

(f) $\begin{vmatrix} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) & \sin x & \cos x \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) & \cos x & \sin x \\ 1 & a & 1-a \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}-2}{4}$; (g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1-x^2 \end{vmatrix} = 0$.

5. Riješiti nejednačine

(a) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -6 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} \geqslant 0$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} \leqslant \begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix}$.

4.3 Inverzna matrica

DEFINICIJA 4.14 (Adjungovana matrica).

Neka je $A = (a_{ij})$ kvadratna matrica reda n, i A_{ij} je algebarski kofaktor elementa a_{ij}. Tada se matrica

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & \vdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

naziva adjungovana matrica matrice A. Determinanta matrice $\operatorname{adj} A$ zove se adjungovana determinanta determinante matrice A.

Vrijedi sljedeća teorema u kojoj su date neke osobine $\operatorname{adj} A$ i $\det(\operatorname{adj} A)$

TEOREMA 4.5.

Neka je A kvadratna matrica reda n, tada vrijedi

1 $A \cdot \operatorname{adj} A = (\operatorname{adj} A) \cdot A = (\det A) \cdot I$;

2 $\det A \cdot \det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^n$;

3 $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$.

PRIMJER 4.14.

Za date matrice odrediti adjungovane matrice

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Rješenje:

Računanje adjungovane matrice podijelićemo u dva koraka.

I korak: Izračunamo algebarske kofaktore A_{ij} i formiramo matricu kofaktora $\operatorname{cof} A$;

II korak: Zatim transponujemo matricu kofaktora $\operatorname{cof} A$ i dobijemo adjungovanu matricu $\operatorname{adj} A$ matrice A, tj. $\operatorname{adj} A = (\operatorname{cof} A)^T$.

(a) Izračunamo prvo kofaktore

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 6 = 6, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-5) = 5, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3$$

formiramo matricu kofaktora $\operatorname{cof} A$ i transponujemo je

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{adj} A = (\operatorname{cof} A)^T = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Ponovo izračunajmo prvo kofaktore

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -11, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Matrica kofaktora je

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -11 & 8 & 1 \\ 12 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

i na kraju adjungovana matrica

$$\operatorname{adj} A = (\operatorname{cof} A)^T = \begin{pmatrix} 5 & -11 & 12 \\ 1 & 8 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

DEFINICIJA 4.15 (Inverzna matrica).

Ako je A kvadratna matrica reda n i ako postoji matrica X takva da je $XA = AX = I$, kažemo da je X inverzna matrica matrice A. Inverznu matricu matrice A, označavamo sa A^{-1}.

DEFINICIJA 4.16 (Regularna i singularna matrica).

Kvadratna matrica A je regularna (nesingularna) matrica ako ima inverznu matricu. Ako kvadratna matrica A nema inverznu matricu, kažemo da je A singularna (neregularna) matrica.

TEOREMA 4.6.

Kvadratna matrica $A = (a_{ij})$ *je regularna ako i samo ako je* $\det A \neq 0$. *Ako je* $\det A \neq 0$, *inverzna matrica matrice* A *je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A.$$

TEOREMA 4.7.

Svaka regularna matrica A *ima jednu i samo jednu inverznu matricu* A^{-1}.

TEOREMA 4.8 (Osobine inverznih matrica).

Ako su A *i* B *regularne matrice istog reda, tada je*

(1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

(3) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$;

(4) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

PRIMJER 4.15.

Date su matrice

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

(d) $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ispitati jesu li date matrice regularne, ako jesu izračunati njihove inverzne matrice.

Rješenje:

Postupak računanja inverzne matrice matrice X, je sljedeći

I Izračunamo $\det X$; ako je $\det X \neq 0$ nastavljamo dalje i računamo

II Matricu $\operatorname{cof} X$, zatim $\operatorname{adj} X = (\operatorname{cof} X)^T$; i na kraju

III Inverznu matricu po formuli $X^{-1} = \frac{1}{\det X} \operatorname{adj} X$.

(a) Pošto je $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$, matrica A je singularna, tj. nema inverzne matrice.

(b) Kako je $\det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, matrica je regularna pa možemo računati inverznu matricu. Prvo izračunajmo kofaktore i matricu kofaktora

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1, \qquad B_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 0 = 0$$
$$B_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-3) = 3, \qquad B_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$$

formiramo matricu kofaktora $\operatorname{cof} B$ i transponujemo je

$$\operatorname{cof} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{adj} B = (\operatorname{cof} B)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pa je inverzna matrica

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \operatorname{adj} B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Kako je $\det C = -1$, matrica je regularna. Izračunajmo prvo kofaktore

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$
$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$
$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Matrica kofaktora je

$$\operatorname{cof} C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

adjungovana matrica

$$\operatorname{adj} C = (\operatorname{cof} C)^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

i na kraju inverzna matrica je

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \operatorname{adj} C = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Kako je $\det D = 0$, matrica je singularna.

Primjer 4.16.

Riješiti matričnu jednačinu $AX + B = 3X + I$, ako su

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rješenje:

Datu matričnu jednačinu možemo napisati u obliku

$$AX + B = 3X + I \Leftrightarrow Ax - 3X = I - B \Leftrightarrow (\underbrace{A - 3I}_{=C})X = \underbrace{I - B}_{=D} \Leftrightarrow CX = D,$$

(X izvlačimo sa desne strane) gdje je

$$C = A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$D = I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sada matričnu jednačinu $CX = D$, pomnožimo sa lijeve strane sa matricom C^{-1} i dobijamo

$$X = C^{-1}D,$$

tj. da bi izračunali nepoznatu matricu X treba još izračunati inverznu matricu matrice C i pomnožiti matricu D sa lijeve strane sa matricom C^{-1}. Vrijedi

$$\det C = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 12 = -15 \neq 0,$$

i

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 3 \qquad C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-4) = 4$$
$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-3) = 3 \qquad C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-1) = -1,$$

pa je

$$\operatorname{cof} C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{adj} C = (\operatorname{cof} C)^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$$
$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \operatorname{adj} C = \frac{1}{-15} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$
$$X = C^{-1}D = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{15} \end{pmatrix}.$$

Primjer 4.17.

Riješiti matričnu jednačinu $XA - A = 2X + I$, ako je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje:

Matričnu jednačinu napišimo u sljedećem obliku

$$XA - A = 2X + I \Leftrightarrow XA - 2X = I + A \Leftrightarrow X(\underbrace{A - 2I}_{=C}) = \underbrace{I + A}_{=D},$$

(X izvlačimo sa lijeve strane), gdje je

$$C = A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sada matričnu jednačinu $XC = D$ pomnožimo sa desne strane inverznom matricom C^{-1} matrice C i dobijamo

$$X = DC^{-1}.$$

Vrijednost $\det C$ je

$$\det C = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

matrica C je regularna pa izračunajmo matricu kofaktora i adjungovanu matricu

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6, \quad C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$
$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$
$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Matrica kofaktora je

$$\operatorname{cof} C = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 12 & -4 \end{pmatrix},$$

adjungovana matrica

$$\operatorname{adj} C = (\operatorname{cof} C)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

inverzna matrica je

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\operatorname{adj} C = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Sada je

$$X = DC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 18 & 6 & 36 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Zadaci za vježbu

1. Odrediti inverzne matrice
(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Riješiti matrične jednačine
(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

3. $(I - 2A)X = B$, ako je $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

5. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

4.4 Rang matrice

Posmatrajmo sljedeće jednakosti

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},$$

i

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\alpha_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Postavlja se pitanje kolika je vrijednost α_1, α_2, α_3 tako da rezultantna matrica kolona (na lijevoj strani jednakosti) bude jednaka nuli? U prvom slučaju zbir će biti jedino nula ako je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, dok u drugom slučaju vrijednost zbira (rezultantnog vektora) može biti jednaka nuli i npr. kada je $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -1$. Drugim riječima, u drugom slučaju matrice kolone mogu se medjusobno anulirati, dok u prvom slučaju to nije slučaj, tj. moguće je jedino za $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Ovo nam daje opravdanje za uvodjenje sljedećeg pojma.

Definicija 4.17 (Linearna nezavisnost).

Za matrice vrste (ili matrice kolone) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kažemo da su linearno nezavisne ako za realne brojeve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ iz jednakosti

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

slijedi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. U suprotnom, tj. ako matrice vrste (ili matrice kolone) nisu linearno nezavisne, onda za njih kažemo da su linearno zavisne.

Simbol $\mathbf{0}$ označava nulu matricu vrstu ili nulu matricu kolonu.

Teorema 4.9.

Maksimalan broj linearno nezavisnih vrsta posmatrane matrice jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih kolona te matrice.

Vrijedi sljedeća definicija.

Definicija 4.18 (Rang matrice).

Pod pojmom ranga matrice $A = (a_{ij})$ formata $m \times n$ podrazumijevamo maksimalan broj linearno nezavisnih vrsta (ili kolona) te matrice.

Rang matrice označavaćemo sa rang A, može se još rang matrice označavati i sa rang(A) ili $r(A)$. Za matricu A formata $m \times n$ jasno je da vrijedi

$$\operatorname{rang} A \leqslant \min\{m, n\}.$$

Praktično računanje ranga matrice prilično je lako izvesti korištenjem elementarnih transformacija. Primjenom elementarnih transformacija rang matrice se ne mijenja. Datu matricu, primjenjujući elementarne trasformacije svodimo na trougaonu matricu ili na trapeznu ili stepenu formu matrice (za matrice u trapeznoj ili stepenoj formi u literaturi se koristi i naziv kvazitrougaone matrice). U datim primjerima biće jasnije o kakvim se formama radi.

Definicija 4.19 (Elementarne trasformacije).

Pod elementarnim transformacijama jedne matrice smatraju se operacije

1. Razmjena dvije vrste (ili kolone);
2. Dodavanje elementima jedne vrste (ili kolone) elemenata neke druge vrste (ili kolone), pošto su prethodno ovi posljednji pomnoženi proizvoljnim brojem;
3. Množenje elemenata jedne vrste (ili kolone) nekim brojem različitim od nule.

Napomena 4.2.

Elementarne transformacije za određivanje ranga matrice načelno se koriste samo za manipulaciju sa vrstama, zbog primjene elementarnih transformacija pri rješavanju sistema linearnih algebarskih jednačina. O ovome će biti više riječi u narednom poglavlju.

Primjer 4.18.

Odrediti rang matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Rješenje:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Ik} \leftrightarrow \text{IIk} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{IIv-2Iv} \\ \text{IIIv-Iv} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{7IIIv-3Iv} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Pa je rang $A = 3$.

Primjer 4.19.

Odrediti rang matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 8 & 19 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Rješenje:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 8 & 19 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Iv} \leftrightarrow \text{IIIv} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 5 & -3 & 8 & 19 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{IIv-5Iv} \\ \text{IIIv-2Iv} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & -6 \\ 0 & 7 & -7 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{IIIv-IIv} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

U ovom slučaju je rang $A = 2$.

Primjer 4.20.

Odrediti rang matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Rješenje:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} Iv \leftrightarrow IIIv \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ IIv + 2Iv \\ IIIv + 3Iv \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 18 & 24 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ IIIv - 2IIv \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ IIIv - 2IIv \end{matrix}$$

Pa je rang $A = 2$.

4.5 Zadaci za vježbu

1. Odrediti rang matrica

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & -4 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 25 & 10 & 5 & 30 \end{pmatrix}$.

Poglavlje 5

SLAJ

Skraćenica SLAJ znači sistemi linearnih algebarskih jednačina

5.1 Osnovni pojmovi. Teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja

DEFINICIJA 5.1 (Sistem linearnih algebarskih jednačina).

Skup jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{5.1}$$

gdje su a_{ij} i b_i dati brojevi, dok su x_j nepoznate, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$; zove se sistem od m algebarskih linearnih jednačina sa n nepoznatih. Brojevi a_{ij} nazivaju se koeficijenti a brojevi b_i slobodni članovi. Ako je $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, onda se kaže da je sistem (5.1) homogen, a ako je bar jedan od slobodnih članova $b_i \neq 0$, onda kažemo da je sistem (5.1) nehomogen.

Umjesto naziva sistem algebarskih linearnih jednačina, ukoliko nema mogućnosti zabune, koristićemo naziv sistem linearnih jednačina.

DEFINICIJA 5.2 (Rješenje sistema).

Brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nazivaju se rješenje sistema (5.1) ako se zamjenom $x_j = \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ u sistem (5.1) dobiju tačne brojne jednakosti.

Za dva sistema linearnih jednačina kaže se da su ekvivalentni ako je svako rješenje jednog sistema ujedno rješenje i drugog sistema i obrnuto.

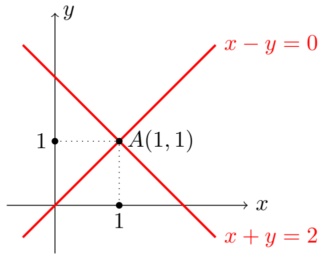
Jedan sistem može imati jedno ili više rješenja a može i da nema rješenja. Ako sistem nema rješenja kaže se da je nesaglasan, a ako ima rješenje kaže se da je saglasan. Ako sistem ima tačno jedno rješenje kaže se da ima jedinstveno rješenje, a ako ima više rješenja onda je taj sistem neodređen.

Posmatrajmo sljedeće sisteme linearnih jednačina

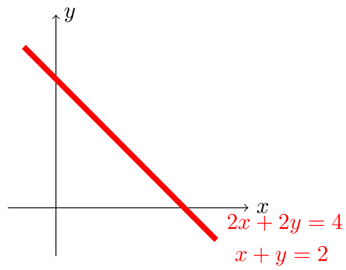
$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + y &= 3. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Sistemi su jednostavni i već na prvi pogled vidimo da je rješenje "lijevog" sistema $x = 1$, $y = 1$, u "srednjem" sistemu drugu jednačinu smo dobili tako što je prva pomnožena sa 2, pa ovaj sistem ima beskonačno mnogo rješenja, jer postoji beskonačno mnogo brojeva čiji je zbir 2. I na kraju treći "desni" sistem nema rješenja, jer ne postoje dva broja čiji je zbir istovremeno jednak i 2 i 3. Sistemi (5.2) predstavljeni su na Slici 6.1a.

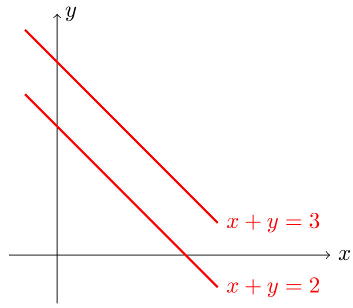
Postavlja se sada pitanje kako ustanoviti egzistenciju i broj rješenja za ne tako jednostavne sisteme kao u slučaju sistema (5.2). Odgovor na ova pitanja (egzistencija–postojanje i broj rješenja) dati su narednim



(a) "Lijevi" sistem, prave se sijeku, jedna tačka je zajednička. Koordinate zajedničke tačke predstavljaju rješenje sistema i rješenje je jedinstveno.



(b) "Srednji" sistem, prave se poklapaju, sve su tačke zajedničke. Ovaj sistem ima beskonačno mnogo rješenja.



(c) "Desni" sistem, nema zajedničkih tačaka, pa prema tome ovaj sistem nema rješenja.

Slika 5.1: Grafički prikaz rješenja sistema (5.2)

teoremama. Sistem (5.1) možemo zapisati u matričnoj formi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

ili

$$A\,X = B,$$

gdje su

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matrica A je matrica sistema, matrica kolona X matrica kolona nepoznatih i matrica kolona B je matrica slobodnih članova. Možemo od matrice A formirati još jednu matricu $A|_B$, tako što ćemo matrici A dodati sa desne strane još jednu kolonu, a to će biti matrica kolona B. Ovo je proširena matrica sistema, i vrijedi

$$A|_B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Sada možemo navesti teoreme

Teorema 5.1 (Kronecker[8]–Capelli[9]).

Sistem (5.1) je saglasan ako i samo ako je rang matrice sistema A jednak rangu proširene matrice sistema $A|_B$, tj.

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|_B.$$

[8]Leopold Kronecker (7. decembar 1823.–29. decembar 1891.) bio je njemački matematičar koj je radio na teoriji brojeva, algebri i logici.

[9]Alfredo Capelli (5. august 1855.–28. januar 1910.) bio je italijanski matematičar.

Teorema 5.2.

Ako je rang A = rang $A|_B = r$, *tada sistem*

1. *ima jedinstveno rješenje u slučaju* $r = n$;
2. *beskonačno mnogo rješenja u slučaju* $r < n$ (n *je broj nepoznatih u sistemu* (5.1)).

Primjer 5.1.

Posmatrajmo ponovo sisteme (5.2)

$$\begin{aligned} x+y&=2 \\ x-y&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y&=2 \\ 2x+2y&=4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y&=2 \\ x+y&=3. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Odrediti egzistenciju i broj rješenja koristeći Teoreme 5.1 i 5.2.

Rješenje:

Zaključili smo da "lijevi" sistem ima jedinstveno rješenje $x = 1, y = 1$, "srednji" sistem ima beskonačno mnogo rješenja, dok "desni" sistem nije saglasan, tj. nema rješenja.

Zapišimo proširenu matricu sistema "lijevog" sistema i odredimo rang te matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \text{ IIv-Iv } \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \tag{5.5}$$

Proširena matrica sistema $A|_B$ formirana je od matrice sistema A sa dodatkom matrice kolone slobodnih članova B. Zbog toga iz posljednje matrice (na desnoj strani) u (5.5) možemo odrediti i rang A i rang $A|_B$. Bez kolone sa plavim elementima je matrica istog ranga kao matrica sistema A, pa je rang $A = 2$ (zakruženi elementi obojeni u magentu), ako dodamo kolonu elemenata sa elementima matrice B (elementi obojeni u plavo) rang se ne mijenja, tj. rang $A|_B = 2$. Pa vrijedi

$$\text{rang } A = \text{rang } A|_B = 2 = r,$$

pa je po Teoremi 5.1 "lijevi" sistem saglasan, a kako je i $n = 2$, (broj nepoznatih), tj.

$$n = r,$$

to po Teoremi 5.2 "lijevi" sistem ima jedinstveno rješenje.

Posmatrajmo sada "srednji" sistem i njegovu proširenu matricu sistema, vrijedi

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \text{ IIv-2·Iv } \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{5.6}$$

Sada je rang A = rang $A|_B = 1 = r$ i $r = 1 < 2 = n$, pa je sistem saglasan, ali ima beskonačno mnogo rješenja.

I na kraju za "desni" sistem vrijedi

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \text{ IIv-Iv } \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{5.7}$$

Vrijedi rang $A = 1$ ali rang $A|_B = 2$, tj. rang $A \neq$ rang $A|_B$, te desni sistem nema rješenja, tj. nesaglasan je.

Napomena 5.1 (Tumačenja zašto je ovaj sistem nesaglasan (posljednji–desni)).

Kako samo elementarne transformacije primjenjujemo na vrste to u desnoj matrici iz (5.7) elementi vrsta su zapravo koeficijenti uz nepoznate i slobodni članovi, pa tako druga vrsta iz desne matrice predstavlja jednačinu

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 1.$$

Sada se postavlja pitanje: Koje brojeve treba uvrstiti umjesto x i y da bi lijeva strana prethodne jednakosti imala vrijednost 1? Znamo da takvi brojevi ne postoje, jednačina nije saglasna pa nije ni "desni" sistem.

5.2 Metode za rješavanje sistema linearnih jednačina

Sada kada znamo kako utvrditi za dati sistem da li je saglasan ili nesaglasan, te ako je saglasan da li ima jedno ili beskonačno mnogo rješenja, potrebno je u slučaju saglasnog sistema ta rješenja izračunati. Metode koje će biti ovdje obrađene su Gaußova[1] metoda, Cramerova[2] metoda (metoda determinanti) i matrična metoda.

5.2.1 Gaußova metoda

Sistem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{5.8}$$

zapišimo u obliku proširene matrice sistema

$$A|_B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Cilj nam je matricu $A|_B$ svesti na gornju trougaonu matricu ili odgovarajuću trapeznu ili stepenu formu matrice. Da bi to uradili trasformisaćemo datu matricu u matricu kod koje u prvoj koloni samo element a_{11} različit od nule dok svi ostali jednaki nuli. Ovo radimo tako što elemente druge vrste pomnožimo sa a_{11}, pa od njih oduzmeno elemente prve vrste pomnožene sa a_{21}, zatim elemente treće vrste pomnožimo sa a_{11} i od njih oduzimamo elemente prve vrste pomnožene sa a_{31}. Postupak nastavljamo dok ne dobijemo matricu kod koje je samo element a_{11} u prvoj koloni različit od nule. Dobijamo sljedeću matricu.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & \ldots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \ldots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array}\right)$$

Sa $a_{ij}^{(1)}$ i $b_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ su označeni elementi matrice dobijeni poslije oduzimanja odgovarujućih vrsta.

Zatim prelazimo na drugu kolonu. U drugoj koloni ostavljamo prva dva elementa različita od nule, "ispod" elementa a_{22} formiramo nule.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{mn}^{(2)} & b_m^{(2)} \end{array}\right) \tag{5.9}$$

[1]Johann Carl Friedrich Gauss (30. april 1777.–23. februar 1855.) bio je njemački matematičar, smatra se najvećim matematičarem ili jedan od najvećih u istoriji čovječanstva

[2]Gabriel Cramer (31. juli 1704.–4. januar 1752.) bio je švajcarski matematičar

Dakle ispod elemenata a_{ii}, $i = 1, \dots, n$, trebamo dobiti nule. Postupak ponavljamo dok ne dobijemo trougaonu matricu ili trapezni ili stepeni oblik matrice, kao u (5.9).

Kako je prethodno opisani postupak korišten i za određivanje ranga proširene matrice sistema, odredimo sada rang matrice sistema A i rang proširene matrice sistema $A|_B$. U slučaju saglasnosti sistema i ako je $n = r$, iz dobijene matrice rekonstruišemo sistem, te iz posljednje jednačine izračunamo posljednju nepoznatu, te njenu vrijednost uvrstimo u prethodnu jednačinu. Ovaj postupak nastavimo dok ne izračunamo i prvu nepoznatu iz prve jednačine.

U slučaju saglasnosti sistema i $r < n$, na desnu stranu prebacujemo $n - r$ nepoznatih i ponavljamo prethodno opisani postupak.

Gaußovom metodom možemo rješavati kako pravougaone tako i kvadratne sisteme. Sljedećim dvjema metodama možemo rješavati samo kvadratne sisteme linearnih jednačina.

5.2.2 Metode za rješavanje kvadratnih sistema

Neka je dat kvadratni sistem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{5.10}$$

možemo ga zapisati u matričnom obliku

$$AX = B,$$

gdje je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Vrijedi sljedeća teorema.

Teorema 5.3.

Kvadratni sistem linearnih jednačina (5.10) ima jedinstveno rješenje ako je A regularna matrica.

Ako pođemo od matričnog zapisa sistema linearnih jednačina $AX = B$, a pošto je A regularna matrica, to ima jedinstvenu inverznu matricu (Teorema 4.7). Vrijedi

$$\boxed{AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.}$$

Napomena 5.2.

Dakle matrična metoda rješavanja sistema linearnih jednačina sastoji se u sljedećem:

1. Zapišemo kvadratni sistem u matričnom obliku;
2. Ispitamo da li je A regularna matrica;
3. Ako jeste izračunamo A^{-1};
4. Rješenje računamo iz jednakosti $X = A^{-1}B$.

Sljedeća metoda je Cramerova metoda (metoda determinanti). Ova metoda je zasnovana na sljedećoj teoremi.

TEOREMA 5.4 (Cramerova teorema).

Ako je $\det A \neq 0$, *sistem* (5.10) *ima jedinstveno rješenje* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *dato sa*

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \ k = 1, 2, \ldots, n,$$

gdje je $\det A_k$ *determinanta matrice* A_k *koja je dobijena zamjenom* k*–te kolone matrice* A *matricom kolonom* B.

NAPOMENA 5.3.

Cramerova metoda rješavanja sistema linearnih jednačina sastoji se u sljedećem

1. Izračunamo $\det A$, ako je $\det A \neq 0$, nastavljamo dalje;
2. Izračunamo determinante $\det A_k$, $k = 1, \ldots, n$, po uputstvu iz Teoreme 5.4;
3. Nepoznate računamo po formuli $x_k = \dfrac{\det A_k}{\det A}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

PRIMJER 5.2.

Dat je sistem

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ -x + 2y + z = 2 \\ 3x + y - 3z = 1, \end{cases}$$

(a) Ispitati saglasnost Kroneker-Capellijevom teoremom, u slučaju saglasnosti

(b) Riješiti sistem Gaußovom, Cramerovom i matričnom metodom.

Rješenje:

(a) Saglasnost

$$A|_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{IIv–2Iv} \\ \text{IIIv+Iv} \\ \text{IVv–3Iv} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{IIIv–3IIv} \\ \text{IVv+2IIv} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{11IVv+12IIv} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{IIIv:11} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pa je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|_B = 3 = r$, ako je i $n = 3$, dakle sistem je saglasan i ima jedinstveno rješenje.

(b) Rješavamo sistem dobijen od koeficijenata iz posljednje matrice.

(i) Gaußova metoda

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y - 3z &= -2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z &= 1 \\
&- - - - - - - - - - \\
x + y + 1 &= 3 \\
y - 3 &= -2 \\
z &= 1 \\
&- - - - - - - - - - \\
x + y &= 2 \\
y &= 1 \\
z &= 1 \\
&- - - - - - - - - - \\
x + 1 &= 1 \\
y &= 1 \\
z &= 1 \\
&- - - - - - - - - - \\
x &= 1 \\
y &= 1 \\
z &= 1.
\end{aligned}
$$

(ii) Cramerova metoda

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1
$$

$$
D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1
$$

$$
D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1
$$

$$
D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1
$$

Pa je

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{D_x}{D} = \frac{1}{1} = 1 \\
y &= \frac{D_y}{D} = \frac{1}{1} = 1 \\
z &= \frac{D_z}{D} = \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}
$$

(iii) Matrična metoda. Napišimo sistem u matričnoj formi $AX = B$, tj.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Izračunajmo inverznu matricu od matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vrijednost determinante je

$$\det A = 1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

Matrica kofaktora

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Adjungovana matrica je

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzna matrica A^{-1} matrice A je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pa je na kraju

$$X = A^{-1} B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dakle rješenje je $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ ili $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Primjer 5.3.

Dat je sistem $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ 3x + 5y - 3z = 5, \end{cases}$

(a) Ispitati saglasnost Kroneker-Capellijevom teoremom, i u slučaju saglasnosti

(b) Riješiti sistem Gaßuovom, Cramerovom i matričnom metodom.

Rješenje:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vidimo da je rang A = rang $A|_B = 2 = r$, a pošto je broj nepoznatih $n = 3$, to je sistem ima saglasan i ima beskonačno mnogo rješenja.

(b) Riješimo sada sistem

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \quad y - 3z = -2, \end{cases}$$

pošto je $n - r = 1$, to ćemo jednu nepoznatu prebaciti na desnu stranu, i dobijamo

$$\begin{cases} x + y = 3 - z \\ \quad y = -2 + 3z, \end{cases}$$

(a) Gaußova metoda

$$\begin{aligned} x + y &= 3 - z \\ y &= -2 + 3z, \\ &-------- \\ x &= -y + 3 - z \\ y &= -2 + 3z, \\ &-------- \\ x &= -4z + 5 \\ y &= -2 + 3z, \\ &-------- \\ x &= -4t + 5 \\ y &= 3t - 2 \\ z &= t,\ t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(b) Cramerov metoda

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ D_x &= \begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ 3t-2 & 1 \end{vmatrix} = -4t + 5, \\ D_y &= \begin{vmatrix} 1 & 3-t \\ 0 & 3t-2 \end{vmatrix} = 3t - 2, \end{aligned}$$

sada je

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{-4t+5}{1} = -4t + 5, \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{3t-2}{1} = 3t - 2, \\ z &= t,\ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Matrična metoda

napišimo sistem

$$\begin{cases} x+y &= 3-z \\ y &= -2+3z, \end{cases}$$

u obliku

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-t \\ 3t-2 \end{pmatrix},$$

odnosno $AX = B$, gdje je $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3-t \\ 3t-2 \end{pmatrix}$,

dalje je

$A_{11} = 1,\ A_{12} = 0,\ A_{21} = -1,\ A_{22} = 1,$

matrica kofaktora je

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

adjungovana matrica, matrice A je

$$\operatorname{adj} A = (\operatorname{cof} A)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determinanta je $\det A = 1$, pa je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

te je rješenje sistema

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-t \\ 3t-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t+5 \\ 3t-2 \end{pmatrix},$$

odnosno $x = -4t+5,\ y = 3t-2,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$.

Primjer 5.4.

Dat je sistem $\begin{cases} x+y+z+w = 4 \\ 2x+3y+z-2w = 3 \\ 3x+4y+2z-w = 7, \end{cases}$

1. Ispitati saglasnost Kronecker-Capellijevom teoremom, u slučaju saglasnosti
2. Riješiti sistem Gaußovom, Kramerovom i matričnom metodom.

Rješenje:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

   dakle $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 2$, sistem ima beskonačno mnogo rješenje.

2. Riješimo sada sistem

$$\begin{cases} x+y+z+w = 4 \\ y-z-4w = -5, \end{cases}$$

   pošto je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 2 = r$, a $n = 4$, pa je $r = 2 < 4 = n$ i $n - r = 2$, prebacimo z i w na desne jednačina. Sada uzmimo $z = a,\ w = b,\ a, b \in \mathbb{R}$, te dalje rješavajmo sistem

$$\begin{cases} x+y = -a-b+4 \\ y = a+4b-5. \end{cases}$$

(1^0) Gaußova metoda

$$\begin{aligned} x+y&=-a-b+4\\ y&=a+4b-5\\ &-------------\\ x&=-(a+4b-5)-a-b+4\\ y&=a+4b-5\\ &-------------\\ x&=-2a-5b+9\\ y&=a+4b-5\\ z&=a\\ w&=b,\ a,b\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

(2^0) Cramerova metoda

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$D_x=\begin{vmatrix} -a-b+4 & 1\\ a+4b-5 & 1 \end{vmatrix}=-2a-5b+9$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & -a-b+4\\ 0 & a+4b-5 \end{vmatrix}=a+4b-5,$$

pa je $x=-2a-5b+9,\ y=a+4b-5,\ z=a,\ w=b,\ a,b\in\mathbb{R}$.

(3^0) Matrična metoda

Napišimo sistem

$$\begin{aligned} x+y&=-a-b+4\\ y&=a+4b-5 \end{aligned}$$

u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a-b+4\\ a+4b-5 \end{pmatrix},$$

izračunajmo matricu kofaktora

$A_{11}=1,\ A_{12}=0,\ A_{21}=-1,\ A_{22}=1$, pa je $\operatorname{cof} A=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

adjungovana matrica je $\operatorname{adj} A=(\operatorname{cof} A)^T=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinanta je $\det A=1$, te je inverzna matrica

$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, rješenje sistema je sada

$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a-b+4\\ a+4b-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2a-5b+9\\ a+4b-5 \end{pmatrix}$, odnosno

$x=-2a-5b+9,\ y=a+4b-5,\ z=a, w=b,\ a,b\in\mathbb{R}$.

PRIMJER 5.5.

Dat je sistem $\begin{cases} x+y+z+w=4 \\ x-y+z+2w=3 \\ 2x+y+z-w=3 \\ 4x+y+3z+2w=10, \end{cases}$

1. Ispitati saglasnost Kronecer-Capellijevom teoremom, u slučaju saglasnosti
2. Riješiti sistem Gaußovom, Kramerovom i matričnom metodom.

Rješenje:

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

Dakle $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 3 = r$, tj. sistem ima rješenje, ali pošto ima četiri nepoznate $n = 4$, $n = 4 < 3 = r$, te rješenja ima beskonačno mnogo

2. Polazni sistem ekvivalentan je sljedećem sistemu

$$\begin{aligned} x+y+z+w &= 4 \\ -y-z-3w &= -5 \\ 2z+7w &= 9 \\ w &= a,\ a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

– –

$$\begin{aligned} x+y+z &= -a+4 \\ -y-z &= 3a-5 \\ 2z &= -7a+9 \\ w &= a,\ a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

– –

$$\begin{aligned} x+y+z &= -a+4 \\ -y-z &= 3a-5 \\ z &= \frac{-7a+9}{2} \\ w &= a,\ a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

– –

$$\begin{aligned} x+y+\frac{-7a+9}{2} &= -a+4 \\ -y+\frac{7a-9}{2} &= 3a-5 \\ z &= \frac{-7a+9}{2} \\ w &= a,\ a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

– –

$$x+y = \frac{7a-9}{2} - a + 4$$

$$
\begin{aligned}
-y &= \frac{-7a+9}{2} + 3a - 5 \\
z &= \frac{-7a+9}{2} \\
w &= a,\ a \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-a-1}{2} + \frac{7a-9}{2} - a + 4 \\
y &= \frac{a+1}{2} - 3a + 5 \\
z &= \frac{-7a+9}{2} \\
w &= a,\ a \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{4a-2}{2} \\
y &= \frac{a+1}{2} \\
z &= \frac{-7a+9}{2} \\
w &= a,\ a \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

5.2.3 Sistemi homogenih linearnih jednačina

U Definiciji 5.1 već je uveden pojam homogenog sistema, da ponovimo to je sistem algebarskih linearnih jednačina u kojem su svi slobodni članovi b_i, $i = 1, \ldots, m$ jednaki nuli, tj.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0,
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

ili u matričnoj formi

$$AX = 0.$$

Očigledno svaki homogeni sistem linearnih jednačina ima rješenje $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Ovo rješenje se naziva trivijalno ili nulto rješenje. I iz proširene matrice sistema možemo lako zaključiti da je sistem uvijek saglasan, tj. da ima rješenje

$$
A|_B = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{nn} & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\
 & \vdots & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0
\end{array}\right),
$$

jer posljednja kolona matrice sa slobodnim članovima ne utiče na vrijednost ranga matrice $A|_B$ jer su svi njeni jednaki nuli. Osnovni problem u rješavanju homogenih sistema linearnih jednačina je u ispitivanju da li ovaj sistem ima i netrivijalnih rješenja. Rješenje ovog problema dato je u sljedećoj teoremi i njenim posljedicama.

TEOREMA 5.5.

Homogeni sistem (5.12) ima netrivijalna rješenja ako i samo ako je rang matrice sistema manji od broja nepoznatih, tj. ako je $\operatorname{rang} A = r < n$.

POSLJEDICA 5.1.

Svaki sistem homogenih linearnih jednačina u kome je broj jednačina manji od broja nepoznatih ima netrivijalna rješenja.

Posljedica 5.2.

Homogeni sistem u kome je broj jednačina jednak broju nepoznatih ima netrivijalna rješenja ako i samo ako je determimanta sistema jednaka nuli.

Primjer 5.6.

Riješiti homogeni sistem $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ 3x - y - 4z = 0 \end{cases}$

Rješenje:

Izračunajmo rang proširene matrice sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 61 & 0 \end{array}\right)$$

dakle vrijedi rang $A\big|_B = 3$, a kako je broj nepoznatih $n = 3$, sistem ima samo trivijalna rješenja. Vidimo da posljednja kolona ne igra nikakvu ulogu u određivanju ranga proširene matrice sistema kod homogenih sistema, pa se zato i računa samo rang matrice sistema, kao što je navedeno u Teoremi 5.5. Da sistem ima samo trivijalna rješenja možemo zaključiti koristeći Posljedicu 5.2 jer broj jednačina jednak broju nepoznatih, pa je

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 61 \neq 0.$$

Dakle postoji samo trivijalno rješenje $x = y = z = 0$.

Primjer 5.7.

Riješiti homogeni sistem $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$

Rješenje:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pa je rang $A = 2 < 3 = n$. Dakle sistem ima i netrivijalna rješenja.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ -y - z &= 0 \\ - - - - - &- - - - - - \\ x + 2y &= -z \\ y &= -z \\ z &= a, \; a \in \mathbb{R} \\ - - - - - &- - - - - - \\ x + 2y &= -a \end{aligned}$$

$$y = -a$$
$$z = a$$
$$-----------$$
$$x = a$$
$$y = -a$$
$$z = a.$$

5.3 Zadaci za vježbu

1. Riješiti sisteme Gaußovom metodom, Cramerovom i matričnom metodom

(a) $\begin{array}{c} x+y+z=3 \\ x+2y+3z=6; \\ 3x+3y+z=7 \end{array}$ (b) $\begin{array}{c} 2x-y+z=2 \\ 2x+2y+4z=8; \\ 3x-y-2z=0 \end{array}$ (c) $\begin{array}{c} x+3y-z=3 \\ -3x+2y+z=0; \\ 2x+3y-3z=2 \end{array}$

(d) $\begin{array}{c} x-2y+3z=2 \\ 2x+y+4z=7; \\ 3x-2y-2z=-1 \end{array}$ (e) $\begin{array}{c} 3x-2y+3z=4 \\ x+2y+z=4 \\ 2x-3y-4z=-5. \end{array}$

2. Ispitati saglasnost sistema Kronecker-Capellijevim stavom i slučaju saglasnosti riješiti dati sistem sa sve tri metode

(a) $\begin{array}{c} x+y+z=3 \\ 2x+y+z=4 \\ -x-y+z=-1 \\ 3x-y-z=1; \end{array}$ (b) $\begin{array}{c} x+y+z=3 \\ 2x+y+z=4 \\ -x-y+z=-1 \\ 3x-y-z=1; \end{array}$ (c) $\begin{array}{c} 2x+2y+z=5 \\ x-y+z=1 \\ -2x-3y+z=-4 \\ x-y-z=-1; \end{array}$

(d) $\begin{array}{c} x+2y+3z=7 \\ 2x-y-5z=-4 \\ -x+y+z=1 \\ 3x+y+z=5; \end{array}$ (e) $\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \\ -x-y+z=-1 \\ 3x-y-z=1; \end{array}$ (f) $\begin{array}{c} x+4y-3z=2 \\ -2x-y+6z=3 \\ x-7y+z=-5 \\ x-y-z=-1. \end{array}$

3. Ispitati saglasnost sistema Kronecker-Capellijevim stavom i u slučju saglasnosti riješiti ga

(a) $\begin{array}{c} x+y-z+t=2 \\ -2x-y-z+2t=-3 \\ 2x+2y-3z-3t=4; \\ -4x-3y+z-t=-7 \end{array}$ (b) $\begin{array}{c} x+2y+z-t=0 \\ -x-y+2z-2t=-3 \\ -2x+y-2z+t=-1 \\ -2x+4y-z-2t=-4. \end{array}$

4. Ispitati saglasnost sistema Kronecker-Capellijevim stavom i slučaju saglasnosti riješiti dati sistem sa sve tri metode

(a) $\begin{array}{c} 2x+7y+3z+u=6 \\ 3x+5y+2z+2u=4; \\ 9x+4y+z+7u=2 \end{array}$ (b) $\begin{array}{c} x-2y+z+u=1 \\ x-2y+z-u=-1; \\ x-2y+z+5u=5 \end{array}$ (c) $\begin{array}{c} 2x-y+z+u=1 \\ x+2y-z+4u=2 \\ x+7y-4z+11u=3. \end{array}$

5. Ispitati ima li homogeni sistem rješenje osim trivijalnog i slučaju da ima izračunati ga

(a) $\begin{array}{c} x+y+2z=0 \\ -2x+2y+3z=0; \\ -5x+2y+z=0 \end{array}$ (b) $\begin{array}{c} x+y+2z=0 \\ -2x+2y+3z=0; \\ -x+3y+5z=0 \end{array}$ (c) $\begin{array}{c} x+2y-2z=0 \\ -x+3y+z=0; \\ -x+8y=0 \end{array}$ (d) $\begin{array}{c} 2x+y-2z=0 \\ -x+2y+z=0 \\ x+3y-z=0. \end{array}$

Poglavlje 6

Vektori

6.1 Uvod. Osnovni pojmovi

U matematici, prirodnim i tehničkim naukama, neke veličine određene su svojom brojnom vrijednošću. Takve su na primjer, masa, zapremina, vrijeme i dr. Međutim postoje veličine za koje nije dovoljno samo znati njihove brojne vrijednosti, na primjer brzina, sila, ubrzanje, jačina električnog polja, jačina magnetnog polja i dr. Na osnovu prethodno iznešenog veličine sa kojimo radimo mogu se podijeliti na:

1. Veličine koje su definisane samo brojnom vrijednošću i njih nazivamo se skalarnim veličinama ili kraće skalarima.

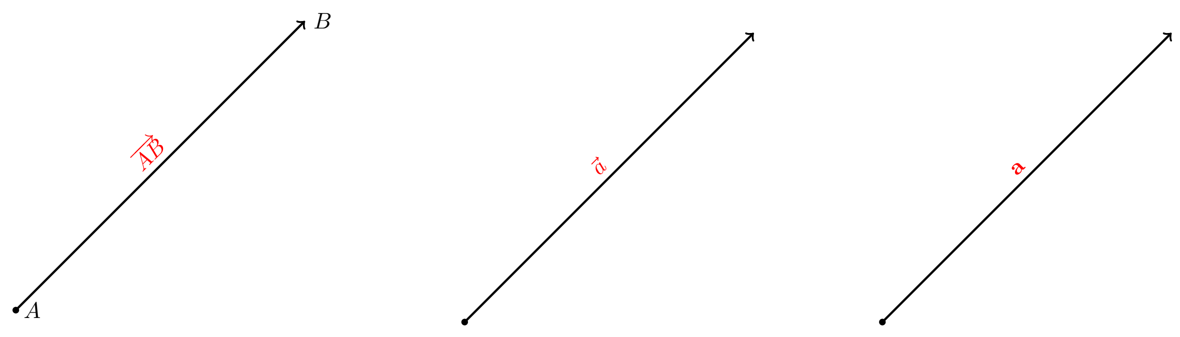
2. Veličine za koje je potrebno poznavati brojnu vrijednost, pravac i smjer. Ove veličine se nazivaju vektorske veličine ili vektori.

6.1.1 Pojam vektora

Vektori se geometrijski predstavljaju usmjerenim (ili orjentisanim dužima). Neka su date tačke A, B, $A \neq B$ prostora. Duž $\overline{AB}$ kojoj je jedna tačka npr. A proglašena za početak, a druga za kraj (tačka B) zvaćemo vektor, u oznaci $\overrightarrow{AB}$. Vektor $\overrightarrow{AB}$ ima pravac kao i prava na kojoj leži duž $\overline{AB}$, smjer od tačke A ka tački B, a intenzitet (ili modul ili norma) mu je jednak dužini duži $\overline{AB}$.

Vektor je definisan ako znamo njegov intenzitet, pravac i smjer. Vektori se obično označavaju malim slovima latinice sa strelicom iznad, na primjer $\vec{a}$, $\vec{b}, \ldots$, ako su poznate početna i krajnja tačka onda koristimo oznaku $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DF}, \ldots$ Osim ovakvog označavanja koriste se i mala slova latinice, ali podebljana (boldovana) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}, \ldots$

Intenziteti se označavaju sa $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|, \ldots$ ili $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\overrightarrow{DF}\right|, \ldots$ ili $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}| \ldots$ Skup svih vektora prostora označavaćemo sa V^3.



(a) (b) (c)

Slika 6.1: Označavanje vektora

Vektor čiji je intenzitet jednak nuli naziva se nula–vektor. Početna i krajnja tačka nula–vektora se poklapaju (tj. iste su), dok pravac i smjer nisu definisani. Nula–vektor označavamo $\vec{0}$ ili $\mathbf{0}$. Vektor čiji je intenzitet jednak 1 zovemo jedinični vektor.

Uobičajeno vektori se dijele u tri kategorije:

1. slobodni vektori;

2. vektori vezani za pravu ili nosač;

3. vektori vezani za tačku.

Slobodni vektori. Za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kažemo da su jednaki, tj. $\vec{a} = \vec{b}$ ako imaju jednake intenzitete, iste smjerove a nosači su im paralelni ili se poklapaju. Ovakve vektore nazivamo slobodni. Slobodne vektore možemo paralelno pomjerati duž njihovog nosača ili paraleno nosaču, zadržavajući smjer i intenzitet nepromijenjenim.

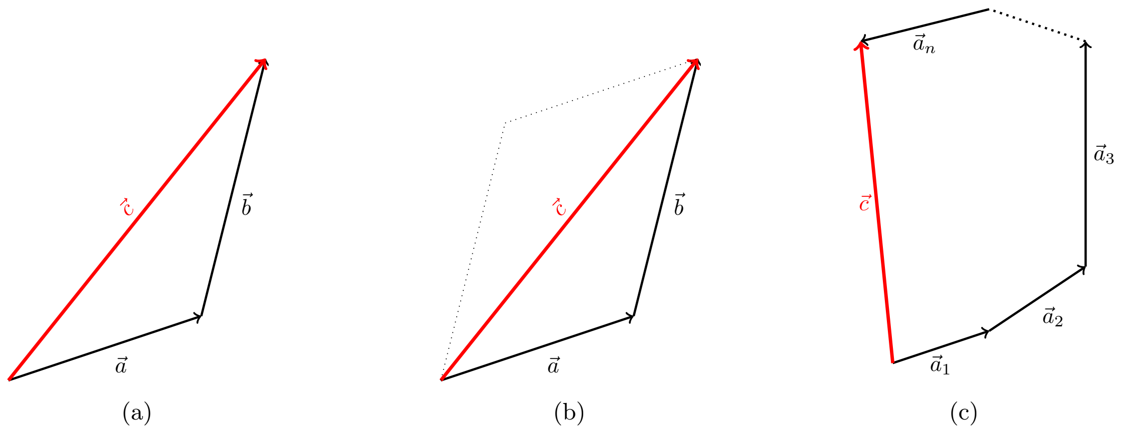
Vektori vezani za pravu (nosač). Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su jednaki ako imaju iste module, smjerove i isti nosač. Ovo su vektori vezani za pravu. Možemo ih pomjerati duž njihovog nosača.

Vektori vezani za tačku. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su jednaki ako imaju iste module, smjerove, intenzitete a krajne tačke im se poklapaju. Ovi vektori su vezani za tačku.

U nastavku mi ćemo koristiti **slobodne vektore**.

6.1.2 Operacije sa vektorima

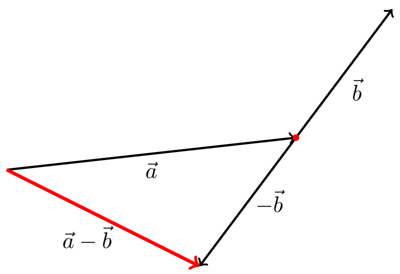
Sabiranje vektora. Vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sabiramo tako što početak vektora $\vec{b}$ dovedemo paralelnim pomjeranjem do kraja vektora $\vec{a}$. Rezultantni vektor $\vec{c}$, čiji se početak poklapa sa početkom vektora $\vec{a}$ a kraj sa krajem vektora $\vec{b}$ je zbir vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Ovo je pravilo trougla (Slika 6.2a) ili paralelograma (nadoponjavanjem dobijemo paralelogram, vidjeti Sliku 6.2b –isprekidane linije). U slučaju da trebamo sabrati vektore $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n$ postupamo na sljedeći način. Početak vektora $\vec{a}_2$ dovedemo na kraj vektora $\vec{a}_1$, početak vektora $\vec{a}_3$ na kraj vektora $\vec{a}_2$, postupak nastavimo do vektora $\vec{a}_n$ čiji početak dovodimo do početka vektora $\vec{a}_{n-1}$. Sada rezultantni vektor $\vec{c}$ čiji se početak poklapa sa početkom vektora $\vec{a}_1$ a kraj sa krajem vektora $\vec{a}_n$ predstavlja traženi zbir, tj. $\vec{c} = \vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_n$ (Slika 6.2c). Izloženi postupak često se zove i pravilo (ili princip) nadovezanih vektora.



Slika 6.2: Sabiranje vektora

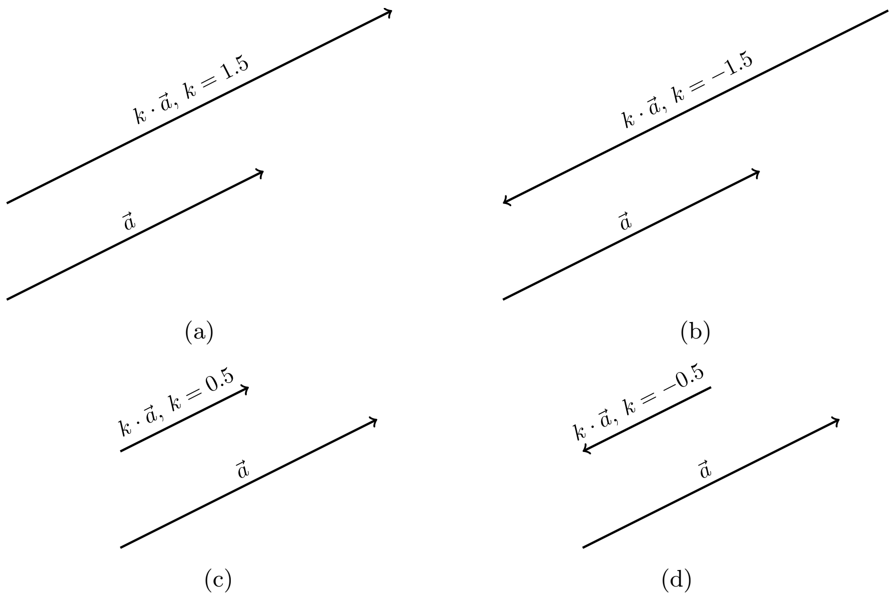
Oduzimanje vektora. Suprotan vektor vektora $\vec{b}$ je vektor koji ima isti intenzitet, isti ili paralelan nosač, ali suprotan smjer od vektora $\vec{b}$. Suprotan vektor, vektora $\vec{b}$ označavamo sa $-\vec{b}$.

Oduzimanje vektora $\vec{b}$ od vektora $\vec{a}$ svodimo na sabiranje vektora $\vec{a}$ sa suprotnim vektorom, vektora $\vec{b}$, tj. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.



Slika 6.3: Oduzimanje vektora

Množenje vektora skalarom. Proizvod vektora $\vec{a}$ i skalara $k \in \mathbb{R}$ je vektor, čiji se pravac poklapa sa pravcem vektora $\vec{a}$, intenzitet mu je jednak $|k| \cdot |\vec{a}|$, a smjer mu je isti kao i smjer vektora $\vec{a}$ ako je $k > 0$, a suprotan od smjera $\vec{a}$ ako je $k < 0$. Na Slici 6.4a, je vektor $\vec{a}$ i vektor $1.5\vec{a}$. Vidimo da rezultantni vektor $1.5\vec{a}$ ima isti smjer i prava kako vektor $\vec{a}$ ali mu je dužina (intenzitet) veća 1.5 nego dužina vektora $\vec{a}$. Na Slici 6.4b $k = -1.5 < 0$ pa rezultantni vektor ima isti pravac kao i $\vec{a}$, intenzitet mu je 1.5 veći nego kod $\vec{a}$ ali ima suprotan smjer. Na Slikama 6.4c i 6.4d su slučajevi kada je $|k| < 1$. Rezultantni vektor ima intenzitet manji od intenziteta vektora $\vec{a}$. Za $k = -1$ dolazi samo do promjene smjera vektora.



Slika 6.4: Množenje vektora skalarom

6.1.3 Linearna kombinacija vektora. Baza prostora V^3

Neka je dato n vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ i n skalara $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Linearnom kombinacijom vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ nazivamo sljedeći zbir

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n.$$

Definicija 6.1 (Zavisni–nezavisni vektori).

Vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ su linearno zavisni ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, od kojih je bar jedan različit od nule, tako da je

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}. \tag{6.1}$$

Ako je jednakost (6.1) zadovoljena jedino kada je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, onda se kaže da su vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linearno nezavisni.

Za dva vektora ili više vektora kažemo da su kolinearni ako leže na istim ili paralelnim nosačima (radimo sa slobodnim vektorima).

Za tri ili više vektora kažemo da su komplanarni ako leže u jednoj ravni ili su paralelelni sa ovom ravni.

Vratimo se sada na prostor V^3. Vrijedi sljedeća teorema

Teorema 6.1.

Neka su su $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3 \in V^3$ bilo koja tri linearno nezavisna vektora. Tada se svaki vektor $\vec{a} \in V^3$ može na jedinstven način prikazati kao njihova linearna kombinacija.

Definicija 6.2.

Uređenu trojku $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ tri nezavisna vektora iz V^3 nazivamo baza prostora V^3.

Drugim riječima bilo koji vektor $\vec{a} \in V^3$ možemo izraziti preko vektora $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \vec{a}_3$, tj. predstaviti vektor $\vec{a}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \vec{a}_3$

$$\boxed{\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3.}$$

Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nazivamo koeficijenti ili koordinate vektora $\vec{a}$ u bazi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \vec{a}_3$.

6.1.4 Prostorni koordinatni sistem. Ortogonalna baza

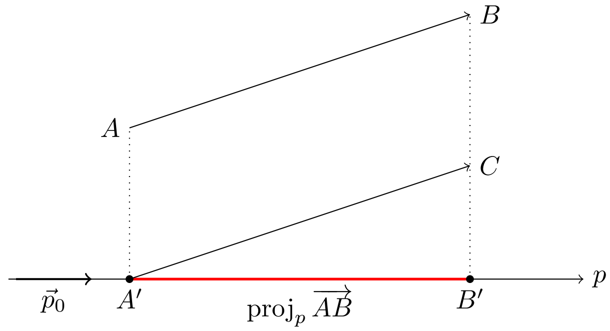
Cilj nam je odabrati bazu tako da što jednostavnije predstavimo vektore.

Definicija 6.3 (Orjentisana prava ili osa).

Orjentisanom pravom ili osom naziva se prava za čije je dvije proizvoljne tačke utvrđeno, koja se od njih smatra prethodnom a koja sljedećom. Orjentisana prava ili osa može biti okarakterisana jediničnim vektorom $\vec{u}$.

Definicija 6.4 (Ortogonalna projekcija, Slika 6.5).

Pod ortogonalnom projekcijom vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu p podrazumijeva se dužina duži $A'B'$, tj. $\left|A'B'\right|$, pri čemu su tačke A' i B' ortogonalne projekcije, respektivno tačaka A i B na osu p, uzeta sa predznakom + ako je vektor $\overrightarrow{AB}$ orjentisan na istu stranu kao i osa p u odnosu na ravan koja prolazi kroz tačke A i A' a normalna je na pravu p, i sa znakom − u suprotnom slučaju.



Slika 6.5: Projekcija vektora na osu

Definicija 6.5 (Pravougli koordinatni sistem, Slika 6.7a).

Uređeni skup tri ose koje prolaze kroz utvrđenu tačku O (pol ili koordinanti početek) i koje su uzajamno okomite, obrazuju Descartesov[a] pravougli koordinatni sistem

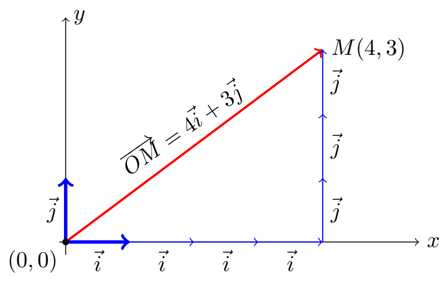
[a] René Descartes (31.mart 1596.–11.februar 1650.) bio je francuski filozof, matematičar i naučnik.

Dakle tri uzajamno ortogonalne orjentisane prave, koje prolaze kroz tačku O obrazuju Descartesov pravougli koordinatni sistem. Prave koje obrazuju pravougaoni koordinatni sistem nazivaju se koordinatne ose a njihova zajednička tačka O koordinatni početak.

Ako se koordinatne ose obilježe sa Ox, Oy, Oz i orjentišu se kao na Slici 6.7a kaže se da one obrazuju desni prostorni koordinatni sistem i nazivaju se respektivno apscisna osa, ordinatna osa i aplikativna osa, odnosno x–osa, y–osa i z–osa. Jedinične vektore (ort–vektori ili ortovi) koordinatnih osa Ox, Oy, Oz, (Slika 6.7b) označavaćemo sa $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$.

Pokažimo kako se tačka a zatim i vektor predstavljaju. Posmatrajmo Sliku 6.6, tj. slučaj u ravni ($z = 0$). Tačka M ima koordinate 4 i 3, 4 je njena x–koordinata i to je udaljenost od y–ose, dok je 3 njena y–koordinata i to je udaljenost od x–ose. Na ovaj način jednoznačno je određena tačka u ravni. Vektor $\overrightarrow{OM}$ možemo predstaviti u bazi $(\vec{i}, \vec{j})$ pomoću ovih projekcija tačke. Sa Slike 6.6 vidimo da je

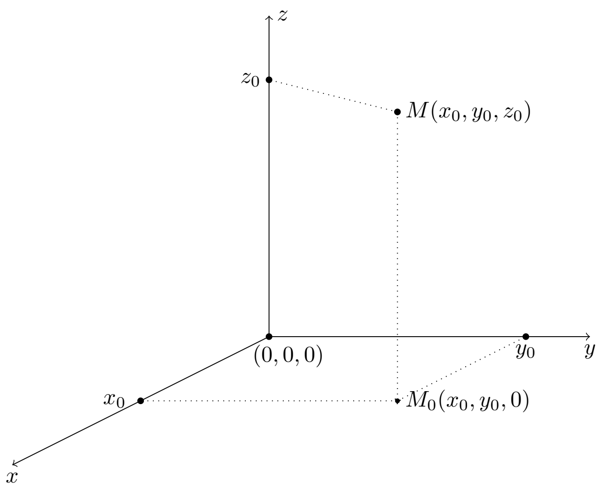
$$\overline{OM} = 4\vec{i} + 3\vec{j}.$$



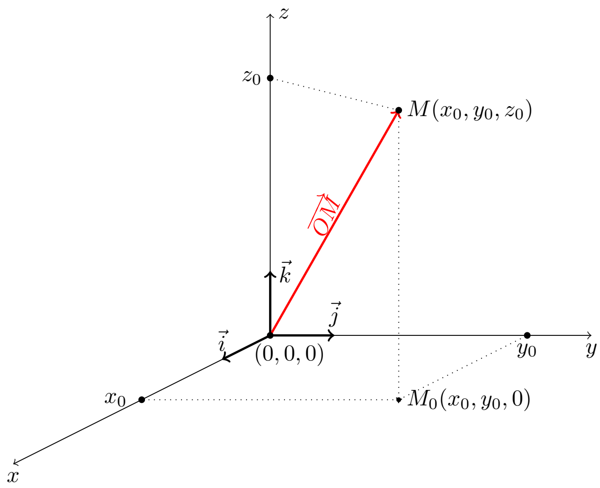
Slika 6.6: Predstavljanje vektora u ravni

Na isti način možemo predstaviti tačku u prostoru, samo što imamo jednu dodatnu koordinatu, u ovom slučaju z. Odredimo ortogonalne projekcije tačke M na koordinatne ose, u ovom slučaju to su x_0, y_0, z_0, Slika 6.7a. Vektor $\overrightarrow{OM}$ možemo predstaviti kao linernu kombinaciju

$$\overrightarrow{OM} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}.$$



(a) Pravougli koordinatni sistem



(b) Vektor $\overrightarrow{OM}$

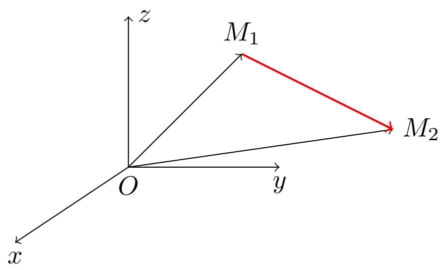
Slika 6.7

Osim notacije $\overrightarrow{OM} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ koristimo i sljedeću notaciju

$$\overrightarrow{OM} = (x_0, y_0, z_0).$$

Inače vektor $\overrightarrow{OM}$ naziva se i vektor položaja tačke M.

Ako su date dvije tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ Slika 6.8. Kako izraziti vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$? Vidimo da je $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$ Sada je



Slika 6.8

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.\end{aligned}$$

Dakle, ako su date koordinate početne i krajnje tačke vektora, njegove koeficijente računamo tako što od koeficijenata krajnje tačke oduzimamo koeficijente početne tačke.

PRIMJER 6.1.

Ispitati da li su vektori $\vec{a} = (4, -6, 10)$ i $\vec{b} = (-6, 9, -15)$ kolinearni.

Rješenje:

Znamo da su dva vektora kolinearna ako leže na istom nosaču (pravoj) ili se mogu paralelnim pomjeranjem dovesti na isti nosač. Ako leže na istom nosaču onda je

$$\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) = k(b_1, b_2, b_3),$$

dva vektora su jednaka ako su im odgovarajući koeficijenti jednaki pa je

$$a_1 = kb_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = k,$$

$$a_2 = kb_2 \Leftrightarrow \frac{a_2}{b_2} = k,$$
$$a_3 = kb_3 \Leftrightarrow \frac{a_3}{b_3} = k,$$

pa dobijamo produženu proporciju

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k} \tag{6.2}$$

Sada samo treba ispitati da li koeficijenti vektora zadovoljavaju prethodnu proporciju. Vrijedi

$$\frac{4}{-6} = \frac{-6}{9} = \frac{10}{-15} = -\frac{2}{3},$$

dakle vektori su kolinearni.

PRIMJER 6.2.

Odrediti parametre α i β tako da vektori $\vec{a} = (\alpha, 1, -4)$ i $\vec{b} = (3, 4, \beta)$ budu kolinearni.

Rješenje:

Koristimo ponovo uslov (6.2)

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{4} = \frac{-4}{\beta},$$
$$\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{4},$$
$$\frac{1}{4} = \frac{-4}{\beta} \Leftrightarrow \beta = -16.$$

PRIMJER 6.3.

Razložiti vektor $\vec{a}$ u pravcu vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$, ako je $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = -2\vec{p} + \vec{q}$ i $\vec{c} = 7\vec{p} - 4\vec{q}$.

Rješenje:

Vrijedi

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\\ 3\vec{p} - 2\vec{q} &= \alpha(-2\vec{p} + \vec{q}) + \beta(7\vec{p} - 4\vec{q})\\ 3\vec{p} - 2\vec{q} &= (-2\alpha + 7\beta)\vec{p} + (\alpha - 4\beta)\vec{q},\end{aligned}$$

izjednačavajući koeficijente dobijamo sistem

$$\begin{aligned}3 &= -2\alpha + 7\beta\\ -2 &= \alpha - 4\beta,\end{aligned}$$

čijim rješavanjem dobijamo $\alpha = 2$, $\beta = 1$, pa je

$$\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}.$$

PRIMJER 6.4.

Ispitati linearnu zavisnost vektora $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (2, -4, 1)$, $\vec{c} = (1, -1, -1)$.

Rješenje:

I način–rang matrice
Formirajmo matricu čiji su elementi jedne vrste upravo koeficijenti jednog od vektora, druge vrste koefici-

jenti drugog vektora, itd. Zatim odredimo rang te matrice. Vrijedi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix},$$

dakle rang $A = 3$, tj. imamo tri nezavisne vrste ili kolone, a pošto su u matrici elementi vrsta koeficijenti od vektora to su naši vektori nezavisni.
II način–sistem homogenih jednačina Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su linearno nezavisni ako jednačina $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$ ima samo trivijalno rješenje, tj. za $\alpha = \beta = \gamma = 0$, u suprotnom, ako ima i drugih rješenja, vektori su zavisni. Vrijedi

$$\begin{aligned} &\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \iff \\ &\alpha(\vec{i} + 2\vec{j}) + \beta(2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}) + \gamma(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) = 0 \iff \\ &(\alpha + 2\beta + \gamma)\vec{i} + (2\alpha - 4\beta - \gamma)\vec{j} + (\beta - \gamma)\vec{k} = 0, \text{ (0 predstavlja nula–vektor)}, \end{aligned}$$

iz posljednje jednakosti dobijamo sistem

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \\ 2\alpha - 4\beta - \gamma &= 0 \\ \beta - \gamma &= 0, \end{aligned}$$

vrijednost determinante je

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0,$$

dakle sistem ima samo trivijalno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Pa zaključujemo da su posmatrani vektori nezavisni.

6.2 Skalarni proizvod

Definicija 6.6.

Broj, odnosno skalar

$$|\vec{x}||\vec{y}| \cos\measuredangle(\vec{x}, \vec{y})$$

naziva se skalarni proizvod vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$ i obilježava

$$\vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Dakle vrijedi

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\measuredangle(\vec{x}, \vec{y}),$$

gdje je $\measuredangle(\vec{x}, \vec{y})$ ugao između vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

Skalarni proizvod je binarna operacija, koja nije zatvorena, pošto rezultat proizvoda $\vec{x} \cdot \vec{y}$ nije vektor nego skalar.

Primjetimo da je $|\vec{y}| \cos\measuredangle(\vec{x}, \vec{y})$ ortogonalna projekcija vektora $\vec{y}$ na osu vektor $\vec{x}$ (ili preciznije na pravu ili nosač vektora $\vec{x}$). Sada je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \operatorname{proj}_{\vec{x}} \vec{y},$$

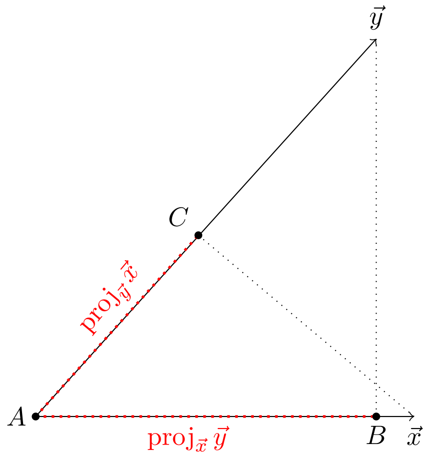
vrijedi i

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{y}| \operatorname{proj}_{\vec{y}} \vec{x}.$$

Osobine skalarnog proizvoda date su u sljedećoj teoremi.

Teorema 6.2 (Osobine skalarnog proizvoda).

Neka su $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ proizvoljni vektori, a α je proizvoljan skalar. Vrijedi



Slika 6.9: Projekcije vektora

(1) $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x}$;

(2) $\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z}$;

(3) $(\alpha\vec{x})\cdot\vec{y} = \alpha(\vec{x}\cdot\vec{y})$;

(4) $\vec{x}\cdot\vec{x} = |\vec{x}|^2$;

(5) $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leqslant |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$, *(Cauchy–Schwarzova nejednakost).*

Dokaz. Dokažimo samo osobinu (4). Na osnovu definicije skalarnog proizvoda je

$$\vec{x}\cdot\vec{x} = |\vec{x}|\cdot|\vec{x}|\cos\measuredangle(\vec{x},\vec{x}) = |\vec{x}|\cdot|\vec{x}|\cos 0 = |\vec{x}|\cdot|\vec{x}| = |\vec{x}|^2.$$

□

Imajući u vidu da je $\cos 0 = 1$, $\cos 90^0 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, izračunajmo skalarne proizvode sa ortovima $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\vec{i}\cdot\vec{i} &= |\vec{i}|\cdot|\vec{i}|\cos 0 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1,\\
\vec{j}\cdot\vec{j} &= |\vec{j}|\cdot|\vec{j}|\cos 0 = 1,\\
\vec{k}\cdot\vec{k} &= |\vec{k}|\cdot|\vec{k}|\cos 0 = 1,\\
\vec{i}\cdot\vec{j} &= \vec{j}\cdot\vec{i} = |\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cos\frac{\pi}{2} = 1\cdot 1\cdot 0 = 0,\\
\vec{i}\cdot\vec{k} &= \vec{k}\cdot\vec{i} = |\vec{i}|\cdot|\vec{k}|\cos\frac{\pi}{2} = 0,\\
\vec{j}\cdot\vec{k} &= \vec{k}\cdot\vec{j} = |\vec{j}|\cdot|\vec{k}|\cos\frac{\pi}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Dakle vrijedi

$$\boxed{\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1} \tag{6.3}$$

i

$$\boxed{\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{j} = 0.} \tag{6.4}$$

U sljedećoj teoremi date su neke geometrijske osobine vektora, koje možemo iskazati preko skalarnog proizvoda.

Teorema 6.3.

Neka su $\vec{x}$, $\vec{y}$ proizvoljni vektori. Vrijedi

(1) $|\vec{x}| = (\vec{x}\cdot\vec{x})^{\frac{1}{2}}$ *(dužina, intenzitet, modul ili norma vektora);*

(2) $\cos\measuredangle(\vec{x},\vec{y}) = \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$, *(ugao između vektora, odnosno kosinus ugla između vektora);*

(3) $\operatorname{proj}_{\vec{y}}\vec{x} = \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{y}|}$, $\vec{y}\neq 0$; *(projekcija vektora $\vec{x}$ na vektor $\vec{y}$);*

(4) $\vec{x}\perp\vec{y} \Leftrightarrow (\vec{x}\cdot\vec{y} = 0,\ \vec{x}\neq 0 \wedge \vec{y}\neq 0)$, *(ortogonalnost vektora).*

Kako koristimo ortonormiranu bazu, tj. bazu koju čine vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, pokažimo kako se računaju vrijednosti iskazane u prethodnoj teoremi. Neka su $\vec{x} = x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$ i $\vec{y} = y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}$. Tada je

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = (x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k})\cdot(y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}),$$

a kako vrijedi (6.3) i (6.4) to je

$$\boxed{\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}$$

pa je sada

$$\boxed{\vec{x}\cdot\vec{x} = x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

a kako je $\vec{x}\cdot\vec{x} = |\vec{x}|^2$ to dobijamo

$$\boxed{|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

Vrijedi

$$\boxed{\cos\measuredangle(\vec{x},\vec{y}) = \frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}}$$

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\vec{y}}\vec{x} = \frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}}$$

te

$$\boxed{\vec{x}\perp\vec{y} \Leftrightarrow (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = 0,\ \vec{x}\neq 0 \wedge \vec{y}\neq 0}\,)$$

Primjer 6.5.

Dati su vektori $\vec{a} = (-1,2,1)$ i $\vec{b} = (1,-3,2)$.
Izračunati (a) $|\vec{a}|$; (b) $|\vec{b}|$; (c) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; (d) $\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$; (e) $\operatorname{proj}_{\vec{a}}\vec{b}$.
Rješenje:

Vrijedi

(a) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$;

(b) $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$;

(c) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = (-1,2,1)\cdot(1,-3,2) = -1-6+2 = -5$;

(d) $\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} = \dfrac{(-1,2,1)\cdot(1,-3,2)}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+9+4}} = \dfrac{-1-6+2}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \dfrac{-5}{\sqrt{84}}$;

(e) $\operatorname{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \dfrac{-5}{\sqrt{6}}$.

PRIMJER 6.6.

Izračunati unutrašnje uglove i obim trougla trougla $\triangle ABC$ čija su tjemena $A(2,-1,3)$, $B(1,1,1)$, $C(0,0,5)$.

Rješenje:

Vidjeti Sliku 6.10, vrijedi

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$
$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\beta \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}.$$

Uglove α i β računamo koristeći prethodne formule, dok treći ugao možemo iz $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Dalje je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-1,2,-2),\ \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)\\ \overrightarrow{AC} &= (-2,1,2)\\ \overrightarrow{BC} &= (-1,-1,4)\end{aligned}$$

pa je

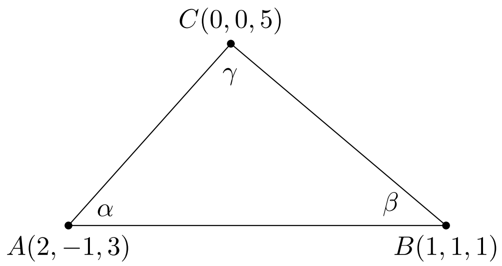
$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{(-1,2,-2)\cdot(-2,1,2)}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{4+1+4}} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}\\ \cos\beta &= \frac{(1,-2,2)\cdot(-1,-1,4)}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{1+1+16}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

i

$$\gamma = \pi-\alpha-\beta = \frac{\pi}{4}.$$

Obim trougla je

$$O = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{1+4+4}+\sqrt{4+1+4}+\sqrt{1+1+16} = 6+\sqrt{18} = 6+3\sqrt{2}.$$



Slika 6.10: Trougao $\triangle ABC$

PRIMJER 6.7.

Date su tačke $A(3,3,-2)$, $B(0,-3,4)$, $C(0,-3,0)$, $D(0,2,-4)$. Izračunati $\operatorname{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD}$.

Rješenje:

Sa Slike 6.11 je

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} \text{ pa je } \operatorname{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{CD}|\cos\varphi,$$

znamo da je $\cos\varphi = \cos\frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{AB}|}$, pa je

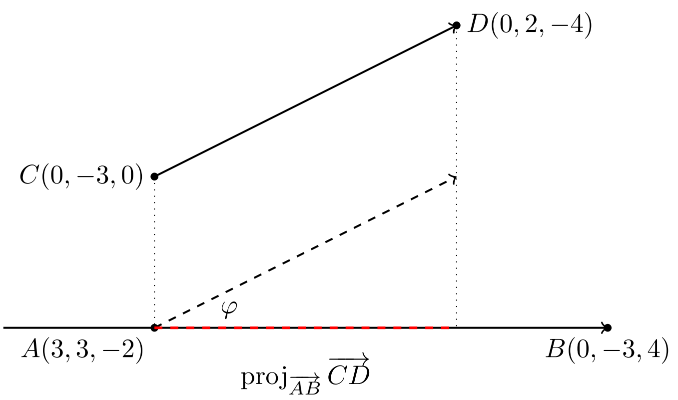
$$\operatorname{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{CD}|\frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{CD}|}.$$

Odredimo sada $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $|\overrightarrow{AB}|$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CD} &= (0-0)\vec{i} + (2-(-3))\vec{j} + (-4-0)\vec{k} = (0,5,-4),\\
\overrightarrow{AB} &= (0-3)\vec{i} + (-3-3)\vec{j} + (4-(-2))\vec{k} = (-3,-6,6),\\
|\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{9+36+36} = 9,
\end{aligned}$$

pa je na kraju

$$\operatorname{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD} = \frac{(0,5,-4)\cdot(-3,-6,6)}{9} = \frac{0-30-24}{9} = -6.$$



Slika 6.11: Projekcija vektora

Vidimo da na Slici 6.11 vektori nisu dobro orjentisani, zbog negativne projekcije.

6.3 Vektorski proizvod

Definicija 6.7 (Desni triedar).

Kaže se da tri nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sa zajedničkim početkom obrazuju redom desni triedar ako se rotacija vektora $\vec{a}$ prema vektoru $\vec{b}$, najkraćim putem, posmatra sa kraja vektora $\vec{c}$ vrši suprotno kretanju kazaljke sata Slika 6.12a.

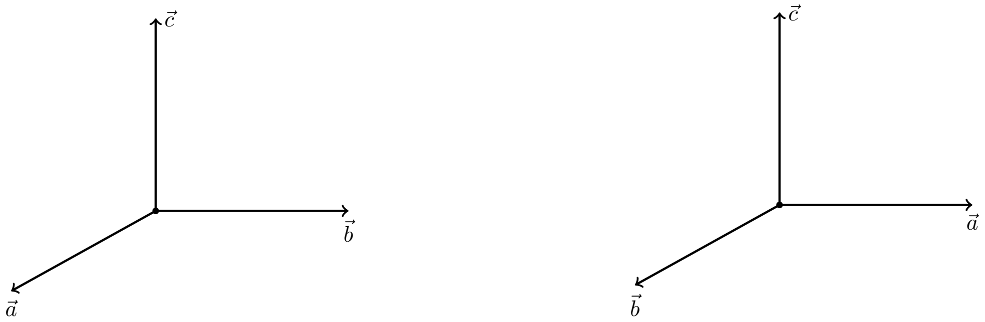
Na sličan način definiše se lijevi triedar koji obrazuju tri nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sa zajedničkim početkom Slika 6.12b.

Definicija 6.8 (Vektorski proizvod).

Ako je $\vec{n}_0$ jedinični vektor normalan na ravan koju obrazuju vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ pri čemu $\vec{x}$, $\vec{y}$ i $\vec{n}_0$ obrazuju desni triedar, onda se vektor

$$|\vec{x}||\vec{y}|\sin\measuredangle(\vec{x},\vec{y})\vec{n}_0$$

naziva vektorski proizvod vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$ i obilježava sa $\vec{x}\times\vec{y}$.



(a) Desni triedar vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (b) Lijevi triedar vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

Slika 6.12

Dakle, vrijedi

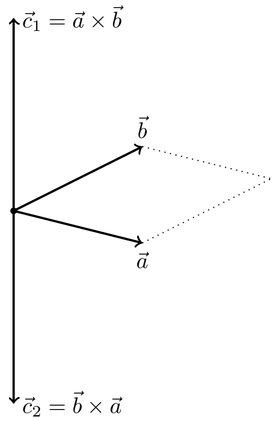
$$\boxed{\vec{x} \times \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) \vec{n}_0}$$

i

$$\boxed{|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}|| \sin \measuredangle(\vec{x}, \vec{y})|.}$$

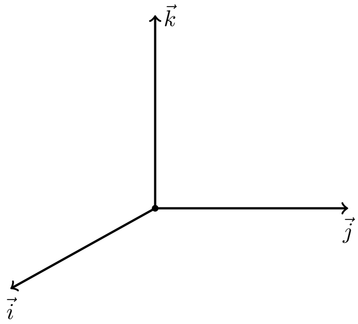
Dakle, vektorski proizvod dva vektora $\vec{x}$, $\vec{y}$ je vektor $\vec{z}$, koji normalan na ravan koju obrazuju vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$, intenzitet mu je jednak površini paralelograma koji formiraju vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$, a smjer mu je takav da $\vec{x}$, $\vec{y}$ i $\vec{z}$ obrazuju triedar desne orjentacije.

Ako je $\vec{c}_1 = \vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}_2 = \vec{b} \times \vec{a}$, međusobni raspored vektora prikazan je na Slici 6.13.



Slika 6.13: Vektori $\vec{c}_1$ i $\vec{c}_2$

Kako ortovi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ obrazuju triedar desne orjentacije, kao na Slici 6.14 te na osnovu definicije vektorskog



Slika 6.14: Ort–vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

proizvoda dobijamo

$$\begin{array}{lll} \vec{i}\times\vec{i}=0 & \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} \\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} & \vec{j}\times\vec{j}=0 & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i} & \vec{k}\times\vec{k}=0 \end{array}$$

Vrijedi sljedeća teorema.

Teorema 6.4 (Osobine vektorskog proizvoda).

Ako su $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ proizvoljni vektori i α je proizvoljan skalar, onda je

(1) $\vec{x}\times\vec{y}=-\vec{y}\times\vec{x}$;

(2) $(\alpha\vec{x})\times\vec{y}=\vec{x}\times(\alpha\vec{y})=\alpha(\vec{x}\times\vec{y})$;

(3) $\vec{x}\times(\vec{y}+\vec{z})=\vec{x}\times\vec{y}+\vec{x}\times\vec{z}$.

Ako su vektori $\vec{x}$, $\vec{y}$ dati u ortonormiranoj bazi, tj. $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ i $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$ tada je

$$\begin{aligned} \vec{x}\times\vec{y} &= (x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k})\times(y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}) \\ &= (x_2y_3-x_3y_2)\vec{i}+(x_3y_1-x_1y_3)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}. \end{aligned}$$

Posljednju jednakost možemo pisati u obliku determinante

$$\boxed{\vec{x}\times\vec{y}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}$$

Primjena vektorskog proizvoda. Iz same definicije vektorskog proizvoda proizilazi da je intenzitet vektorskog proizvoda $\vec{x}$ i $\vec{y}$ jednak površini paraleograma koju formiraju ova dva vektora. Ako označimo sa P ovu površinu, vrijedi

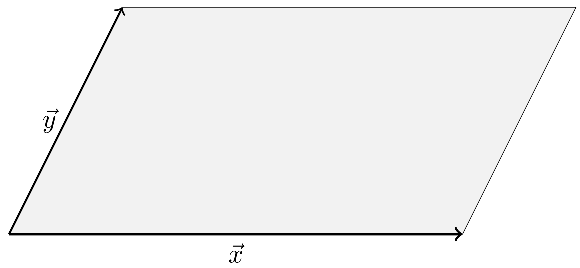
$$\boxed{P=|\vec{x}\times\vec{y}|}$$

U slučaju da su vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ paralelni ili ako imaju isti nosač tada je

$$\vec{x}\times\vec{y}=0,$$

jer je $\measuredangle(\vec{x},\vec{y})=0$, pa je $\sin\measuredangle(\vec{x},\vec{y})=0$ $(\vec{x}\times\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\sin\measuredangle(\vec{x},\vec{y})\vec{n}_0)$. Pa koristeći vektorski proizvod možemo ispitati kolinearnost vektora, tj. vrijedi

$$\boxed{\vec{x}\times\vec{y}=0\Leftrightarrow(\vec{x}\parallel\vec{y},\ \vec{x}\neq0\wedge\vec{y}\neq0).}$$



Slika 6.15: Površina paralelograma

PRIMJER 6.8.

Ako je $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, izračunati $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Rješenje:

Vrijedi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25},$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|| \sin\varphi| = 5 \cdot 10\sqrt{1 - \left(\frac{6}{25}\right)^2} = 2\sqrt{589}$$

PRIMJER 6.9.

Izračunati površinu i visinu h_C trougla $\triangle ABC$, čiji su vrhovi $A(1,2,3)$, $B(-2,5,4)$, $C(2,5,8)$.

Rješenje:

Vidi Sliku 6.16, površinu trougla računamo

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} P_{\square ABCD} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Vrijedi

$$\overrightarrow{AB} = (-3,3,1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (1,3,5)$$
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 16\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 16^2 + 12^2} = \frac{1}{2}\sqrt{544} = 2\sqrt{34}.$$

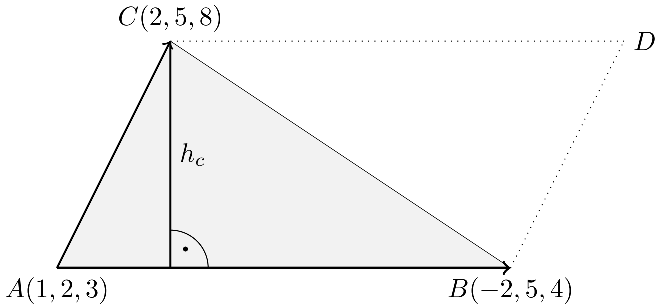
Površina trougla je $P_{\triangle ABC} = 2\sqrt{34}$.

Visinu možemo izračunati i na drugi način $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot h_c$, pa je

$$h_c = \frac{2P_{\triangle ABC}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{4\sqrt{34}}{\sqrt{9+9+1}} = \frac{4\sqrt{34}}{\sqrt{19}} = \frac{4\sqrt{646}}{19},$$

visina je $h_C = \frac{4\sqrt{646}}{19}$.

PRIMJER 6.10.



Slika 6.16: Površina trougla

Izračunati projekciju vektora $\vec{a} = (3, -12, 4)$ na vektor $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$, ako je $\vec{c} = (1, 0, -2)$, $\vec{d} = (1, 3, -4)$.

Rješenje:

Izračunajmo prvo vektor $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$

$$\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$$

sada je projekcija

$$\text{proj}_{\vec{b}}\, \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(3, -12, 4) \cdot (6, 2, 3)}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{6}{7}.$$

Primjer 6.11.

Neka je $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 5$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$, izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{m} = 2\vec{b} - \vec{a}$ i $\vec{n} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} |\vec{m} \times \vec{n}| &= |(2\vec{b} - \vec{a}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})| = |6\vec{b} \times \vec{a} + \underbrace{4\vec{b} \times \vec{b}}_{=0} - \underbrace{3\vec{a} \times \vec{a}}_{=0} - 2\vec{a} \times \vec{b}| \\ &= |6\vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{b} \times \vec{a}| = 8|\vec{b} \times \vec{a}| = 8|\vec{b}||\vec{a}||\sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})| = 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Primjer 6.12.

Odrediti jedinični vektor koji je normalan na ravan određenu vektorima $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $b = (1, -1, 1)$.

Rješenje:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k},$$

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

6.4 Mješoviti proizvod tri vektora

Neka su data tri nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i vektor $\vec{d}$ normalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Pomnožimo li prvo $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektorski, a zatim $\vec{a} \times \vec{b}$ pomnožimo sa $\vec{c}$ skalarno, dobijamo mješoviti proizvod

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c},}$$

tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Ova tri vektora konstruišu (razapinju) paralelopiped Slika 6.17. U ovom slučaju $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. obrazuju triedar desne orjentacije. Površina baze paralelopipeda (Slika 6.17 paraleogram obojen sivo) jednaka je $|\vec{a} \times \vec{b}|$, dok je visina h jednaka $h = \text{proj}_{\vec{d}}\vec{c}$. Pa je sada

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}|\vec{d}_0 \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \,\text{proj}_{\vec{d}_0} \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}|h = V,$$

gdje je $\vec{d}_0 = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$.

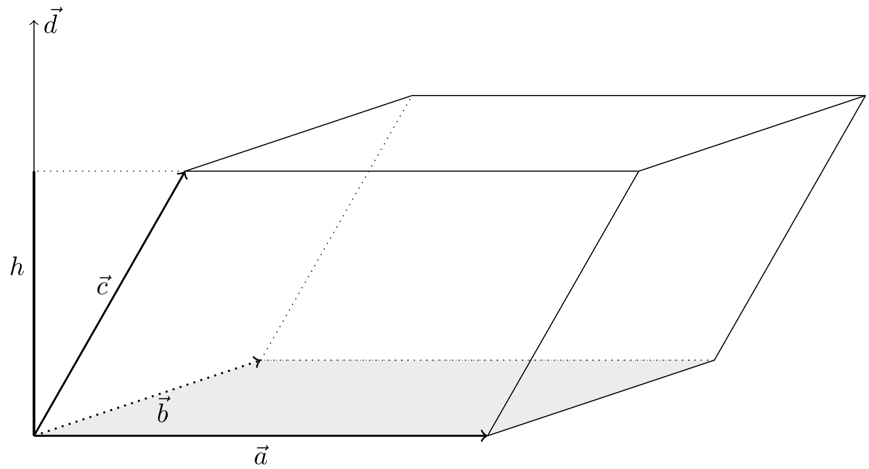
Sa druge strane, u slučaju drugačije orjentacije, tj. kada vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ obrazuju triedar lijeve orjentacije, projekcija $\text{proj}_{\vec{d}_0} \vec{c}$ bi bila negativna. U ovom slučaju,

$$V = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Odnosno, zapreminu paralelopipeda računamo

$$\boxed{V = \pm(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c},}$$

predznak biramo tako da zapremina ne bude negativna.



Slika 6.17: Zapremina paralelopipeda

Ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ dati u ortonormiranoj bazi i ako vrijedi $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, tada zapreminu računamo

$$\boxed{V = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

PRIMJER 6.13.

Odrediti parametar t tako da vektori $\vec{a} = (\ln(t-2), -2, 6)$, $\vec{b} = (t, -2, 5)$, $\vec{c} = (0, -1, 3)$ budu komplanarni.

Rješenje:

U slučaju da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanarni, da leže u istoj ravni, njihov mješoviti proizvod bio bi jednak 0. Pa iz uslova $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ računamo vrijednost parametra t, vrijedi

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \ln(t-2) & -2 & 6 \\ t & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6\ln(t-2) - 6t + 5\ln(t-2) + 6t = \ln(t-2) = 0$$

$$\ln(t-2) = 0 \Leftrightarrow e^0 = t-2 \Leftrightarrow t = 3.$$

PRIMJER 6.14.

Odrediti zapreminu tetraedra čiji su vrhovi $A(3,1,-2)$, $B(-4,2,3)$, $C(1,5,-1)$, $D(-5,-1,2)$. Kolika je visina tetraedra ako se za bazu uzme trougao $\triangle ABC$? Rješenje:

Vidi Sliku 6.18, paralelopiped kojeg razapinju vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ podijelimo na dva dijela sa ravni, čiji je dio predstavljen crvenim paralelogramom $\square BEFC$. Sada treba da izračunamo zapreminu tetraedra V_T određenog vrhovima A, B, C, D. Zapremina ovog tetredra predstavlja $\frac{1}{3}$ zapremine prizme V_P određene sa vrhovima A, B, C, E, F, D.

Pa je

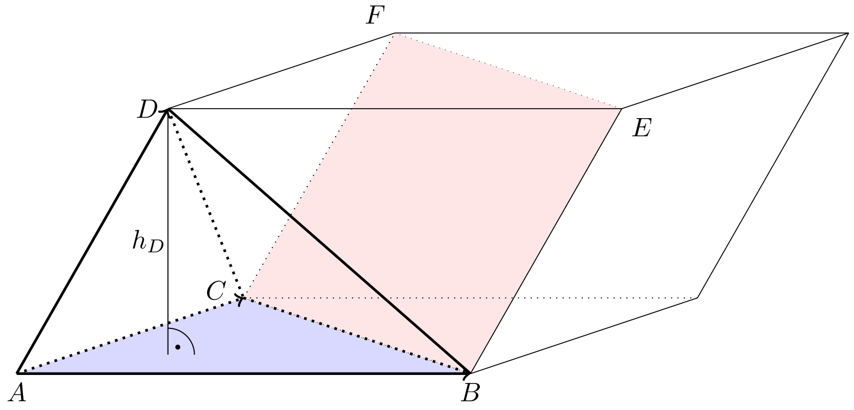
$$\begin{aligned} V_T &= \frac{1}{3}V_P = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}V = \frac{1}{6}V \\ V &= \pm(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB} &= (-7,1,5) \\ \overrightarrow{AC} &= (-2,4,1) \\ \overrightarrow{AD} &= (-8,-2,4) \\ (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} -7 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -8 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 54, \end{aligned}$$

$$V_T = \frac{1}{6} \cdot 54 = 9.$$

Visinu računamo na sljedeći način

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{1}{3}P_{\triangle ABC} \cdot h_D \Leftrightarrow h_D = \frac{3V_T}{P_{\triangle ABC}} \\ P_\triangle &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -7 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -19\vec{i} - 3\vec{j} - 26\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| &= \sqrt{(-19)^2 + (-3)^2 + (-26)^2} = \sqrt{1046} \\ h_D &= \frac{54}{\sqrt{1046}} = \frac{54\sqrt{1046}}{1046}. \end{aligned}$$



Slika 6.18: Zapremina tetraedra

6.5 Zadaci za vježbu

Linearna zavisnost vektora. Razlaganje vektora po bazi

1. Odrediti parametre u i v, tako da vektori $\vec{a} = (u, 1, -2)$ i $\vec{b} = (-1, 3, v)$, budu kolinearni.
2. Da li su vektori $\vec{a} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 10\vec{k}$ i $\vec{b} = -6\vec{i} + 9\vec{j} - 15\vec{k}$ kolinearni?
3. Ako je $\vec{a} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{3}\right)$, odrediti x, z vektora $\vec{b} = (x, 4, z)$, tako da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ budu kolinearni.
4. Odrediti parametar k, tako da vektori $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (2, k, -4)$, $\vec{c} = (k, 12, 6)$, budu komplanarni. Za takvu vrijednost parametra k razložiti vektor $\vec{a}$ po pravcima vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.
5. Ispitati linearnu zavisnost vektora $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (4, 2, 0)$ i $\vec{c} = (1, 1, 1)$.
6. Ispitati linearnu zavisnost vektora $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$, a ako su zavisni razložiti vektor $\vec{l}$ na $\vec{m}$ i $\vec{n}$,
(a) $\vec{l} = (2, -1, -1)\,, \vec{m} = (-1, 2, -1)\,, \vec{n} = (-1, -1, 2)$; (b) $\vec{l} = (1, 1, 1)\,, \vec{m} = (0, 1, 1)\,, \vec{n} = (-1, 0, 1)$; (c)

Skalarni proizvod vektora

1. Dati su vektori $\vec{a} = (2, 1, -2)$, $\vec{b} = (-1, 4, 3)$. Izračunati $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}, \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$, $\text{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a}$ i $\text{proj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$.
2. Tjemena trougla su $A(2, -1, 3)$, $B(1, 3, -4)$, $C(0, 2, 4)$. Odrediti unutrašnje uglove trougla i dužine stranica trougla.
3. Neka je $|a| = 3$, $|b| = 6$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Izračunati $|\vec{a} + \vec{b}|$ i $|2\vec{a} - \vec{b}|$.
4. Izračunati dužinu dijagonala paralelograma, ako su mu stranice vektori $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$, $\vec{b} = -3\vec{m} + 5\vec{n}$ i $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 3$, $\measuredangle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.
5. Odrediti projekciju vektora $\vec{d} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$ na vektor $\vec{c}$, ako su $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (3, -2, 1)$, $\vec{c} = (2, -4, 5)$.
6. Za koje su vrijednosti parametra m vektori $\vec{a} = (-2, 1, m)$, $\vec{b} = (1, -2, 3)$ ortogonalni.

Vektorski proizvod vektora

1. Ako je $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$ i $\vec{a} \cdot \vec{b} = 45$, izračunati $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
2. Ako je $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b}$ i $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ i $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, izračunati $\vec{p} \times \vec{q}$.
3. Stranice paralelograma date su vektorima $\vec{p} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$ i $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ i $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. Izračunati površinu paralelograma i ugao izmedju dijagonala.
4. Izračunati projekciju $\vec{a} = (2, 1, -3)$ na vektor $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$, ako je $\vec{c} = (1, 0, -2)$ i $\vec{b} = 1, 3, -4)$.
5. Neka je $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$ i $|\vec{q}| = |\vec{q}| = 1$, $\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Izračunati površinu trougla i visinu h_c.
6. Dati su vektori $\vec{a} = (1, 1, -1), \vec{b} = (-2, -1, 2)$, $\vec{c} = (1, -1, 2)$.
   (a) Razložiti vektor $\vec{c}$ po pravcima vektora $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$;
   (b) Odrediti ugao koji obrazuju vektor $\vec{c}$ sa ravni odredjenom vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Mješoviti vektorski proizvod

1. Ispitati da li tačke $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,13)$ pripadju istoj ravni.
2. Dokazati da su vektori $\vec{a}=(-1,3,2)$, $\vec{b}=(2,-3,4)$, $\vec{c}=(-3,12,6)$ komplanarni.
3. Izračunati zapreminu tetraedra i visinu h_D, čiji su vrhovi $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,6)$, $D(2,3,8)$.

Razni zadaci

1. Dati su vektori $\vec{a}=-2\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-2\vec{q}$, $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{6}$. Izračunati $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$, $\text{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a}$ i $\text{proj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$.
2. Ako je $|\overrightarrow{AB}|=2$, $|\overrightarrow{AC}|=4$, $\measuredangle(\vec{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$ i tačka M je sredina duži BC, izračunati $\overrightarrow{AM}$ preko $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, a zatim $|\overrightarrow{AM}|$.
3. Izračunati ugao izmedju simetrala koordinatnih osa yOz i xOz.
4. Izračunati ugao izmedju vektora $2\vec{a}-4\vec{b}$ i $3\vec{a}+2\vec{b}$, ako je $\vec{a}=(2,-1,3)$, $\vec{b}=(3,-2,2)$.
5. U trouglu $\triangle$, ABC poznato je $A(2,1,-3)$, $\vec{AB}=(2,-3,5)$, $\vec{BC}=(3,-2,4)$. Odrediti koordinate vrhova B i C i koeficijente vektora $\vec{AC}$ i $\measuredangle\gamma$.
6. Odrediti projekciju vektora $\vec{a}=(2,4,\sqrt{5})$ na osu koja zaklapa uglove $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$ a sa z-osom tup ugao.
7. Izračunati površinu trougla čije su dvije stranice vektori $\vec{a}=4\vec{j}-\vec{k}+3\vec{k}$ i $\vec{b}=(5,-3,7)$.
8. Odrediti parametar λ tako da vektori $\vec{a}=14\vec{j}+\lambda\vec{k}+3\vec{i}$ i $\vec{b}=(\lambda,-2,\lambda)$ budu okomiti.
9. Odrediti parametar k tako da vektori $\vec{a}=(-1,3,2)$, $\vec{b}=(2,k,-4)$ i $\vec{c}=(k,12,6)$ budu komplanarni. Za tako dobijenu vrijednsot parametra k razložiti vektor $\vec{a}$ po pravcima vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.
10. Dat je trougao čiji su vrhovi $A(5,2,-4)$, $B(9,-8,-3)$ i $C(16,-6,-11)$. Odrediti površinu $\triangle\, ABC$ i unutrašnje uglove trougla.
11. Izračunati površinu nad vektorima $\vec{a}=(2,1,-k)$ i $\vec{b}=(-1,1,-7)$ i izračunati ugao izmedju vektora $\vec{a}$ i $\vec{a}+2\vec{b}$.
12. Izračunati visinu paralelopipeda koju obrazuju vektori $\vec{a}=(1,-4,5)$, $\vec{b}=(0,2,-4)$ i $\vec{c}=(2,-2,1)$.
13. Dati su vektori $\vec{a}=(2,-1,7)$, $\vec{b}=(0,-4,3)$ i $\vec{c}=(-1,-2+1)$. Ispitati komplanarnost vektora. Ako nisu komplanarni izračunati visinu tetraedra koju obrazuju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, ako se za bazu uzmu vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
14. Izračunati visinu paralelopipeda koju obrazuju vektori $\vec{a}=(1,-4,5)$, $\vec{b}=(0,2,-4)$ i $\vec{c}=(2,-2,1)$.
15. Izračunati dužinu visine trougla koju obrazuju vektori $\vec{a}=(1,-4,5)$ i $\vec{b}=(0,2,-4)$ i to onu koja odgovara stranici koja je odredjena vektorom $\vec{a}$.
16. Dati su vektori $\overrightarrow{OA}=(5,2,-1)$, $\overrightarrow{OB}=(1,-3,4)$, $\overrightarrow{OC}=(-2,1,3)$, $\overrightarrow{OD}=(2,6,-2)$. Pokazati da je $\square\, ABCD$ paralelogram i izračunati ugao izmedju dijagonala.
17. Data su tri tjemena paralelograma $A(2,-1,0)$, $B(3,4,1)$, $C(-1,0,-1)$. Odrediti četvrto tjeme i ugao izmedju dijagonala.

Poglavlje 7

Funkcije

Funkcije srećemo u svim oblastima matematike. Pojam funkcije je jedan od osnovnih i najvažnijih matematičkih pojmova. Sa izučavanjem funkcija počinje se dosta rano već u osnovnoj, a zatim se nastavlja u srednjoj školi, zato bi trebalo da materijali koji su izlagani u nastavku budu poznati studentima. U ovom poglavlju biće razmatrane samo realne funkcije jedne realne promjenljive

7.1 Uvod

Postoji više načina za uvođenje, odnosno definisanje pojma funkcije. Jedan način je sljedeća definicija.

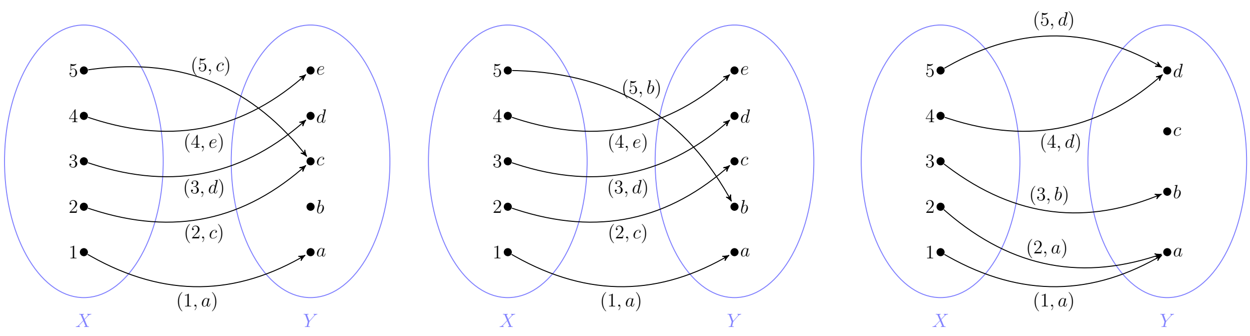
Definicija 7.1 (Funkcija).

Neka su X i Y bilo koja dva neprazna skupa. Postupak koji svakom elementu $x \in X$ pridružuje tačno jedan element $y \in Y$ zovemo funkcija ili preslikavanje sa X u Y i pišemo

$$f : X \mapsto Y \text{ ili } x \mapsto f(x) \text{ ili } X \overset{f}{\mapsto} Y, \quad x \in X.$$

Primjer 7.1.

Neka su dati skupovi $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $Y = \{a, b, c, d, e\}$. Na Slici 7.1 predstavljene su funkcije, dok na Slici 7.2 nisu funkcije.

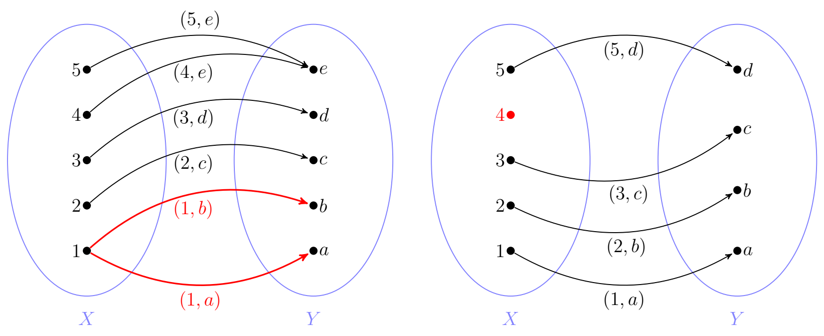


Slika 7.1: Funkcije

Napomena 7.1.

Svi elementi skupa X moraju biti preslikani i mogu biti preslikani samo jednom, tj. u samo jedan element. Zato su na Slici 7.1 funkcije ili preslikavanja, a na Slici 7.2 nisu funkcije.

Skup X iz Definicije 7.1 zovemo domen ili područje definisanosti funkcije i označamo sa D_f ili $D(f)$. Svakom elementu $x \in D_f$ funkcija f pridružuje element $y \in Y$. Skup svih ovakvih elementa y zovemo skup vrijednosti ili kodomen i označavamo sa $V(f)$, V_f, $R(f)$, $f(X)$. Elemente skupa D_f zovemo originali (ili argumenti ili



Slika 7.2: Nisu funkcije

promjenljive ili nezavisne promjenljive), a elemente skupa R_f, tj. $f(x)$ slike (ili zavisno promjenljive). Dakle, vrijedi

$$f(X) = \{y \in Y : y = f(x)\} \text{ i } f(X) \subseteq Y.$$

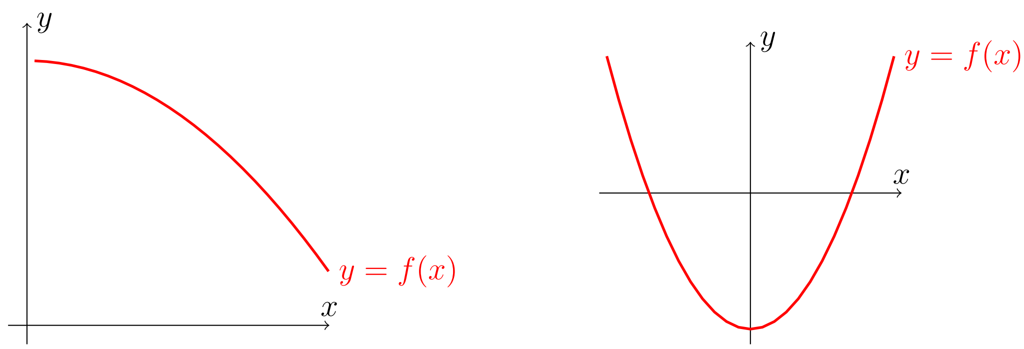
Grafik G_f funkcije $f : X \mapsto Y$ je skup uređenih parova $(x, f(x))$, $x \in X$,

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Funkciju $f : X \mapsto Y$ možemo zadati tabelarno, grafički, analitički (formulom) i dr.

Primjer 7.2.

Na Slici 7.3 funkcije su predstavljene grafički, Tabelom 7.1 funkcija je zadana tabelarno i sa (7.1) funkcija je zadana analitički.



Slika 7.3: Grafici funkcija

x	-3.5	-2	$-\sqrt{3}$	1	π	$\frac{16}{5}$	5
$f(x)$	1	4	$-\pi$	5	0	90	$-\frac{\sqrt{7}}{\pi+2}$

Tabela 7.1: Tabelarno zadana funkcija

$$\boxed{f(x) = \sin(x^2 - 4x) + \frac{\log x - x^2}{x + 4}} \tag{7.1}$$

Realna funkcija jedne realne promjenljive. Neka je $f : X \mapsto Y$. Ako je $X \subseteq \mathbb{R}$ onda kažemo da je f funkcija jedne realne promjenljive, a ako je $Y \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je f realna funkcija.

7.1.1 Vrste preslikavanja

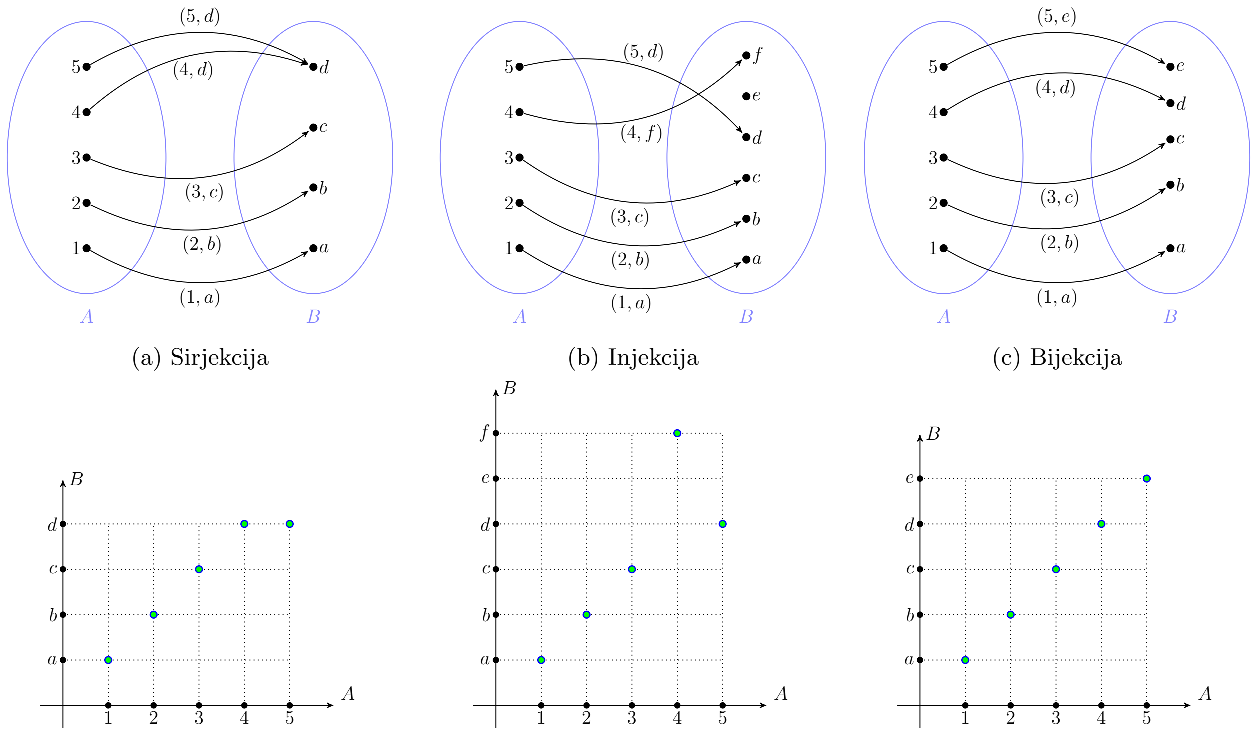
Neka $f : X \mapsto Y$, dakle svakom elementu $x \in X$ funkcija f pridružuje neki element $y \in Y$. Ne znamo ništa o tome da li su svi elementi skupa Y slika nekog elementa (originala) iz skupa X, kao i to da li je neki element

$y \in Y$ slika jednog ili više originala, vidjeti Sliku 7.1. Iz prethodno navedenog uvodimo nova preslikavanja koja imaju neke dodatne osobine, a koje nam obezbjeđuju da svi elementi skupa Y slike, zatim da svaki elementi $y \in Y$ bude slika samo jednog elementa iz skupa X.

Definicija 7.2 (Sirjekcija).

Za funkciju $f : X \mapsto Y$ kaže se da je preslikavanje skupa X na skup Y, ili da je sirjekcija skupa X na skup Y, ako je $R_f = Y$.

Iz definicije slijedi da je svaki $y \in Y$ slika bar jednog elementa $x \in X$, vidjeti Sliku 7.4a ili 7.4d.



(a) Sirjekcija (b) Injekcija (c) Bijekcija

(d) Sirjekcija (e) Injekcija (f) Bijekcija

Slika 7.4: Vrste preslikavanja: Sirjekcija, injekcija i bijekcija

Definicija 7.3 (Injekcija).

Za funkciju $f : X \mapsto Y$ kaže se da je injekcija ili injektivno preslikavanje, ako vrijedi

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Drugim riječima kod injektivnog preslikavanja karakteristično je da jednakost slika povlači jednakost originala ili različitim originalima odgovaraju različite slike, različiti originali slikaju se u različite slike, vidjeti Sliku 7.4b ili 7.4e.

I ako je neko preslikavanje istovremeno i sirjektivno i injektivno dobijamo novo preslikavanje dato u sljedećoj definiciji.

Definicija 7.4 (Bijekcija).

Funkcija $f : X \mapsto Y$ naziva se bijekcija ili bijektivno preslikavanje, ako je ona istovremeno i sirjekcija i injekcija.

Bijekcija se naziva još i uzajamno jednoznačno preslikavanje ili obostrano jednoznačno preslikavanje, vidjeti Sliku 7.4c ili 7.4f.

Definicija 7.5 (Kompozicija).

Ako su $f : X \mapsto Y$ i $g : Y \mapsto Z$ funkcije, tada funkciju $h : X \mapsto Z$ zadanu sa

$$h = \{(x, g(f(x))) : x \in X\}$$

zovemo složena funkcija (ili kompozicija, slaganje funkcija), funkcija f i g i pišemo $h = g \circ f$.

Dakle vrijedi $h(x) = g(f(x))$.

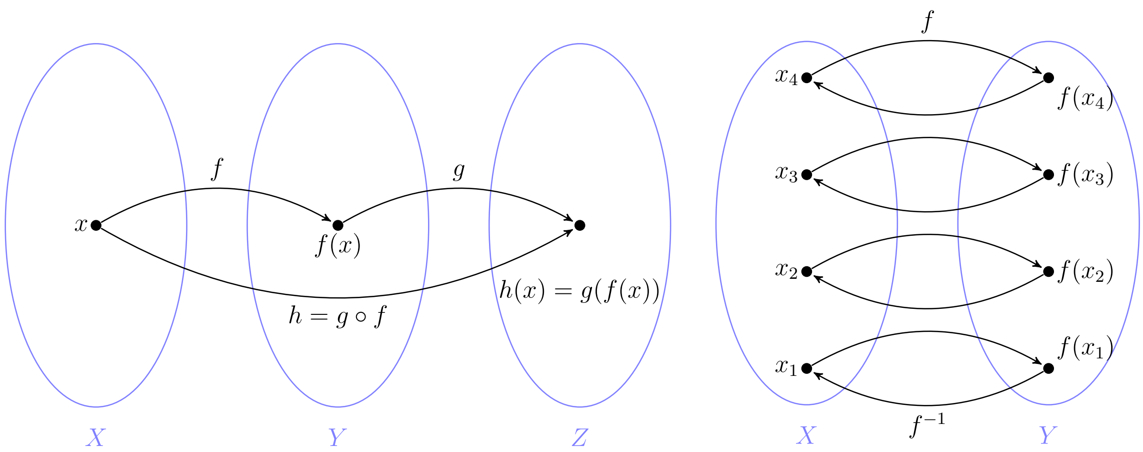
Za proizvoljne funkcije važi asocijativni zakon za kompoziciju funkcija. Za funkcije $f : X \mapsto Y$, $g : Y \mapsto Z$, i $h : Z \mapsto W$ vrijedi

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Svakoj funkciji $f : X \mapsto Y$, kao specijalnom slučaju relacije iz X u Y odgovara inverzna relacija $f^{-1} \subset Y \times X$ iz Y u X. U opštem slučaju relacija f^{-1} nije funkcija. U slučaju kada je f^{-1} funkcija onda se ona naziva inverzna funkcija, funkcije f. Uslov kada je inverzna relacija f^{-1} inverzna funkcija, funkcije f dat je u sljedećoj teoremi.

Teorema 7.1.

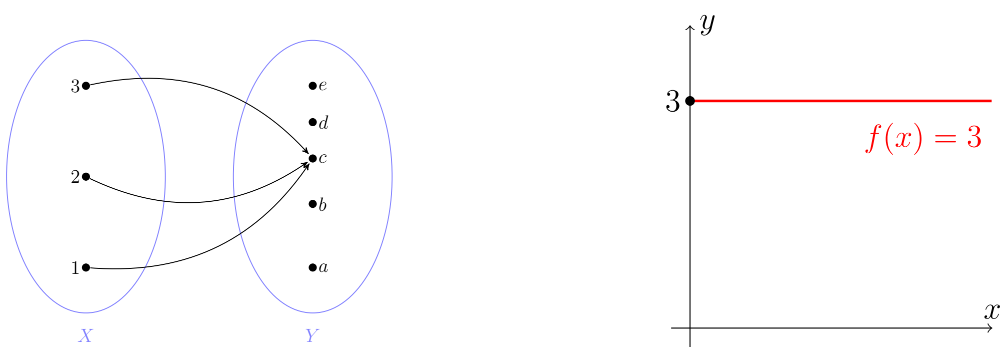
Inverzna relacija f^{-1} funkcije $f : X \mapsto Y$ biće funkcija $f^{-1} : Y \mapsto X$ ako i samo ako je f bijekcija.



(a) Kompozicija funkcija (b) Inverzna funkcija f^{-1} funkcije f

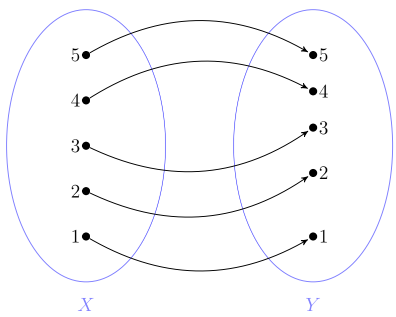
Slika 7.5: Kompozicija funkcija (preslikavanja) i inverzna funkcija

Osim navedenih vrsta preslikavanja, često susrećemo i konstantnu funkciju (preslikavanje) Slika 7.6 i identičku funkciju (preslikavanje) Slika 7.7.

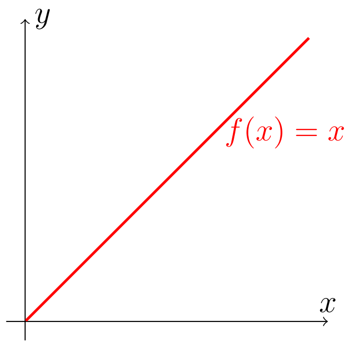


(a) Svi elementi skupa X se slikaju u element c (b) Grafik konstantne funkcije $f(x) = 3$

Slika 7.6: Primjeri konstantnih funkcija



(a) Svi elementi skupa X se slikaju u iste elemente



(b) Grafik identičke funkcije $f(x) = x$

Slika 7.7: Primjeri identičkih funkcija

7.1.2 Neke osobine realnih funkcija

Prilikom ispitivanja realnih funkcija jedne realne promjenljive $f : X \mapsto Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ susrećemo se sa pojmovima: nula funkcije, parnost i neparnost, konveksnost, konkavnost i prevojne tačke, monotonost, lokalni i globalni ekstremi, ograničenost, periodičnost te infimum i supremum. Osim toga za dvije funkcije vrijede i

(i) zbir funkcija $f + g : D_f \mapsto \mathbb{R}$,

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),$$

(ii) razlika funkcija $f - g : D_f \mapsto \mathbb{R}$,

$$(f - g)(x) := f(x) - g(x),$$

(iii) proizvod funkcija $f \cdot g : D_f \mapsto \mathbb{R}$,

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x),$$

(iv) količnik funkcija $\frac{f}{g} : D_f^\star \mapsto \mathbb{R}$, $D_f^\star = \{x \in D_f : g(x) \neq 0\}$,

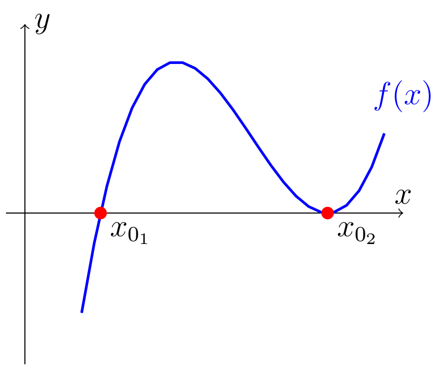
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Nule funkcije

Definicija 7.6 (Nule funkcije - vidjeti Sliku 7.8).

Neka je $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je $x_0 \in D_f$ nula funkcije f, ako je $f(x_0) = 0$.

Ako je x_0 nula funkcije f, onda grafik funkcije G_f ili dodiruje ili siječe x–osu u tački x_0, Slika 7.8.



Slika 7.8: Grafik funkcije koja siječe x–osu u tački x_{0_1} i dodiruje x–osu u tački x_{0_2}

Parnost–neparnost Ove osobine ima smisla razmatrati samo ako je definiciono područje D_f simetrično u odnosu na tačku $x = 0$.

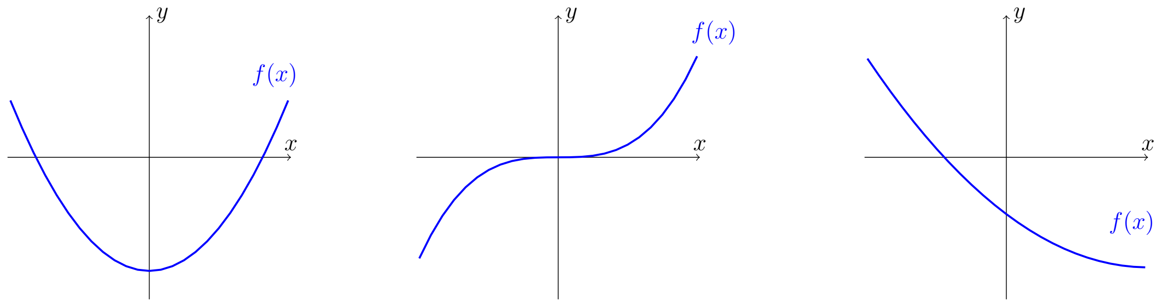
Definicija 7.7 (Parnost–neparnost).

Kažemo da je funkcija $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$, parna ako je

$$f(-x) = f(x),\ \forall x \in D_f.$$

Funkcija f je neparna ako je

$$f(-x) = -f(x),\ \forall \in D_f.$$



(a) Parna (b) Neparna (c) Ni parna ni neparna

Slika 7.9: Parna, neparna i funkcija koja nije ni parna ni neparna

Kod parne funkcije grafik je osno simetričan u odnosu na y–osu, dok je kod neparne funkcije grafik centralno simetričan u odnosu na koordinatni početak $O(0,0)$, Slika 7.9.

Primjer 7.3.

Date su funkcije
$(a)\ f(x) = x^2 + x\sin x;\ (b)\ f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{x^2+1};\ (c)\ f(x) = x^2 - 3x + 1.$
Ispitati da li su funkcije parne, neparne ili ni parne ni neparne.

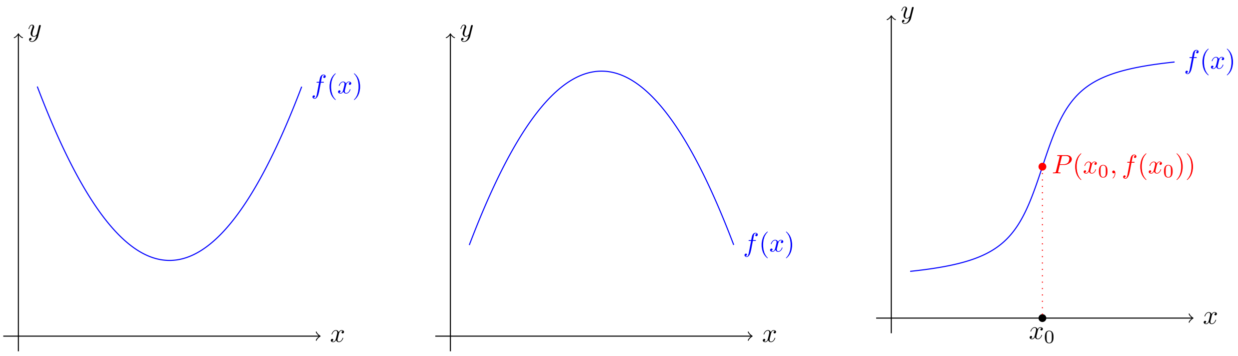
Rješenje:

$(a)\ f(-x) = (-x)^2 + (-x)\sin(-x) = x^2 + x\sin x = f(x)$, funkcija je parna;

$(b)\ f(-x) = \frac{2^{-x} - 2^{-(-x)}}{(-x)^2+1} = \frac{2^{-x} - 2^{x}}{x^2+1} = -\frac{2^{x} - 2^{-x}}{x^2+1} = -f(x)$, funkcija je neparna;

$(c)\ f(-x) = (-x)^2 - 3(-x) + 1 = x^2 + 3x + 1 \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x), \end{cases}$ funkcija nije ni parna ni neparna.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke Posmatrajmo sljedeće slike.



(a) (b) (c)

Slika 7.10: Grafici konveksne, konkavne i funkcije sa prevojnim tačkama

Na Slici 7.10a je grafik funkcije koji je "udubljen" ako pogledamo odozgo, sa druge strane na Slici 7.10b grafik je "ispučen" ako ponovo pogledamo odozgo, i na kraju na Slici 7.10c je grafik funkcije kod koje grafik prelazi u tački P sa "udubljenog" na "ispupčeni" dio. U sljedećoj definiciji data je precizna formulacija ovih osobina funkcije.

Definicija 7.8 (Konveksnost, konkavnost).

Kažemo da je funkcija $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ konveksna na intervalu $(a,b) \subseteq D_f$ ako je

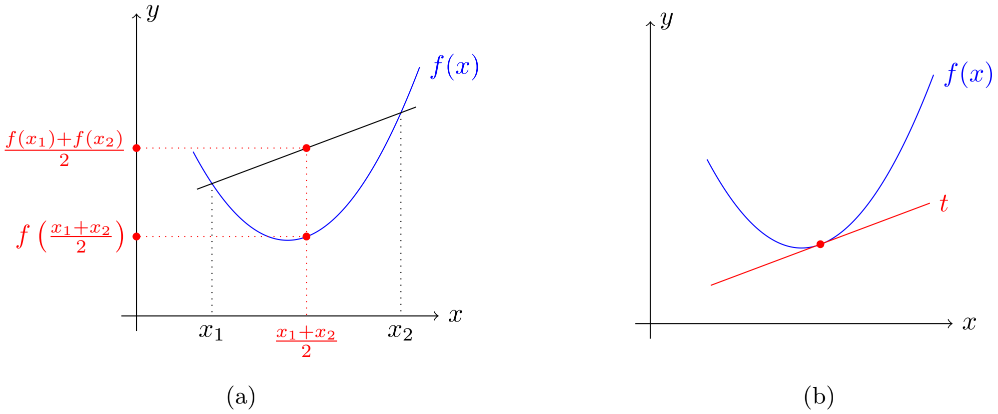
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \text{za svaki } x_1, x_2 \in (a,b). \tag{7.2}$$

Ako je u 7.2 vrijedi $\geqslant$, kažemo da je funkcija f konkavna na (a,b). Ako u 7.2 vrijedi stroga nejednakost, onda kažemo da je f strogo konveksna na (a,b). Analogno se definiše i pojam stroge konkavnosti.

Kažemo da $x_0 \in D_f$ prevojna tačka funkcije f ako postoji realan broj ε, takav da f strogo konveksna na $(x_0-\varepsilon, x_0)$ i strogo konkavna na $(x_0, x_0+\varepsilon)$ ili da je f strogo konkavna na $(x_0-\varepsilon, x_0)$ i strogo konveksna na $(x_0, x_0+\varepsilon)$.

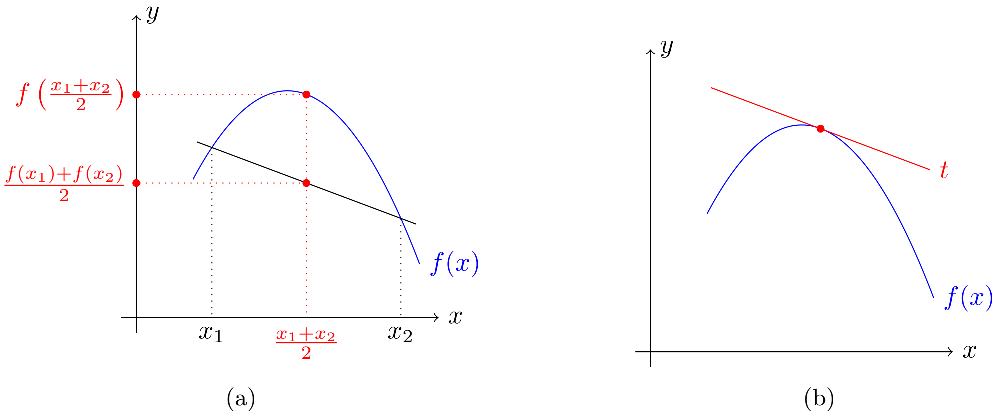
Prevojna tačka funkcije se naziva još i tačka infleksije.

Geometrijska interpretacija konveksnosti i konkavnosti. Na Slikama 7.11a i 7.11b predstavljeni su grafici strogo konveksnih funkcija na posmatranom skupu. Sa Slike 7.11a vidimo da vrijedi $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Na dijelu grafika gdje je funkcija strogo konveksna, grafik je iznad tangenti koje odgovaraju tom dijelu grafika Slika 7.11b.



Slika 7.11: Grafici konveksnih funkcija

Sa druge strane kod konkavnih funkcija, na Slike 7.12a vidimo da je $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, te da je na dijelu grafika gdje je funkcija konkavna, grafik ispod tangenti koje odgovaraju tom grafiku Slika 7.12b.



Slika 7.12: Grafici konkavnih funkcija

Monotonost funkcije

DEFINICIJA 7.9.

Kažemo da je funkcija $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ monotono rastuća na intervalu $(a, b) \subseteq D_f$ ako

$$(\forall x_1, x_2 \in (a, b))(x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)). \tag{7.3}$$

Kažemo da je funkcija $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ monotono opadajuća na intervalu $(a, b) \subseteq D_f$ ako

$$(\forall x_1, x_2 \in (a, b))(x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)). \tag{7.4}$$

Ako umjesto znaka $\leqslant$ u (7.4) stoji $<$, kažemo da je f strogo rastuća na intervalu (a, b). Analogno se definiše i strogo opadajuća funkcija, samo što mijenjamo $\leqslant$ sa $<$ i $\geqslant$ sa $>$.

Lokalni ekstremi funkcije

DEFINICIJA 7.10.

Kažemo da funkcija $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ u tački $x_0 \in (a, b)$ ima lokalni minimum ako postoji okolina $\mathcal{O}(x_0)$ tačke x_0 takva da je

$$f(x) \geqslant f(x_0) \text{ za sve } x \in \mathcal{O}(x_0).$$

Funkcija f u tački $x_0 \in (a, b)$ ima lokalni maksimum ako postoji okolina $\mathcal{O}(x_0)$ tačke x_0 takva da je

$$f(x) \leqslant f(x_0) \text{ za sve } x \in \mathcal{O}(x_0).$$

Ukoliko vrijede stroge nejednakosti za $x \neq x_0$, onda govorimo o strogom lokalnom minimumu i strogom lokalnom maksimumu.

Ograničenost, infimum i supremum funkcije

DEFINICIJA 7.11.

Kažemo da je realna funkcija $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$

(i) ograničena odozdo, ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je

$$f(x) \geqslant m \text{ za sve } x \in D_f; \tag{7.5}$$

(ii) ograničena odozgo, ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je

$$f(x) \leqslant M \text{ za sve } x \in D_f; \tag{7.6}$$

(iii) ograničena, ako je ograničena i odozdo i odozgo.

Svaki broj m za koji vrijedi (7.5) zovemo minoranta, a svaki broj M za koji vrijedi (7.6) zovemo majoranta funkcije f.

DEFINICIJA 7.12.

Ako je $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$

(i) ograničena odozdo, onda njenu najveću minorantu zovemo infimum i označavamo sa $\inf_{D_f} f$;

(ii) ograničena odozgo, onda njenu najmanju majorantu zovemo supremum i označavamo sa $\sup_{D_f} f$;

Globalni ekstrem

DEFINICIJA 7.13.

Kažemo da funkcija $f : D_F \mapsto \mathbb{R}$ u tački $x_0 \in D_f$ ima globalni minimum na D_f ako je $f(x_0) \leqslant f(x)$ za sve

$x \in D_f$.

Analogno se definiše i globalni maksimum na D_f. Ukoliko za sve $x \neq x_0$ vrijede stroge nejednakosti, tada se radi o globalnim ekstremima.

Periodičnost

DEFINICIJA 7.14.

Kažemo da je funkcija $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ periodična ako postoji pozitivan broj $T \in \mathbb{R}$, takav da je

$$f(x+T) = f(x) \text{ za sve } x \in D_f. \tag{7.7}$$

Najmanji broj T za koji vrijedi (7.7) zovemo osnovni period funkcije f.

PRIMJER 7.4.

Ispitati jesu li date funkcije peridočne, ako jesu odrediti osnovni period T,
(a) $f(x) = \sin x$; (b) $f(x) = x^2 + x$.
Rješenje:

(a) $f(x+T) = \sin(x+T) = \sin x \cos T + \cos x \sin T$, pa da bi bio ispunjen uslov $f(x+T) = f(x)$ mora biti vrijediti $\cos T = 1$ i $\sin T = 0$, a ovo je ispunjeno kada je $T = 2\pi$. Dakle, $\sin x$ je periodična funkcija sa osnovnim periodom $T = 2\pi$.

(b) $f(x+T) = (x+T)^2 + x + T = x^2 + 2xT + T^2 + x + T = x^2 + x + T(2x+T+1)$, uslov $f(x+t) = f(x)$ biće ispunjen kada je $T = 0$, pa funkcija f nije periodična.

7.2 Pregled baznih i nekih elementarnih funkcija

Bazne funkcije realne promjenljive su

1. Konstantna i identička (jedinična) funkcija;
2. Eksponencijalna i logaritamska funckcija;
3. Stepena funkcija;
4. Trigonometrijska funkcija kosinus (cos) i njena inverzna funkcija arkuskosinus (arccos).

Elementarne funkcije realne promjenljive dobijamo iz baznih funkcija konačnom primjenom algebarskih operacija $+, -, \cdot, :$ i konačnim brojem superpozicija tih funkcija.

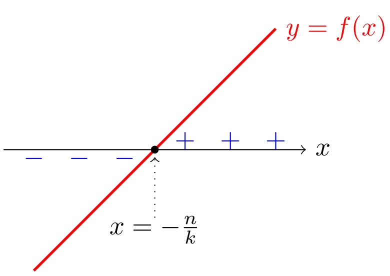
Linearna funkcija Jedan od najjednostavnijih primjera elementarne funkcije je linearna funkcija[1]. Opšti oblik linearne funkcije je

$$\boxed{f(x) = kx + n.}$$

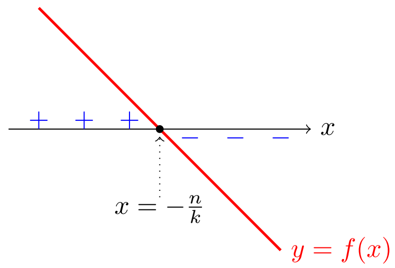
Vrijedi:

1. Definiciono područje ove funkcije je skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$.
2. Grafik ove funkcije je prava.
3. Parametar k je koeficijent pravca, a n je odsječak prave na y–osi.
4. Nula funkcije je u tački $\left(-\frac{n}{k}, 0\right)$, tj. za vrijednost argumenta $x = -\frac{n}{k}$.
5. Funkcija nije ograničena, i nema lokalnih ekstrema.
6. Slučaj $k > 0$ (Slika 7.13a)

[1] Funkcija koja će biti ovdje predstavljena je afina funkcija, a koja se pogrešno naziva linearna.



(a) Grafik funkcije $f(x) = kx + n$, $k > 0$



(b) Grafik funkcije $f(x) = kx + n$, $k < 0$

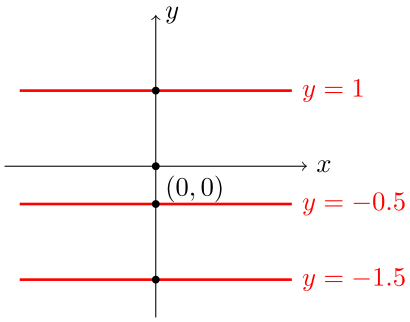
Slika 7.13: Grafici linearnih funkcija $f(x) = kx + n$ u slučaju $k > 0$ i $k < 0$

   (a) Funkcija raste $\forall x \in \mathbb{R}$;
   (b) Znak funkcije: $f(x) < 0$, $x \in \left(-\infty, -\frac{n}{k}\right)$, $f(x) > 0$, $x \in \left(-\frac{n}{k}, \infty\right)$.

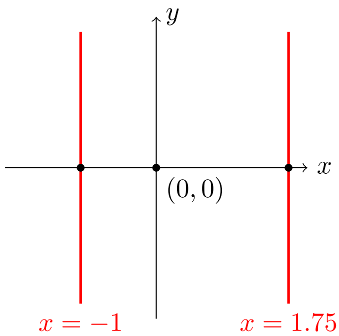
7. Slučaj $k < 0$ (Slika 7.13b)
   (a) Funkcija opada $\forall x \in \mathbb{R}$;
   (b) Znak funkcije: $f(x) > 0$, $x \in \left(-\infty, -\frac{n}{k}\right)$, $f(x) < 0$, $x \in \left(-\frac{n}{k}, \infty\right)$.

Specijalni slučajevi

1. U slučaju $n = 0$ grafik prave prolazi kroz koordinatni početak.
2. U slučaju $k = 0$ dobijamo konstantnu funkciju. Grafik ove funkcije je prava paralelna sa x–osom ili sama x –osa, kada je i $n = 0$. Grafici ovih pravih predstavljeni su na Slici 7.14a.



(a) Grafici funkcija oblika $f(x) = n$



(b) Prave oblika $x = a$, $a \in \mathbb{R}$

Slika 7.14: Grafici funkcija oblika $f(x) = const$, $(f(x) = n)$ i pravih $x = a$

Na Slici 7.14b predstavljene su prave oblika $x = a$, $a \in \mathbb{R}$. Ovo nisu funkcije u smislu kako je to ovdje uvedeno.

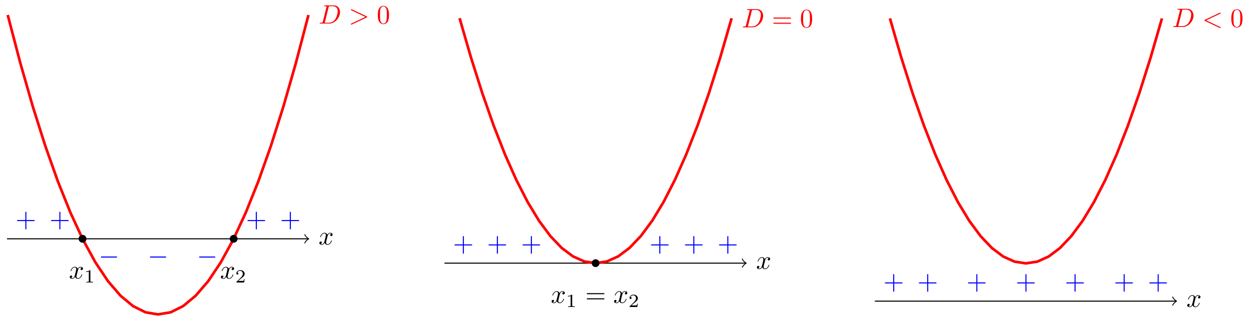
Kvadratna funkcija Opšti oblik kvadratne funkcije je

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0$$

1. Definiciono područje kvadratne funkcije je skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$.
2. Grafik ove funkcije je parabola.
3. Nule funkcije računamo po formuli

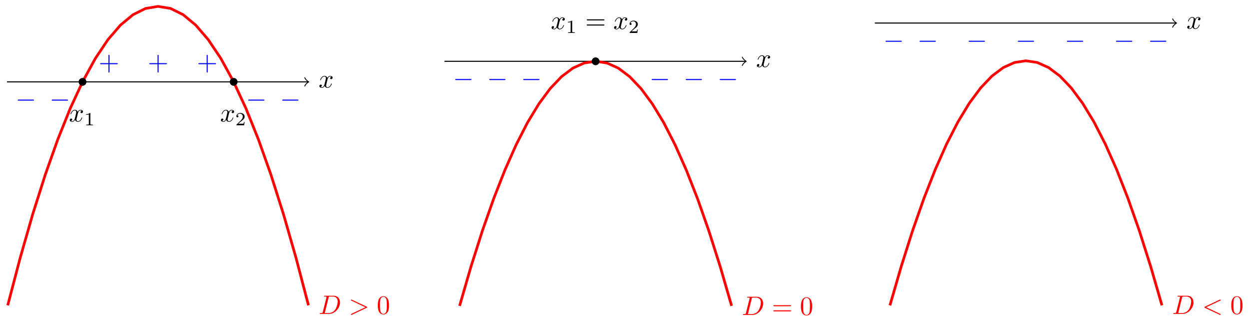
$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Veličina $D = b^2 - 4ac$ je diskriminanta, može biti pozitivna, jednaka nuli i negativna, i od vrijednosti diskriminante kvadratna funkcija može imati dvije realne i različite nule, jednu dvostruku nulu ili konjugovano–kompleksne nule.



(a) Diskriminanta $D > 0$ (b) Diskriminanta $D = 0$ (c) Diskriminanta $D < 0$

Slika 7.15: Grafici kvadratnih funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ za $a > 0$ i različite vrijednosti diskriminante D



(a) Diskriminanta $D > 0$ (b) Diskriminanta $D = 0$ (c) Diskriminanta $D < 0$

Slika 7.16: Grafici kvadratnih funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ za $a < 0$ i različite vrijednosti diskriminante D

4. Slučaj $a > 0$ i $D > 0$. Grafik odgovarajuće funkcije dat je na Slici 7.15a.
   (a) Funkcija je konveksna.
   (b) Ima lokalni minimum za $x = -\frac{b}{2a}$.
   (c) Znak funkcije, $f(x) > 0,\ \forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$, $f(x) < 0,\ x \in (x_1, x_2)$, nule funkcije su za x_1 i x_2.
   (d) Funkcija opada za $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, a raste za $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.
5. Slučaj $a > 0$ i $D = 0$. Grafik odgovarajuće funkcije dat su na Slici 7.15b.
   (a) Funkcija je konveksna.
   (b) Ima lokalni minimum za $x = -\frac{b}{2a}$.
   (c) Znak funkcije, $f(x) > 0,\ \forall x \in (-\infty, \infty) \setminus \{x_1\}$, nula funkcije je za x_1.
   (d) Funkcija opada za $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, a raste za $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$, $x_1 = -\frac{b}{2a}$.
6. Slučaj $a > 0$ i $D < 0$. Grafik odgovarajuće funkcije dat je na Slici 7.15c.
   (a) Funkcija je konveksna.
   (b) Ima lokalni minimum za $x = -\frac{b}{2a}$.
   (c) Znak funkcije, $f(x) > 0,\ \forall x \in (-\infty, \infty)$.
   (d) Funkcija opada za $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, a raste za $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.
7. Slučaj $a < 0$ i $D > 0$. Grafik odgovarajuće funkcije dat je na Slici 7.16a.
   (a) Funkcija je konkavna.
   (b) Ima lokalni maksimum za $x = -\frac{b}{2a}$.
   (c) Znak funkcije, $f(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$, $f(x) > 0,\ x \in (x_1, x_2)$, nule funkcije su za x_1 i x_2.
   (d) Funkcija raste za $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, a opada za $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.

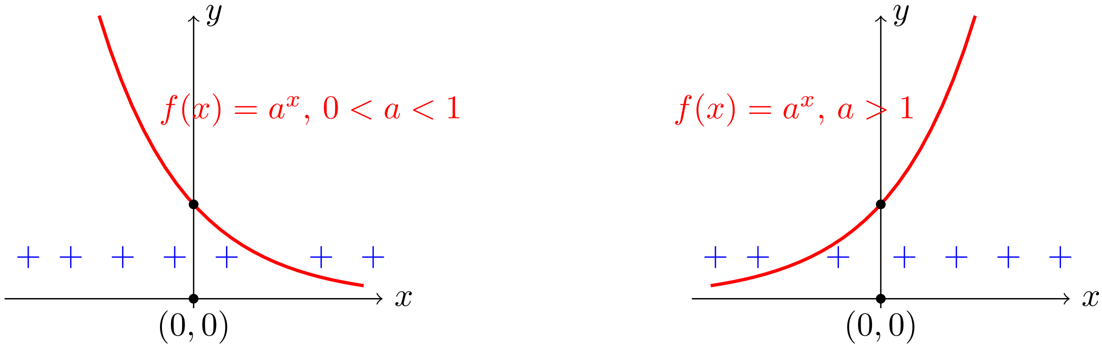
8. Slučaj $a < 0$ i $D = 0$. Grafik odgovarajuće funkcije dat je na Slici 7.16b.
   (a) Funkcija je konkavna.
   (b) Ima lokalni maksimum za $x = -\frac{b}{2a}$.
   (c) Znak funkcije, $f(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, \infty) \setminus \{x_1\}$, nula funkcije je za x_1.
   (d) Funkcija raste za $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, a opada za $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$, $x_1 = -\frac{b}{2a}$.
9. Slučaj $a > 0$ i $D < 0$. Grafik odgovarajuće funkcije dat je na Slici 7.16c.
   (a) Funkcija je konkavna.
   (b) Ima lokalni maksimum za $x = -\frac{b}{2a}$.
   (c) Znak funkcije, $f(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, \infty)$.
   (d) Funkcija raste za $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, a opada za $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.

Eksponencijalna funkcija Opšti oblik eksponencijalne funkcije je

$$\boxed{f(x) = a^x,\ 0 < a \neq 1.} \tag{7.8}$$

Broj a je baza. Razlikujemo dva slučaja i to: $0 < a < 1$ i $a > 1$. Vrijedi

1. Definiciono područje eksponencijalne funkcije je skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$.
2. Eksponencijalna funkcija (7.17) nema nula i eksponencijalna funkcija uvijek je pozitivna, tj. $f(x) > 0,\ \forall x \in (-\infty, \infty)$.
3. Funkcija (7.17) je konveksna.
4. Slučaj $0 < a < 1$. Grafik ove funkcije je dat na Slici 7.17a.
   (a) Funkcija opada za $\forall x \in \mathbb{R}$.
   (b) Ima desnu horizontalni asimptotu $y = 0$.
5. Slučaj $a > 1$. Grafik ove funkcije je dat na Slici 7.17b.
   (a) Funkcija raste za $\forall x \in \mathbb{R}$.
   (b) Ima lijevu horizontalni asimptotu $y = 0$.



(a) Slučaj $0 < a < 1$ (b) Slučaj $a > 1$

Slika 7.17: Grafici eksponencijanih funkcija $f(x) = a^x$ za $0 < a < 1$ i $a > 1$

Logaritamska funkcija Opšti oblik logaritamske funkcije je

$$f(x) = \log_a x, \ 0 < a \neq 1. \tag{7.9}$$

Broj a je baza logaritma, a x je argument (logaritmand ili numerus). I ovdje, kako kod eksponencijalne funkcije, razlikujemo dva slučaja u zavisnosti od vrijednosti baze a. Baza može biti bilo koji realan broj, koji zadovoljava uslove $0 < a \wedge a \neq 1$, međutim dvije baze se više koriste od ostalih, a to su $a = 10$ i $a = e$. U slučaju baze $a = e$ koristimo oznaku

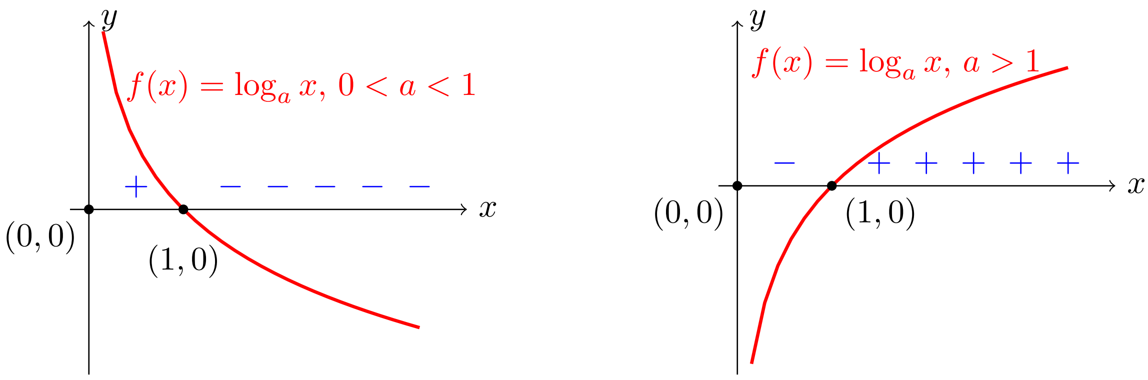
$$\ln x,$$

ne pišemo oznaku za bazu i umjesto log koristimo ln . Ovaj logaritam se naziva prirodni ili Neperov [2] logaritam. U slučaju baze $a = 10$ za logaritam koristimo oznaku

$$\log x,$$

tj. bez oznake za bazu. Ovaj logaritam se naziva dekadski ili Briggsov [3] logaritam.

1. Definiciono područje je $x \in (0, \infty)$.



(a) Slučaj $0 < a < 1$ (b) Slučaj $a > 1$

Slika 7.18: Grafici logaritamskih $f(x) = \log_a x$ za $0 < a < 1$ i $a > 1$

2. Slučaj $0 < a < 1$. Grafik ove funkcije je dat na Slici 7.18a.
   (a) Funkcija je opadajuća za $\forall x \in D_f$, tj. $\forall x \in (0, \infty)$.
   (b) Funkcija ima nulu za $x = 1$.
   (c) Znak funkcije: $f(x) > 0, \forall x \in (0,1)$, $f(x) < 0$, $\forall x \in (1, \infty)$.
3. Slučaj $a > 1$. Grafik ove funkcije je dat na Slici 7.18b.
   (a) Funkcija je rastuća za $\forall x \in D_f$, tj. $\forall x \in (0, \infty)$.
   (b) Funkcija ima nulu za $x = 1$.
   (c) Znak funkcije: $f(x) < 0, \forall x \in (0,1)$, $f(x) > 0$, $\forall x \in (1, \infty)$.

Trigonometrijske i inverzne trigonometrijske funkcije Trigonometrijske funkcije su: kosinus, sinus, tangens, kotangens, sekans i kosekans.

Funkcija kosinus

1. Definisana $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Kosinus je parna funkcija, tj. $(\forall x \in D_f) \ \cos(-x) = \cos x$.
3. Periodična je funkcija, tj. vrijedi $(\exists T \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) \ \cos(x + T) = \cos x$, najmanji broj T sa ovakvom osobinom naziva se osnovni period funkcije. Za funkciju kosinus $T = 2\pi$.

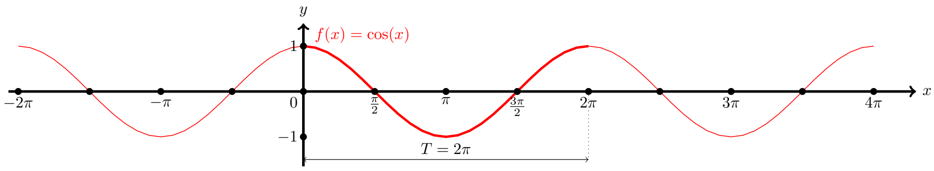
[2] John Napier of Merchiston (1 februar 1550.godine – 4. april 1617.godine); poznat i kako Neper, Nepair; nadimak Marvellous Merchiston) bio je škotski zemljoposjednik koji se bavio matematikom, fiziokom, astronomijom.
[3] Henry Briggs (february 1561.godine – 26 januar 1630. godine) bio je engleski matematičar

4. Nule funkcije su za $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

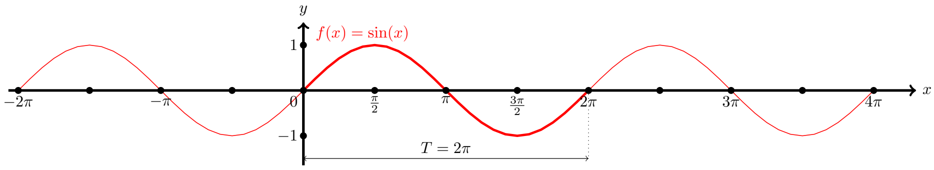
5. Znak funkcije: $f(x) > 0$, $x \in \left(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right)$, $f(x) < 0$, $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$.

6. Lokalni maksimumi su tačkama $x_{\max} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a lokalni minimumi u $x_{\min} = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Funkcija opada za $x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, a raste $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$.



(a) Funkcija $\cos x$



(b) Funkcija $\sin x$

Slika 7.19: Grafici trigonometrijskih funkcija $\cos x$ i $\sin x$

Funkcija sinus

1. Definisana $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Sinus je neparna funkcija, tj. $\left(\forall x \in D_f\right) \sin(-x) = -\sin x$.

3. Periodična je funkcija, tj. vrijedi $(\exists T \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \sin(x + T) = \sin x$, najmanji broj T sa ovakvom osobinom naziva se osnovni period funkcije. Za funkciju sinus $T = 2\pi$.

4. Nule funkcije su za $x_0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Znak funkcije: $f(x) > 0$, $x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $f(x) < 0$, $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$.

6. Lokalni maksimumi su tačkama $x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a lokalni minimumi u $x_{\min} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Funkcija raste za $x \in \left(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right)$, a opada $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$.

Funkcija tangens

1. Definisana $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ tj. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Tangens je neparna funkcija, tj. $\left(\forall x \in D_f\right) \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

3. Periodična je funkcija, tj. vrijedi $(\exists T \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$, najmanji broj T sa ovakvom osobinom naziva se osnovni period funkcije. Za funkciju tangens $T = \pi$.

4. Nule funkcije su za $x_0 = 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Znak funkcije: $f(x) > 0$, $x \in \left(0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $f(x) < 0$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi\right)$.

6. Funkcija nema lokalnih ekstremuma.

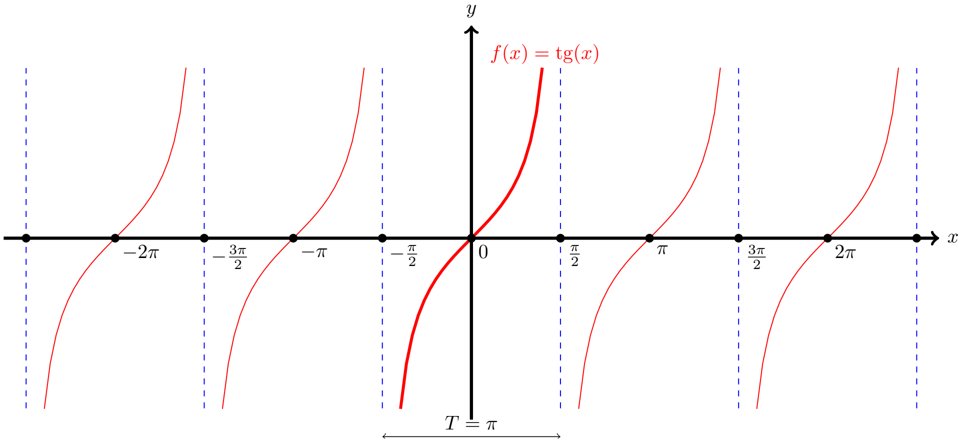
7. Funkcija raste za $\forall x \in D_f$.

Funkcija kotangens

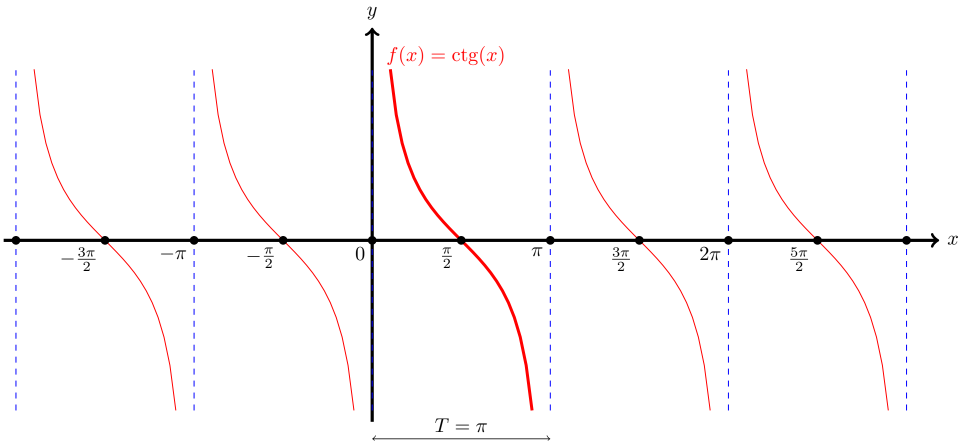
1. Definisana $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ tj. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Kotangens je neparna funkcija, tj. $\left(\forall x \in D_f\right) \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.

3. Periodična je funkcija, tj. vrijedi $(\exists T \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \operatorname{ctg}(x + T) = \operatorname{ctg} x$, najmanji broj T sa ovakvom osobinom naziva se osnovni period funkcije. Za funkciju kotangens $T = \pi$.



(a) Funkcija $\mathrm{tg}\, x$



(b) Funkcija $\mathrm{ctg}\, x$

Slika 7.20: Grafici trigonometrijskih funkcija $\mathrm{tg}\, x$ i $\mathrm{ctg}\, x$

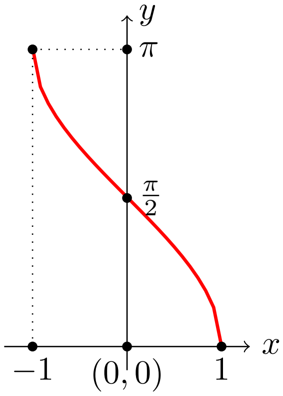
4. Nule funkcije su za $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. Znak funkcije: $f(x) > 0$, $x \in \left(0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $f(x) < 0$, $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$.
6. Funkcija nema lokalnih ekstremuma.
7. Funkcija opada za $\forall x \in D_f$.

Funkcija arkus kosinus

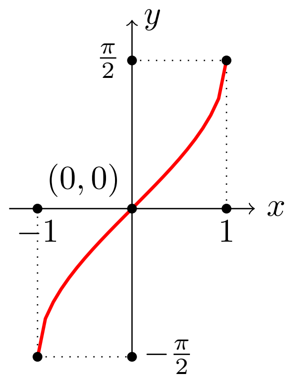
1. Grafik funkcije dat je na Slici 7.21a;
2. Funkcija je definisana za $\forall x \in [-1, 1]$, tj. $D_f = [-1, 1]$;
3. Funkcija je opadajuća $\forall x \in D_f$;
4. Znak $f(x) > 0$, $\forall x \in [-1, 1)$, $f(x) = 0$ za $x = 1$;
5. Ograničena je $(\forall x \in D_f)\ 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$;

Funkcija arkus sinus

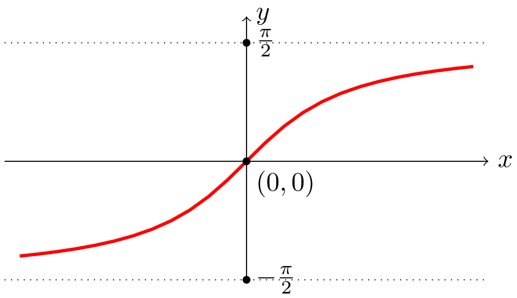
1. Grafik funkcije dat je na Slici 7.21b;
2. Funkcija je definisana za $\forall x \in [-1, 1]$, tj. $D_f = [-1, 1]$;
3. Funkcija je rastuća $\forall x \in D_f$;
4. Znak $f(x) < 0$, $\forall x \in [-1, 0)$, $f(x) > 0$, $\forall x \in (0, 1]$, nule funkcije $f(x) = 0$ je za $x = 0$;
5. Ograničena je $(\forall x \in D_f)\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$;



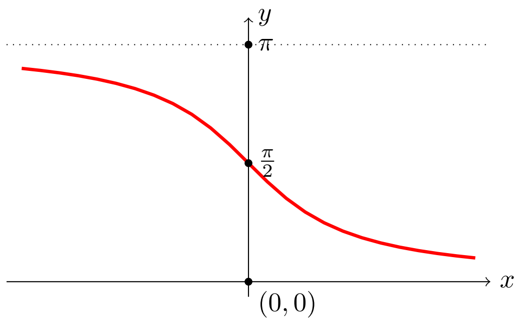
(a) Funkcija $\arccos x$



(b) Funkcija $\arcsin x$



(c) Funkcija $\operatorname{arctg} x$



(d) Funkcija $\operatorname{arcctg} x$

Slika 7.21: Grafici inverznih trigonometrijskih funkcija $\arccos x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arcctg} x$

Funkcija arkus tangens

1. Grafik funkcije dat je na Slici 7.21c;
2. Funkcija je definisana za $\forall x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ tj. $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$;
3. Funkcija je rastuća $\forall x \in D_f$;
4. Znak $f(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, 0)$, $f(x) > 0$, $x \in (0, \infty)$, nula funkcije $f(x) = 0$ za $x = 0$:
5. Ograničena je $(\forall x \in D_f)\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arctg} x \leqslant \frac{\pi}{2}$;
6. Ima lijevu horizontalnu asimptotu $y = -\frac{\pi}{2}$ i desnu horizontalnu asimptotu $y = \frac{\pi}{2}$.

Funkcija arkus kotangens

1. Grafik funkcije dat je na Slici 7.21d;
2. Funkcija je definisana za $\forall x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ tj. $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$;
3. Funkcija je opadajuća $\forall x \in D_f$;
4. Znak $f(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty, \infty)$;
5. Ograničena je $(\forall x \in D_f)\ 0 \leqslant \operatorname{arcctg} x \leqslant \pi$;
6. Ima lijevu horizontalnu asimptotu $y = \pi$ i desnu horizontalnu asimptotu $y = 0$.

7.3 Brojni nizovi

Neka su $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva i $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva.

PRIMJER 7.5.

$$
\begin{aligned}
&1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\dots \\
&1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots \\
&2,\ 4,\ 6,\ 8,\dots \\
&1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \dots \\
&1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{4}},\dots \\
&a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \dots
\end{aligned} \tag{7.10}
$$

Definicija 7.15 (Niz).

Svako preslikavanje $a : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ zove se realni niz.

Elementi skupa vrijednosti niza su $a(1),\ a(2),\ a(3),\dots,a(n),\dots$ koje kraće označavamo sa $a_1,\ a_2,\dots,a_n,\dots$ i zovemo ih članovi niza. Za prvi red (7.10) iz Primjera 7.5 vrijedi $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\dots$ Član niza a_n je n–ti član niza ili opšti član niza. Niz je određen ako mu je poznat opšti član. Broj n je indeks opšteg člana. Niz se obilježava sa $(a_n),\ n = 1,2\dots$ ili $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ili $(a_n),\ n \in \mathbb{N}$ ili jednostavno kratko sa (a_n). Skup $\mathbb{N}$ je domen ili skup indeksa niza (a_n), dok se skup $a(\mathbb{N})$ zove skup vrijednosti ili kodomen niza (a_n).

Primjer 7.6.

Ako je poznat opšti član niza a_n odrediti nekoliko prvih članova niza.
$(a)\ a_n = \frac{1}{n+1}$, $(b)\ a_n = \frac{1}{2^n}$, $(c)\ a_n = n^2$.

Rješenje:

(a) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\dots$

(b) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3}\ \dots$

(c) $1,\ 4,\ 9,\dots$

Grafički prikaz niza Niz (a_n) na brojnoj pravoj predstavljamo tako što članovima niza pridružujemo odgovarajuće tačke brojne prave.

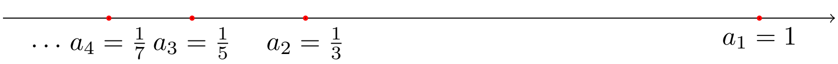
Primjer 7.7.

Predstaviti na brojnoj osi nizove
$(a)\ a_n = \frac{1}{2n-1}$, $(b)\ a_n = \frac{n-1}{n}$.

Rješenje:

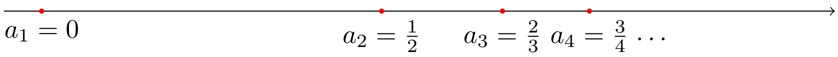
(a) $(a_n) = 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\frac{1}{7},\dots$ (vidjeti Sliku 7.22);

(b) $(a_n) = 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots$ (vidjeti Sliku 7.23).



Slika 7.22: Tačke niza čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{2n-1}$

Članove niza možemo predstavljati i u pravouglom koordinatnom sistemu.

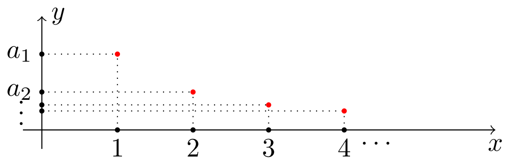


Slika 7.23: Tačke niza čiji je opšti član $a_n = \frac{n-1}{n}$

Primjer 7.8.

Predstaviti u pravouglom koordinatnom sistemu članove niza čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$.

Rješenje: Vidjeti Sliku 7.24.



Slika 7.24: Članovi niza u koordinatnom pravouglom sistemu čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$, predstavljeni su crvenim tačkama

Definicija 7.16 (Aritmetički niz).

Niz (a_n) kod kojeg za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_{n+1} - a_n = d$, $d \in \mathbb{R}$, naziva se aritmetički niz.

Broj d je razlika ili diferencija niza. Opšti član ovog niz je

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

dok se suma S_n prvih n članova aritmetičkog niza računa

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

ili

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d].$$

Iz definicije aritmetičkog niza vrijedi $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ pa je

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

Dakle svaki član aritmetičkog niza (osim prvog člana) je aritmetička sredina prethodnog i sljedećeg člana, otuda i ime aritmetičkog niza.

Definicija 7.17 (Geometrijski niz).

Niz (a_n) za koji važi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \; q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \; \forall n \in \mathbb{N},$$

naziva se geometrijski niz.

Broj q je količnik niza. Opšti član je

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

dok sumu S_n prvih n članova računamo po formuli

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},\ q \neq 1.$$

Iz same definicije geometrijskog niza je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, pa je

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}},$$

tj. svaki član, osim prvog, geometrijskog niza je geometrijska sredina prethodnog i sljedećeg člana, odakle je geometrijski niz dobio ime.

Granična vrijednost niza

Definicija 7.18 (ε–okolina tačke).

Interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ nazivamo ε–okolina tačke x_0. Broj ε je poluprečnik okoline.

Okolina tačke $+\infty$ je interval $(M, +\infty)$, gdje je M realan broj, dok je okolina tačke $-\infty$ interval $(-\infty, M)$, m je realan broj.

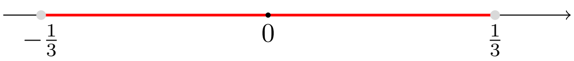
Dakle ε–okolina tačke x_0 je skup realnih brojeva za koje vrijedi $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, odnosno $|x - x_0| < \varepsilon$.

Primjer 7.9.

Odrediti ε–okolinu tačke $x_0 = 0$, ako je $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

Rješenje:

Tražena ε–okolina je interval $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, odnosno skup tačaka koje imaju osobinu $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$, tj. $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}\}$, vidjeti Sliku 7.34



Slika 7.25: ε–okolina tačke $x_0 = 0$, za poluprečnik konvergencije $\frac{1}{3}$

Definicija 7.19 (Tačka nagomilavanja niza).

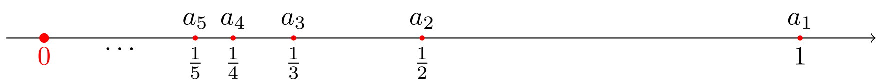
Tačka x_0 je tačka nagomilavanja niza (a_n) ako se u svakoj njenoj ε–okolini nalazi beskonačno mnogo članova niza (a_n).

Primjer 7.10.

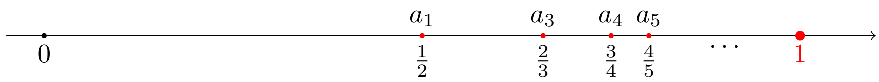
Odrediti tačke nagomilavanja za nizove sa opštim članovima
$(a)\ a_n = \frac{1}{n}$, $(b)\ a_n = \frac{n}{n+1}$, $(c)\ a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$.

Rješenje:

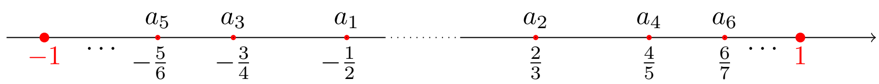
1. Članovima niza su $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots,$ (vidjeti Sliku 7.26);
2. Članovima niza su $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots,$ (vidjeti Sliku 7.27);
3. Članovima niza su $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots,$ (vidjeti Sliku 7.28).



Slika 7.26: Članovi niza čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$, dakle tačka nagomilavanja je 0.



Slika 7.27: Članovi niza čiji je opšti član $a_n = \frac{n}{n+1}$, dakle tačka nagomilavanja je 1.



Slika 7.28: Članovi niza čiji je opšti član $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$, pa ovaj niz ima dvije tačke nagomilavanja i to -1 i 1.

NAPOMENA 7.2.

Izraz "gotovo svi članovi niza" znači svi članovi niza osim njih konačno mnogo.

DEFINICIJA 7.20 (Granična vrijednost niza).

Ako postoji tačka x_0 takva da se u svakoj njenoj ε–okolini nalaze skoro svi članovi niza (a_n), kažemo da je niz konvergentan i da je x_0 njegova granična vrijednost (ili limes).

Definiciji 7.20 ekvivalentna je sljedeća definicija.

DEFINICIJA 7.21.

Niz (a_n) je konvergentan i x_0 mu je granična vrijednost, ako za svako ε postoji prirodan broj n_0 (određen u zavisnosti od ε) takav da je

$$|a_n - x_0| < \varepsilon,$$

za svako $n > n_0$.

Ovo se piše $a_n \to x_0$, $n \to \infty$ ili $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ ili $\lim a_n = x_0$ i kaže da niz (a_n) konvergira ka x_0 ili da a_n teži ka x_0.

Konvergenta niz ima samo jednu tačku nagomilavanja, ova tvrdnja iskazana je u sljedećoj teoremi.

TEOREMA 7.2.

Ako niz (a_n) ima graničnu vrijednost ona je jedinstvena.

Drugim riječima ako $a_n \to a$ i $a_n \to b$, tada je $a = b$.

DEFINICIJA 7.22.

Za niz koji nije konvergentan kaže se da je divergentan.

DEFINICIJA 7.23 (Ograničeni niz).

Niz (a_n) je ograničen sa gornje strane ako postoji realan broj M takav da je $a_n \leq M$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Broj M zove se gornja granica niza (a_n). Niz (a_n) je ograničen sa donje strane ako postoji realan broj m takav da je $m \leq a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Broj m zove se donja granica niza (a_n). Niz (a_n) je ograničen ako je ograničen i sa gornje i sa donje strane.

Primjer 7.11.

(a) Neka je dat niz čiji je opšti član $a_n = n$. Skup vrijednosti ovog niza je $\{1, 2, 3, \dots\}$. Vidimo da je $1 \leqslant a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, pa možemo donju granicu izabrati $m = 1$, tj. niz je ograničen odozdo.

(b) Neka je $a_n = 5 - n$ opšti član niza (a_n). Skup vrijednosti je $\{4, 3, 2, 1, 0, -1, \dots\}$. Vrijedi $a_n \leqslant 4$, pa izaberimo gornju granicu $M = 4$. Dakle niz je ograničen odozgo.

(c) Neka je sada $a_n = \frac{1}{n}$. Skup vrijednosti niza je $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Vrijedi $0 < a_n \leqslant 1$, pa možemo izabrati $m = 0$ i $M = 1$, dakle niz je ograničen i odozdo i odozgo, tj. ograničen je.

Definicija 7.24 (Monoton niz).

Niz (a_n) je

(a) rastući ako je $a_{n+1} \geqslant a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$;

(b) strogo rastući ako je $a_{n+1} > a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$;

(c) opadajući ako je $a_{n+1} \leqslant a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$;

(d) strogo opadajući ako je $a_{n+1} < a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Napomena 7.3.

Nizove definisane pod (a), (b), (c) i (d) skraćeno zovemo monotoni nizovi.

Teorema 7.3 (Računanje limesa).

Neka su (a_n) *i* (b_n) *konvergentni nizovi i neka je* $\lim a_n = a$ *i* $\lim b_n = b$, *tada vrijedi*

(1) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n = a \pm b$;

(2) $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = a \cdot b$;

(3) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$;

(4) $c \cdot \lim a_n = c \cdot \lim a_n = c \cdot a$;

(5) $\lim(a_n)^k = (\lim a_n)^k = a^k$.

U Primjeru 7.10 vidjeli smo da niz čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$ ima jednu tačku nagomilavanja i to $x_0 = 0$, tj. da se u svakoj ε–okolini tačke $x_0 = 0$ nalaze skoro svi članovi niza, pa sada na osnovu Definicije 7.20 vrijedi sljedeći limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{7.11}$$

Primjer 7.12.

Izračunati limese

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}$, (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{6n-4}$,
(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-2n-4n^2}{3n^2-2n+5}$, (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2-n+1}{4n^2+2n+3}$, (g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^4+n^3+n+4}{n^2+3n+10}$,
(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+10}{-n^4+n^3+n+4}$, (i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3}}{n-4}$, (j) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-4}{\sqrt[3]{n^3+n^2+3}}$,
(k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, (l) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-n\right)$, (m) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$,
(n) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$, (o) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+4^2\ldots+4^{n-1}}{1+6+6^2+\ldots+6^{n-1}}$; (p) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

Rješenje:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=2\cdot 0=0;$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0\cdot 0=0;$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}:\dfrac{n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}=1;$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{6n-4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{6n-4}:\dfrac{n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{1}{n}}{6-\frac{4}{n}}=\dfrac{2}{3};$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-2n-4n^2}{3n^2-2n+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-2n-4n^2}{3n^2-2n+5}:\dfrac{n^2}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n}-4}{3-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}=-\dfrac{4}{3};$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2-n+1}{4n^2+2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2-n+1}{4n^2+2n+3}:\dfrac{n^2}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}=+\infty;$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^4+n^3+n+4}{n^2+3n+10}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^4+n^3+n+4}{n^2+3n+10}:\dfrac{n^2}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2+n+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{10}{n^2}}=-\infty;$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+10}{-n^4+n^3+n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+10}{-n^4+n^3+n+4}:\dfrac{n^4}{n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}+\frac{10}{n^4}}{-1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{4}{n^4}}=0;$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3}}{n-4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3}}{n-4}:\dfrac{n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\sqrt{n^2+3}}{n}}{1-\frac{4}{n}}==\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{n^2+3}{n^2}}}{1-\frac{4}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}}{1-\frac{4}{n}}=1;$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-4}{\sqrt[3]{n^3+n^2+3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-4}{\sqrt[3]{n^3+n^2+3}}:\dfrac{n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{4}{n}}{\frac{\sqrt[3]{n^3+n^2+3}}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{4}{n}}{\sqrt[3]{\frac{n^3+n^2+3}{n^3}}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{4}{n}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}}}=1;$

(k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0;$

(l) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-n\right)\cdot\dfrac{\sqrt{n^2+2n+2}+n}{\sqrt{n^2+2n+2}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+2n+2}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+2n+2}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+2}{\sqrt{n^2+2n+2}+n}:\dfrac{n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+2n+2}+n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+1}=1;$

(m) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\cdot\dfrac{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\left(\sqrt[3]{n}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\left(\sqrt[3]{n}\right)^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\left(\sqrt[3]{n}\right)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\left(\sqrt[3]{n}\right)^2}=0;$

(n) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$

U brojniku je suma prvih n članova aritmetičkog niza, vrijedi $a_1=1$, $a_n=n$, $d=1$. Sumu prvih n članova aritmetičkog niza računamo po formuli $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$, pa je $1+2+\ldots+n=\frac{n}{2}(1+n)$, sada je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{2n^2}:\dfrac{n^2}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{2}=\dfrac{1}{2};$

(o) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+4^2\ldots+4^{n-1}}{1+6+6^2+\ldots+6^{n-1}}$. I u brojniku i u nazivniku su sume prvih n članova geometrijskog niza. Ove sume računamo po formuli $S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$. Za sumu u brojniku količnik je $q=4$, dok je za sumu u nazivniku količnik je $q=6$, prvi član za oba niza je $a_1=1$. Sada vrijedi

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+4^2\ldots+4^{n-1}}{1+6+6^2+\ldots+6^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot\frac{4^n-1}{4-1}}{1\cdot\frac{6^n-1}{6-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5(4^n-1)}{3(6^n-1)}:\dfrac{6^n}{6^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5(\frac{4^n}{6^n}-\frac{1}{6^n})}{3(1-\frac{1}{6^n})}=0;$

(p) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$

Svi razlomci u $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ dobijeni su po istom obrascu, uvrštavajući $n=1$ u $\frac{1}{n(n+1)}$ dobijen je razlomak $\frac{1}{1\cdot2},\ldots$ Zbog toga šablon za razlaganje $\frac{1}{n(n+1)}$ na proste razlomke možemo iskoristiti za razlaganje svih razlomaka koji se pojavljuju u limesu.

Razložimo razlomak $\frac{1}{n(n+1)}$ na sljedeći način

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1},$$

gdje su A i B konstante koje trebamo odrediti. Dakle, vrijedi

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}=\frac{(A+B)n+A}{n(n+1)},$$

da bi polazni i posljednji razlomak bili isti, moraju biti isti izrazi u brojniku i nazivniku. Nazivnici su isti, a brojnici će biti isti ako su koeficijenti uz odgovarajuće stepene isti. Iz posljednjeg uslova dobijamo sistem

$$\begin{aligned}A+B&=0\\A&=1.\end{aligned}$$

Rješenje sistema je $A=1$, $B=-1$, pa je

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Primjenjujući posljednje pravilo za razlaganje razlomaka dobijamo

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Pa je sada

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Broj e
Vrijedi teorema.

Teorema 7.4.

Niz (a_n) *čiji je opšti član* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *je konvergentan.*

Granična vrijednost ovog niza je broj e. Broj e je baza prirodnog ili Neperovog logaritma. Broj e je iracionalan broj i njegova vrijednost, data na nekoliko decimalnih mjesta, je $e = 2.7182818284\ldots$

Dakle, vrijedi

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e} \tag{7.12}$$

Primjer 7.13.

Izračunati limese

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n;\ (b)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n+5}\right)^n;\ (c)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)^n;$$

$$(d)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{3n-1};\ (e)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n;\ (f)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2+n+3}{6n^2+n+1}\right)^{n^2+n};$$

$$(g)\ \lim_{n\to\infty} n\left(\ln n - \ln(n+2)\right);\ (h)\ \lim_{n\to\infty}(3n+1)\left(\ln(n^2+2n+4)-\ln(n^2+n+2)\right).$$

Rješenje:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}\cdot\frac{5}{n}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{5}{n}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} e^5 = e^5;$$

$$(b)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n+5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n+5}\right)^{(4n+5)\cdot\frac{1}{4n+5}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{4n+5}\cdot n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4n+5}\,:\,\frac{n}{n}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4+\frac{5}{n}}} = e^{\frac{1}{4}};$$

$$(c)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n\cdot\frac{1}{3n}\cdot(-n)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{3n}\cdot(-n)} = e^{-\frac{1}{3}};$$

$$(d)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{3n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n\cdot\frac{1}{5n}\cdot(3n-1)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{5n}\cdot(3n-1)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n}\,:\,\frac{n}{n}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{5}} = e^{\frac{3}{5}};$$

$$(e)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2}{n-1}\cdot n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n-1}\,:\,\frac{n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{n}}} = e^2;$$

$$(f)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2+n+3}{6n^2+n+1}\right)^{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2+n+1+2}{6n^2+n+1}\right)^{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{6n^2+n+1}\right)^{n^2+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{6n^2+n+1}{2}}\right)^{\frac{6n^2+n+1}{2}\cdot\frac{2}{6n^2+n+1}\cdot(n^2+n)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2}{6n^2+n+1}\cdot(n^2+n)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n^2+2n}{6n^2+n+1}\,:\,\frac{n^2}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2+\frac{2}{n}}{6+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = e^{\frac{1}{3}};$$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln n - \ln(n+2)) = \lim\limits_{n\to\infty} n \ln \dfrac{n}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{-n} = \ln \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{-n}$

$= \ln \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{-n} = \ln \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot(-n)} = \ln \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{2}{n}\cdot(-n)} = \ln e^{-2} = -2;$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}(3n+1)\left(\ln(n^2+2n+4)-\ln(n^2+n+2)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{n^2+2n+4}{n^2+n+2}\right)^{3n+1} = \ln \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n+4}{n^2+n+2}\right)^{3n+1}$

$= \ln \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n+2}{n^2+n+2}\right)^{3n+1} = \ln \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n^2+n+2}{n+2}}\right)^{\frac{n^2+n+2}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n^2+n+2}\cdot(3n+1)} = \ln \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{n+2}{n^2+n+2}\cdot(3n+1)}$

$= \ln \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{3n^2+7n+2}{n^2+n+2}} = \ln e^3 = 3.$

7.4 Limes funkcije. Neprekidnost

U ovom poglavlju biće uvedeni limes funkcije (ili granična vrijednost funkcije) i neprekidnost funkcije. Ova dva pojma su osnova, odnosno polazna tačka za izgradnju diferencijalnog i integralnog računa. Ove pojmove (limes funkcije i neprekidnost) moguće je uvesti preko nizova realnih brojeva i preko ε, δ terminogije.

7.4.1 Limes funkcije

Definicija 7.25 (Tačka nagomilavanja).

Za realan broj a kažemo da je tačka nagomilavanja skupa $D \subseteq \mathbb{R}$ ako postoji takav niz (a_n) elemenata iz D da vrijedi

$$a_n \in D,\ a_n \neq a \text{ i } \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Skup svih tačaka nagomilavanja skupa D označavamo sa D'. Tačku $a \in D$ nazivamo izolovanom tačkom skupa D ako ona nije tačka nagomilavanja skupa D.

Primjer 7.14.

(1) $D = [0,1)$ dok je $D' = [0,1]$, jer postoji niz (a_n), takav da $a_n \to 1$;

(2) $D = \mathbb{N}$ u ovom slučaju D' je prazan skup, tj. $D' = \varnothing$;

(3) $D = \mathbb{Q}$, $D' = \mathbb{R}$;

(4) $D = (0,1) \cup \{3,4\}$, sada je $D' = [0,1]$, jer su tačke $a_1 = 3$, $a_2 = 4$ izolovane tačke skupa D.

Tačku nagomilavanja možemo uvesti i drugom definicijom.

Definicija 7.26 (Tačka nagomilavanja).

Za realan broj a je tačka nagomilavanja skupa $D \subseteq \mathbb{R}$ ako proizvoljna okolina tačka a sadrži bar jednu tačku koja pripada skupu Drazličitu od tačke a.

Drugim riječima realan broj a je tačka nagomilavanja skupa $D \subseteq \mathbb{R}$ onda i samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (D \setminus \{a\}) \neq \varnothing$, tj. tačke nagomivavanja skupa D su one tačke u čijoj se proizvoljnoj ε–okolini nalaze i druge tačke skupa D.

Sa druge strane, realan broj $a \in D$ je izolovana tačka skupa D ako i samo ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap D = \varnothing$.

Neka je $f : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, realna funkcija jedne realne promjenljive. Zanima nas da odredimo, ne samo ponašanje odnosno vrijednost u tačkama iz domena D, nego i u okolini tačaka nagomilavanja skupa D. Neka je a tačka iz skupa D', tj. $a \in D'$. Sada postoji bar jedan niz (a_n) elemenata iz D, takav da $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_n \neq a \text{ i } \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Koristeći vrijednosti niza (a_n) za argument funkcije f dobijamo novi niz $(f(a_n))$. Niz $(f(a_n))$ može

(1) konvergirati nekom broju L koji ne zavisi od izbora niza (a_n);

(2) konvegirati nekom broju L koji zavisi od izbora niza (a_n);

(3) divergirati.

Ilustrujmo to primjerima.

PRIMJER 7.15.

Funkcija f zadana je sa $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$. Domen funkcije f je $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, dok je skup svih tačaka nagomilavanja $D' = \mathbb{R}$.

(a) Neka je $a = -3$. Za bilo koji niz realnih brojeva (a_n), $a_n \neq -3$ iz D za koji je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -3$, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 - 9}{a_n + 3} = \lim_{n\to\infty} (a_n - 3) = -6.$$

(b) Neka je $a \in D$ i (a_n), $a_n \neq a$, bilo koji niz iz D takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Sada je

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 - 9}{a_n + 3} = \lim_{n\to\infty} (a_n - 3) = a - 3.$$

Dakle u ovom primjeru $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ ne zavisi od izbora niza (a_n).

PRIMJER 7.16.

Funkcija f zadana je sa $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$ Domen funkcije je $D = \mathbb{R}$ i $D' = \mathbb{R}$.

(a) Neka je $a = 0$ i $a_n = -\frac{1}{n}$. Sada je $f(-1/n) = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} f(-1/n) = 0$;

(b) Neka je $a = 0$ i $a_n = \frac{1}{n}$. Sada je $f(1/n) = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} f(1/n) = 1$;

(c) I na kraju $a = 0$ i $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. U ovom slučaju je $f(a_n) = \frac{1+(-1)^n}{2}$, te niz $f(a_n)$ divergira.

U ovom primjeru $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ ili zavisi od izbora niza (a_n) ili ne postoji.

Zainteresovani smo da napravimo razliku između niza realnih brojeva (a_n) iz D sa osobinom $a_n \neq a$ i $\lim\limits_{n\to} a_n = a$ za koji postoji realni broj $L = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ koji ne zavisi o izboru niza (a_n) i od onih nizova kod kojih ova vrijednost realnog broja L zavisi od izbora niza (a_n).

DEFINICIJA 7.27 (Heineova).

Realan broj L je limes ili granična vrijednost funkcije $f : D \mapsto \mathbb{R}$ u tački $a \in D'$, ako za svaki niz (a_n) iz D, $a_n \neq a$, za koji je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L.$$

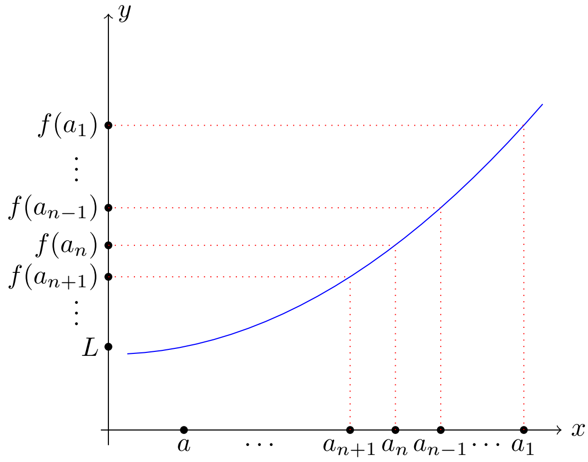
Ako je a izolovana tačka skupa D, onda za limes funkcije f u tački a uzimamo broj $f(a)$.

Za limes L funkcije f u tački a koristimo oznaku

$$L = \lim_{x\to a} f(x),$$

i čitamo: $f(x)$ konvergira (teži) prema L kada x konvergira ka a.

Na Slici 7.29 predstavljena su dva niza (a_n) i $(f(a_n)$. Vidimo kada niz (a_n) konvergira ka a, tada niz $(f(a_n))$ konvergira ka L.



Slika 7.29: Kada $a_n \to a$ tada $f(a_n) \to L$

NAPOMENA 7.4.

Funkcija f u tački a može imati samo jedan limes.

PRIMJER 7.17.

Odrediti (a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, (b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$, ako je $f(x) = \frac{3x^2+5x-2}{x+2}$.
Domen funkcije je $D = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

(a) Uočimo bilo koji niz realnih brojeva (a_n), $a_n \in D$, $a_n \neq 1$, koji konvergira ka 1, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3a_n^2 + 5a_n - 2}{a_n + 2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n^2 + 5a_n - 2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + 2)} = \frac{3\cdot 1 + 5\cdot 1 - 2}{1+2} = 2.$$

Dakle, vrijedi $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{x+2} = 2.$

(b) Neka je sada tačka nagomilavanja $a = -2$. Uočimo sada proizvoljan niz realnih brojeva $a_n \in D$, $a_n \neq -2$ sa osobinom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -2$, dobijamo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3a_n^2 + 5a_n - 2}{a_n + 2}$. Zbog $a_n \neq -2$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3a_n^2 + 5a_n - 2}{a_n + 2} = \lim_{n\to\infty}(3a_n - 1) = -7.$$

Dakle, vrijedi $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{x+2} = -2.$

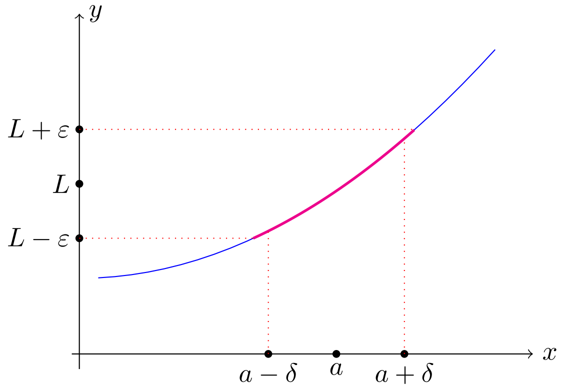
Navedimo sada Cauchyjevu defniciju limesa funkcije f u tački a koja je ekvivalentna Heineovoj definiciji limesa funkcije f u tački a.

DEFINICIJA 7.28 (Cauchyjeva definicija).

Realan broj L je limes ili granična vrijednost funkcije $f : D \mapsto \mathbb{R}$ u tački $a \in D'$, ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je

$$(x \in D \setminus \{a\})\, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ako je a izolovana tačka skupa D, onda za graničnu vrijednost funkcije f u tački a uzimamo broj f.



Slika 7.30: Kada je $x \in (a-\delta, a+\delta)$ tada je $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

PRIMJER 7.18.

Izračunati limese
(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$; (2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$; (3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; (4) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; (5) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Rješenje.

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 6;$

(2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(2x-1)(x+2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}(2x-1) = -5;$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2};$

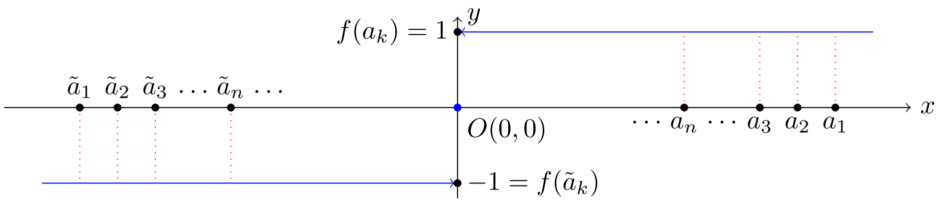
(4) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\cdot\dfrac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}} = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{7-x}{x^2-49}\cdot\dfrac{1}{2+\sqrt{x+3}} = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x+3})}$
$= \dfrac{-1}{14(2+\sqrt{10})};$

(5) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\dfrac{(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4}{(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4} = \lim\limits_{x\to 8}\dfrac{(x-8)((\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)} = \lim\limits_{x\to 8}((\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4) = 12.$

□

7.4.2 Jednostrani limesi

Posmatrajmo grafik funkcije $f(x) = \operatorname{sgn} x$ i dva niza (a_n) i $(\tilde{a}_n)$ na Slici 7.31. Sa Slike 7.31 vidimo da $a_n \to 1$, dok $\tilde{a}_n \to -1$.



Slika 7.31: Grafik funkcije $f(x) = \operatorname{sgn} x$

Zbog situacije data na prethodnoj slici uvodimo sljedeću definiciju.

DEFINICIJA 7.29.

Neka je $f: D \mapsto \mathbb{R}$ i $a \in D'$. Kažemo da je granična vrijednost (ili limes) funkcije f u tački a sa lijeve strane (ili lijeva granična vrijednost) jednak L_- i pišemo

$$\lim_{x\to a_-} f(x) = L_-,$$

ako za svaki niz (a_n) iz D, $a_n \neq a$, koji slijeva konvergira ka a niz vrijednosti funkcije $(f(a_n))$ konvergira ka L_-. Analogno se definiše i granična vrijednost funkcije sa desne strane (ili desna granična vrijednost) i označava

$$L_+ = \lim_{x\to a_+} f(x).$$

Takve limese zovemo jednostranim limesima.

Limese $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \ldots$ definišemo analogno Definiciji 7.29. Neka je $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Tada je

$$L = \lim_{x\to a} f(x),\ L \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$$

ako i samo ako za svaki niz (a_n), $a_n \in D\setminus\{a\}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = L.$$

Računanje limesa znatno olakšava sljedeća teorema.

Teorema 7.5.

Neka je

(i) $x_0 \in [a,b]$;

(ii) $f,\ g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *gdje je* $D = [a.b]$ *ili* $D = [a,b]\setminus\{x_0\}$;

(iii) *postoje* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Tada

(a) *postoji* $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$ *i vrijedi* $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(b) *postoji* $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ *i vrijedi* $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(c) *ako postoji* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ *i* $g(x)\neq 0$ *u nekoj okolini tačke* x_0, *postoji i* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i vrijedi* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Primjer 7.19.

Izračunati limese

(1) $\lim\limits_{x\to 1_-}(3-\sqrt{1-x})$; (2) $\lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{1}{x}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0_-}\dfrac{1}{x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 3_-}\dfrac{x^2+4}{x-3}$; (5) $\lim\limits_{x\to 3_+}\dfrac{x^2+4}{x-3}$;
(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+4x-3}{3x^2-3x+1}$; (7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+4x-5}{x^4-3x+1}$; (8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+4x^2-x}{x^2+x+11}$; (9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3-2x^2-x+1}{-5x^2+x+11}$;
(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]$; (11) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]$.

Rješenje.

(1) $\lim\limits_{x\to 1_-}(3-\sqrt{1-x}) = (3-\sqrt{1-1}) = 3$;

(2) Sa Slike 7.32a vidimo da za $x\to 0_+$, $f(x)\to+\infty$, pa je $\lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{1}{x} = +\infty$.

(3) Sada sa Slike 7.32a vidimo da za $x\to 0_-$, $f(x)\to-\infty$, pa je $\lim\limits_{x\to 0_-}\dfrac{1}{x} = -\infty$.

$$(4)\quad \lim_{x\to 3_-}\frac{x^2+4}{x-3}\left|\begin{array}{c}\text{uvedimo smjenu}\\ \text{vidi Sliku 7.32b}\\ x=3-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0_+\end{array}\right| = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{(3-\varepsilon)^2+4}{-\varepsilon} = -\infty$$

$$(5)\quad \lim_{x\to 3_+}\frac{x^2+4}{x-3}\left|\begin{array}{c}\text{uvedimo smjenu}\\ \text{vidi Sliku 7.32b}\\ x=3+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0_+\end{array}\right| = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{(3+\varepsilon)^2+4}{\varepsilon} = +\infty.$$

$$(6)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+4x-3}{3x^2-3x+1} : \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}{3-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{4}{3}.$$

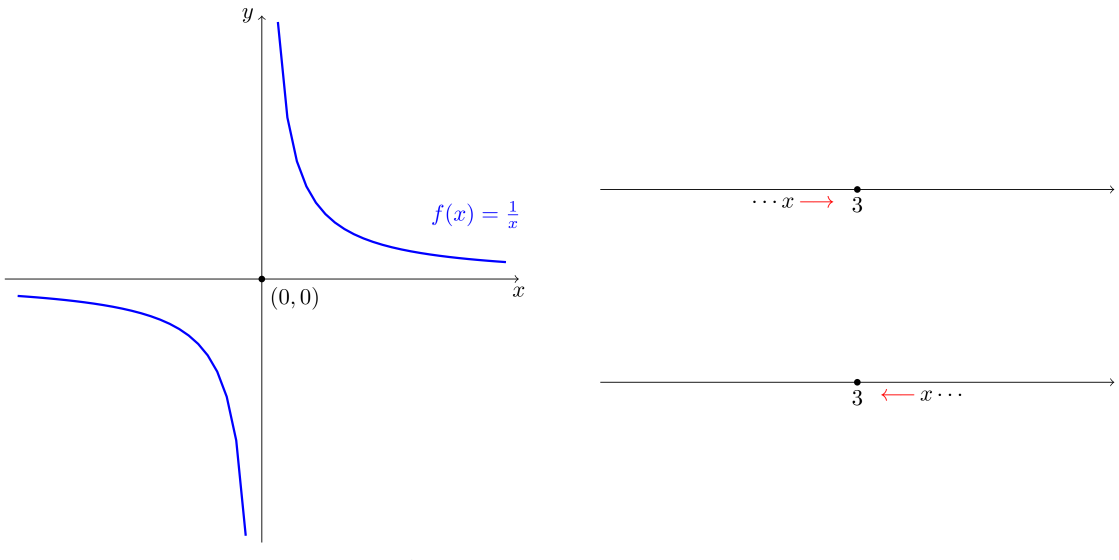
$$(7)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4x-5}{x^4-3x+1} : \frac{x^4}{x^4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x^4}}{1-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}} = 0.$$

$$(8)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x^2-x}{x^2+x+11} : \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+4-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{11}{x^2}} = +\infty.$$

$$(9)\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-2x^2-x+1}{-5x^2+x+11} : \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-5+\frac{1}{x}+\frac{11}{x^2}} = -\infty.$$

$$(10)\quad \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right] : \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} : \frac{x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$(11)\quad \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right] = -\infty.$$



(a) Grafik funkcije $f(x)=\frac{1}{x}$ (b) $x\to 3_-$ i $x\to 3_+$

Slika 7.32: Grafici funkcije $f(x)=\frac{1}{x}$ i slučajevi $x\to 3_-$, $x\to 3_+$

□

Limes $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Poznato je da za $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \infty$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$. Neka $f(x)\to\infty$ za $x\to\infty$ i neka $a_n\to\infty$ za $n\to\infty$ tada je po Definiciji 7.27

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(a_n)}\right)^{f(a_n)} = e,$$

odnosno

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e}$$

Uvrštavajući x umjesto $f(x)$, dobijamo

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

Neka je

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left|\begin{array}{c}\text{uvedimo smjenu}\\ t=-x\\ t\to+\infty\end{array}\right|=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{(t-1)\cdot\frac{1}{t-1}\cdot t}=e,$$

dakle

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

Dalje

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left|\begin{array}{c}\text{uvedimo smjenu}\\ t=\frac{1}{x}\\ \text{sada}\\ t\to\infty\end{array}\right|=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e,$$

pa vrijedi

$$\boxed{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

Limes $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$

(a) Neka je prvo $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Na Slici 7.33a predstavljena je trigonometrijska kružnica, znamo njen centar je u koordinatnom početku i poluprečnik joj je 1. Sa iste slike vidimo da vrijedi $\sin x<x$. Sa $P_{\overset{\frown}{OAB}}$ je označena površina kružnog isječka koji odgovara dužini luka x (označen plavom bojom), dok je sa $P_{\triangle OCD}$ označena površina trougla $\triangle OCD$. Kako je $\overline{OB}=\cos x$, $\overline{AB}=\sin x$, $\overline{CD}=\operatorname{tg}x$, $\overline{OD}=\overline{OA}=1$ i $\sin x<x$, $P_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cos x\sin x<\frac{1}{2}\sin x$, $P_{\overset{\frown}{OAB}}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot x$, $P_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\operatorname{tg}x$, to je

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x\Leftrightarrow\\&\sin x<x<\operatorname{tg}x\Leftrightarrow\\&\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}\Leftrightarrow\\&1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\Leftrightarrow\\&\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.\end{aligned}$$

(b) Neka je sada $-\frac{\pi}{2}<x<0$. Sa Slike 7.33b je

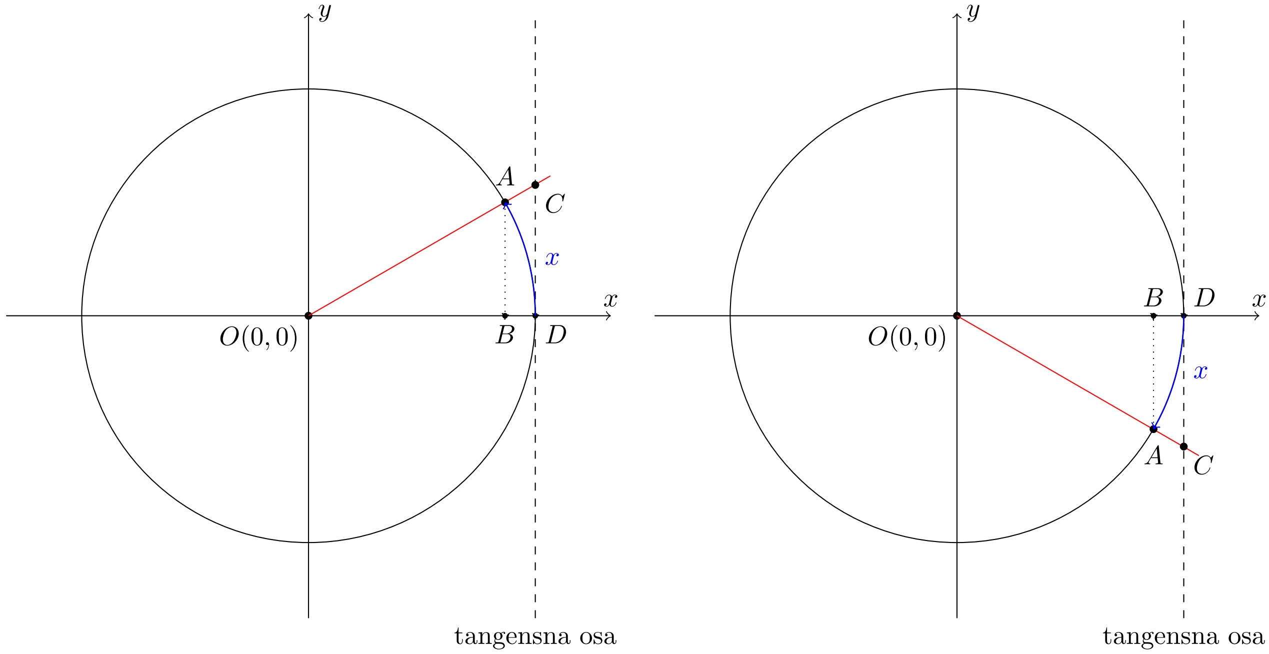
$$\begin{aligned}&|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg}x|\Leftrightarrow\\&1<\left|\frac{x}{\sin x}\right|<\frac{1}{\cos x}\Leftrightarrow\\&\cos x<\left|\frac{\sin x}{x}\right|<1\end{aligned}$$

a kako je $\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}$, te je i u ovom slučaju

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Sada pustimo da $x \to 0$, kako je $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, to je

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$



(a) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (b) $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

Slika 7.33: Trigonometrijske kružnice

PRIMJER 7.20.

Izračunati limese

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$; (5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$;

(6) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$; (7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

Rješenje.

(1) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-1}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-1}}\right)^{\frac{x+1}{-1}\cdot\frac{-1}{x+1}\cdot x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-x}{x+1}:\frac{x}{x}}$$
$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1+\frac{1}{x}}} = e^{-1}.$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+2}{-6}}\right)^{\frac{3x+2}{-6}\cdot\frac{-6}{3x+2}\cdot\frac{x+1}{3}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6}{3x+2}\cdot\frac{x+1}{3}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6x-6}{9x+6}:\frac{x}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-6-\frac{6}{x}}{9+\frac{6}{x}}} = e^{\frac{-2}{3}}.$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+2+2x-1}{x^2-4x+2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}\cdot\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\cdot x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\cdot x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x^2-x}{x^2-4x+2}:\frac{x^2}{x^2}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}} = e^2.$$

(4) $$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\sin x\cdot\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}} = e^{\lim_{x\to 0}\cos x} = e.$$

$$(5)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\left|\begin{array}{c}\text{uvodimo smjenu}\\ e^{2x}-1=t\\ \text{pa je}\\ x=\frac{1}{2}\ln(1+t)\\ t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{3}{2}\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{3}{2t}\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{3}{2t}}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{3}{2t}}}$$

$$=\frac{1}{\ln\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{3}{2t}}}=\frac{2}{3}.$$

$$(6)\ \lim_{h\to 0}\frac{a^{h}-1}{h}=\left|\begin{array}{c}\text{uvodimo smjenu}\\ a^{h}-1=t\\ \text{pa je}\\ h=\frac{\ln(1+t)}{\ln a}\\ t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t\ln a}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)^{t}}{\ln a}}=\ln a.$$

$$(7)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{a+x}{a}}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{x}}=\ln e^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}.$$

□

Primjer 7.21.

Izračunati limese
$(1)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{6x}$; $(2)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}4x}{\sin 7x}$; $(3)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^{5}}{\sin^{3}x}$; $(4)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^{2}}$; $(5)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sqrt{x+4}-2}$;
$(6)\ \lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$; $(7)\ \lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^{2}x}}$.

Rješenje.

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x\cdot\frac{6}{5}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{6}.$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}4x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{4x\cos 4x}\cdot 4x}{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{\sin 7x}{7x}}\cdot\frac{\frac{4x}{\cos 4x}}{7x}=\frac{4}{7}.$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^{5}}{(\sin x)^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x^{5}}{x^{5}}\cdot x^{5}}{\frac{\sin^{3}x}{x^{3}}\cdot x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x^{5}}{x^{5}}}{\frac{\sin^{3}x}{x^{3}}}\cdot x^{2}=0.$$

$$(4)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^{2}\frac{x}{2}}{\frac{x^{2}}{4}\cdot 4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$(5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sqrt{x+4}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\cdot 6\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)=24.$$

$$(6)\ \lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to 0}e^{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x}=e^{1}=e.$$

$$(7)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^{2}x}}=\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot(\cos x-1)\frac{1}{\sin^{2}x}}=\lim_{x\to 0}e^{(\cos x-1)\cdot\frac{1}{\sin^{2}x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{-2\sin^{2}\frac{x}{2}}{4\sin^{2}\frac{x}{2}\cos^{2}\frac{x}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{-2}{4\cos^{2}\frac{x}{2}}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-2}{4\cos^{2}\frac{x}{2}}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

□

7.4.3 Asimptote funkcije

Definicija 7.30 (Asimptote).

(1) Kažemo da je prava $y = kx + n$ desna kosa asimptota funkcije $f : (a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$, ako vrijedi

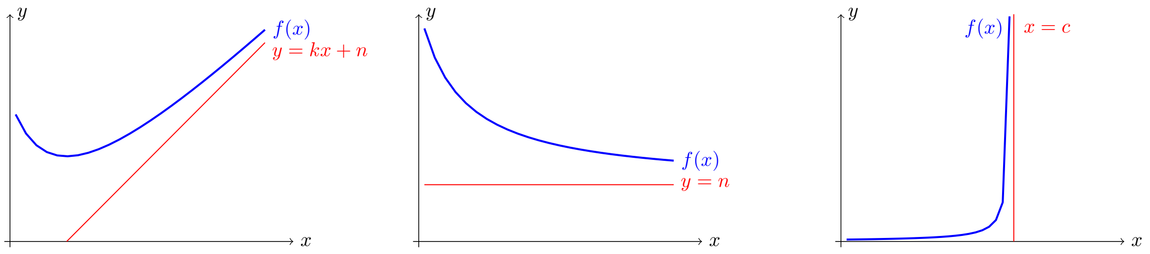
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (kx + n)] = 0. \tag{7.13}$$

Analogno definišemo i lijevu kosu asimptotu.

(2) Ako je $k = 0$, kada $x \to +\infty$ pravu $y = n$ zovemo desna horizontalna asimptota, analogno se definiše i lijeva horizontalna asimptota.

(3) Prava $x = c$ je vertikalna asimptota funkcije f, ako je

$$\lim_{x\to c_-} f(x) = \infty \text{ ili } \lim_{x\to c_+} f(x) = \infty. \tag{7.14}$$



(a) Kosa (b) Horizontalna (c) Vertikalna

Slika 7.34: Asimptote

Formule za konkretno određivanje asimptota dobijamo iz Definicije 7.30. Horizontalnu asimptotu računamo po formuli

$$\boxed{n = \lim_{x\to\infty} f(x)}$$

vertikalnu asimptotu po formuli

$$\boxed{\lim_{x\to c_-} f(x) = \infty \text{ ili } \lim_{x\to c_+} f(x) = \infty}$$

Određivanje kose asimptote svodi se na računanje koeficijenata k i n. Postupamo na sljedeći način: Iz

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (kx + n)] = 0$$

je

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x) - (kx + n)}{x}\right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{n}{x}\right] = 0,$$

sada je

$$\boxed{k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

i pošto izračunamo k, n računamo po formuli

$$\boxed{n = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx]}$$

Na isti način računamo i lijevu kosu asimptotu.

Primjer 7.22.

Odrediti asimptote datih funkcija
(1) $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$; (2) $f(x) = \frac{-2x^3+x-9}{x^2+1}$.

Rješenje.

(1) Definiciono područje funkcije f je $D = \mathbb{R}\backslash\{-4\}$ ili $D = (-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$. Ispitajmo postoji li horizontalna asimptota.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{x+4} : \frac{x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{1+\frac{4}{x}} = 2,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x+4} : \frac{x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{x+\frac{4}{x}} = 2,$$

funkcija ima i lijevu i desnu asimptotu $y = 2$. Odredimo sada, ako postoji vertikalna asimptota. Funkcija ima prekid u tački -4, ispitajmo ima li u ovoj tački funkcija f vertikalnu asimptotu.

$$\lim_{x\to-4_-} \frac{2x+3}{x+4} \left| \begin{array}{c} \text{uvodimo smjenu} \\ x = -4-\varepsilon \\ \varepsilon \to 0_+ \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{2(-4-\varepsilon)+3}{-4-\varepsilon+4} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{-5-2\varepsilon}{-\varepsilon} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-4_+} \frac{2x+3}{x+4} \left| \begin{array}{c} \text{uvodimo smjenu} \\ x = -4+\varepsilon \\ \varepsilon \to 0_+ \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{2(-4+\varepsilon)+3}{-4+\varepsilon+4} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{-5+2\varepsilon}{\varepsilon} = -\infty.$$

Dakle vertikalna asimptota je $x = -4$. Kose asimtpte nema, jer postoji horizontalna asimptota.

(2) Definiciono područje funkcije f je $D = \mathbb{R}$ ili $D = (-\infty, +\infty)$. Ispitajmo postoji li kosa asimptota. Odredimo prvo k

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-2x^3+x-9}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+x-9}{x^3+x} : \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2+\frac{1}{x^2}-\frac{9}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} = -2,$$

odredimo sada n

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-2x^3+x-9}{x^2+1} + 2x \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+x-9+2x^3+2x}{x^2+1}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-9}{x^2+1} = 0,$$

pa je lijeva kosa asimptota $y = x$. Desna kosu asimptotu računamo na sljedeći način

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-2x^3+x-9}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3+x-9}{x^3+x} : \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2+\frac{1}{x^2}-\frac{9}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} = -2,$$

odredimo sada n

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-2x^3+x-9}{x^2+1} + 2x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3+x-9+2x^3+2x}{x^2+1}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-9}{x^2+1} = 0,$$

Pa je desna kosa asimptota $y = x$.

□

7.4.4 Neprekidnost funkcije

Neprekidnost funkcije ja veoma važna osobina funkcija i neprekidne funkcije su veoma važna klasa funkcija.

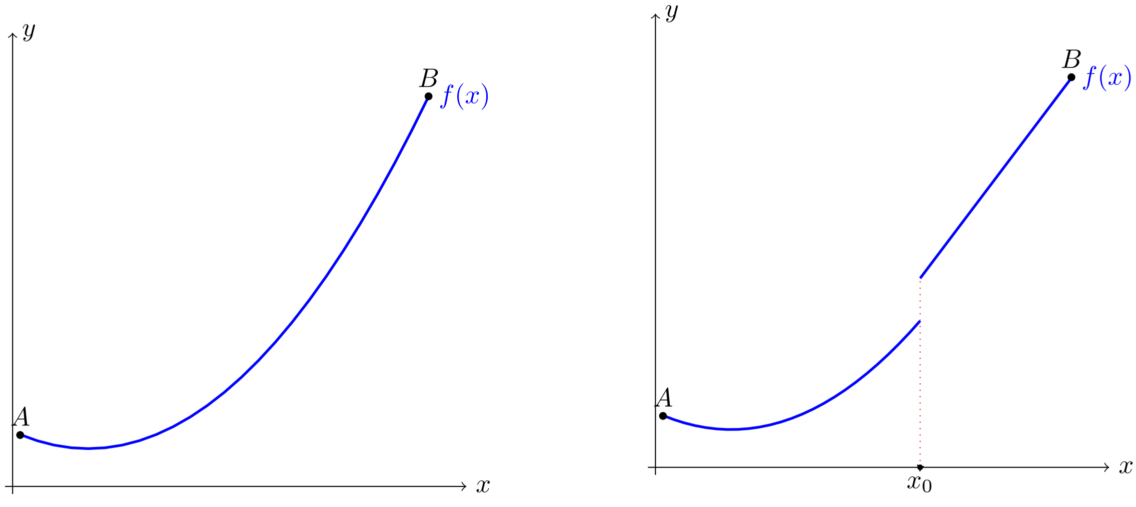
Na Slici 7.35a predstavljen je grafik neprekidne funkcije, dok je na Slici 7.35b grafik prekidne funkcije. Sa grafika vidimo kod neprekidne funkcije možemo doći od tačke A do tačke B da ne dižemo olovku sa papira, dok kod prekidne funkcije to nije slučaj, moramo dići olovku od papira na dijelu grafika koji odgovara argumentu x_0.

Definicija 7.31 (Neprekidnost).

Za funkciju $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, kažemo da je neprekidna u tački $x_0 \in (a, b)$, ako ona ima limes u tački x_0 koji je jednak $f(x_0)$, tj. ako je

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{7.15}$$

Funkcija $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ je neprekidna na intervalu (a, b) ako je ona neprekidna u svakoj tački intervala



(a) Neprekidna (b) Prekidna

Slika 7.35: Grafici neprekidne i prekidne funkcije

(a, b).

Kažemo da funkcija ima prekid (ili diskontinuitet) u tački $x_0 \in D$, ako ona nije neprekidna u tački x_0.

Napomena 7.5.

Ako je funkcija $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ neprekidna u tački $x_0 \in (a, b)$, onda za proizvoljan niz (a_n) iz (a, b) koji konvergira prema tački x_0, odgovarajući niz funkcijskih vrijednosti konvergira ka $f(x_0)$. Pa vrijedi

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \lim_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_0). \tag{7.16}$$

Primjer 7.23.

Ispitati neprekidnost datih funkcija

(1) $f(x) = \begin{cases} x + 1, \ x \leqslant 1 \\ -x^2 + 9, \ x > 1 \end{cases}$; (2) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \ x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ x + 1 - \frac{\pi}{2}, \ x > \frac{\pi}{2} \wedge x \leqslant 3 \\ x^2, \ x > 3 \end{cases}$.

Rješenje.

(1) Domen funkcije f je $D = \mathbb{R}$. Ispitajmo da li je funkcija f neprekidna u tački $x = 1$, u ostalim tačkama domena je neprekidna. Vrijedi

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + 1 = 2 \\ \lim_{x \to 1_-} f(x) &= \lim_{x \to 1_-} (x + 1) = 2 \\ \lim_{x \to 1_+} f(x) &= \lim_{x \to 1_+} (-x^2 + 9) = 8. \end{aligned}$$

Ako vrijedi $\lim_{x \to a_-} f(x) = \lim_{x \to a_+} f(x) = f(a)$, funkcija f je neprekidna u tački a. Vidimo u našem slučaju to nije ispunjeno, jer $\lim_{x \to 1_-} f(x) = 2 \neq 8 = \lim_{x \to 1_+} f(x)$, pa funkcija f nije neprekidna u tački 1, tj. ima prekid.

(2) Domen funkcije f je $D = \mathbb{R}$. Ispitajmo da li je funkcija f neprekidna u tačkama $x = \frac{\pi}{2}$ i $x = 3$, u ostalim tačkama domena je neprekidna.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}_-} f(x) &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}_-} \sin x = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}_+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}_+} \left(x + 1 - \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

vrijedi $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}_-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}_+} f(x) = f(\frac{\pi}{2})$, pa je funkcija f neprekidna u $\frac{\pi}{2}$. Ispitajmo sada neprekidnost u tački $x = 3$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
f(3) &= 3 + 1 - \frac{\pi}{2} = 4 - \frac{\pi}{2}\\
\lim_{x\to 3_-} f(x) &= \lim_{x\to 3_-}\left(x + 1 - \frac{\pi}{2}\right) = 4 - \frac{\pi}{2}\\
\lim_{x\to 3_+} f(x) &= \lim_{x\to 3_+} x^2 = 9,
\end{aligned}$$

pošto je $\lim_{x\to 3_-} f(x) = 4 - \frac{\pi}{2} \neq 9 = \lim_{x\to 3_+} f(x)$, funkcija 3 nije neprekidna u $x = 3$.

$\square$

7.5 Zadaci za vježbu

Linearna funkcija

1. Date su funkcije
(a) $2x - 5y = 10$; (b) $3x + 4y - 12 = 0$, (c) $y = 0.5x + 4$, (d) $y = -2x - 3$.
Odrediti definiciono područje funkcija, nule, znak, tok i nacrtati grafik. U kojim tačkama funkcije sijeku x–osu, a u kojim y–osu?

2. U funkciji $f(x) = (a-1)x-(a+2)$ odrediti parametar a tako da grafik funkcije siječe x osu čija je apscisa $x = 5$.

3. U funkciji $f(x) = mx - 3 - m$ odrediti parametar m tako grafik funkcije prolazi kroz tačku $A(-3, -5)$.

4. U funkciji $f(x) = (a - 3)x + 2a + 5$ odrediti parametar pod uslovom da grafik funkcije
(a) prolazi kroz tačku $A(3, -1)$; (b) siječe y–osu u tački čija je ordinata $y = 5$.

5. U funkcijama $f(x) = (a-3)x+a-2$ i $g(x) = (2a+1)x-(3a-1)$, odrediti parametra a tako da im grafici
(a) budu paralelni; (b) budu podudarni.

6. U funkciji $y = (2m - 3)x + m - 1$ odrediti parametar m tako da grafik sa x–osom zahvata
(a) oštar ugao, (b) tup ugao; (c) ugao nula stepeni; (d) pravi ugao.

7. Predstaviti grafički prave
(a) $y = -2$; (b) $y = 2.5$; (c) $x = 4$; (d) $x = -0.5$.

Kvadratna funkcija

1. Date su kvadratne funkcije
(a) $f(x) = x^2 + x - 3$, (b) $f(x) = -2x^2 - 2x + 1$; (c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$; (d) $f(x) = -x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{6}$.
Odrediti definiciono područje, nule, ekstremne vrijednosti funkcije, nacrtati grafik, te odrediti znak i tok funkcije.

2. Odrediti za koje su vrijednosti parametra m sljedeće funkcije negativne za svako x
(a) $f(x) = (m + 5)x^2 + 2mx + m - 3$; (b) $f(x) = mx^2 + 2(m + 7)x + m + 5$.

3. Odrediti za koje su vrijednosti parametra m sljedeće funkcije pozitivne za svako x
(a) $f(x) = mx^2 + 2(m - 3)x + m - 1 - 3$; (b) $f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m + 3)x + m - 1$.

4. Data je funkcija $f(x) = ax^2+bx+c$. Odrediti parametre a, b i c tako da je $f(2) = 0$, $f(-2) = 8$ i $f(3) = -7$.

5. Data je funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$. Odrediti parametre a, b i c grafik funkcije prolazi kroz tačke $A(5, 0)$, $B(4, -3)$ i da je $f(2) = 5$.

Eksponencijalna i logaritamska funkcija

1. Konstruisati grafike funkcija
(a) $f(x) = 2^x$; (b) $f(x) = 3^x$; (c) $f(x) = 4^x$; (d) $f(x) = \frac{1}{2^x}$; (e) $f(x) = \frac{1}{3^x}$; (f) $f(x) = \frac{1}{4^x}$;
(g) $f(x) = 2^x+1$; (h) $f(x) = 3^x-2$; (i) $f(x) = 4^x+3$; (j) $f(x) = \frac{1}{2^x}-1$; (k) $f(x) = \frac{1}{3^x}+2$; (l) $f(x) = \frac{1}{4^x}-3$.

2. Konstruisati grafike sljedećih funkcija
(a) $f(x) = \log_2 x$; (b) $f(x) = \log_3 x + 2$; (c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$; (d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 3$.

3. Odrediti oblast definisanosti funkcija
(a) $f(x) = \log_2(-x)$; (b) $f(x) = \log_2(1 - x)$; (c) $f(x) = \log_2(1 - x^2)$; (d) $f(x) = \log_2 x^2$;
(e) $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$; (f) $f(x) = \log_2(x^2 - x)$.

4. Izračunati vrijednost izraza
(a) $3^{\log_3 81}$; (b) $10^{\log_{10} 1000}$; (c) $2^{\log_2 512}$; (d) $\frac{5}{4}\log_3 81+2\log_3 27-4\log_2 8$; (e) $\log_3 81\cdot\log_3 \frac{1}{27}\cdot\log_2 16\cdot\log_2 8$;
(f) $\log_2(\log_2 256)$; (g) $\log_2(\log_2 16)$; (h) $2 \cdot 5^{\log_5 125} + 5 \cdot 3^{\log_3 81}$; (i) $2^{3+\log_2 6} + 3^{4+\log_3 8}$.

5. Primjenjujući osnovna pravila logaritmovanja sljedeće izraze napisati u formi zbira, razlike ili neke njihove kombinacije
(a) $\log \frac{2x^3\sqrt[4]{5}}{3y^2\sqrt[3]{7}}$; (b) $\log \frac{8a^4\sqrt{x}}{b^3\sqrt[3]{25}}$; (c) $\log \sqrt[4]{\frac{3a^2}{2b^2c}}$; (d) $\log \frac{5(a^2-b^2)}{4(x^2-y^2)}$.

6. Logaritmovati sljedeće izraze
(a) $x = \frac{3a^2 b}{y^2 \sqrt[4]{xy^4}}$; (b) $x = \left(4a^2 b \sqrt[5]{abx^7}\right)^3$; (c) $x = \sqrt[3]{\frac{y^{-2}}{\sqrt{yz}}\sqrt{\frac{x}{y}}}$.

7. Odrediti x iz jednakosti
(a) $\log x = 2\log m + 4\log n - 3\log a - 5\log b$; (b) $\log x = 3\log a + \frac{1}{5}\log 7 + \frac{1}{2}\log b - 3\log b$.

8. Koristeći logaritmovanje i kalkulator izračunati
(a) $\log_2 3$; (b) $\log_5 14$; (c) $2350 \cdot 1.05^{17}$; (d) $\left(\frac{4}{7}\right)^{0.45}$; (e) $5\sqrt[11]{3.1866}$; (f) $\sqrt[100]{100}$; (g) $\sqrt[6]{\frac{13\cdot 4035}{3.142}}$;
(h) $\sqrt[3]{1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{11}}$; (i) $\sqrt{\frac{17569}{111.11}} - \sqrt[3]{\frac{67685}{2365}}$.

Aritmečki i geomerijski nizovi

1. Odrediti aritmetički niz ako je
(a) $\begin{cases} a_1 + a_4 = 22 \\ a_3 + a_5 = 34; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} a_5 - a_1 = 44 \\ a_2 + a_4 = 64; \end{cases}$ (c) $\begin{cases} a_2 + a_8 = 10 \\ a_3 \cdot a_7 = 21. \end{cases}$

2. Ako je $a_{18} = 109$ i $d = 5$ odrediti S_{18}.

3. Ako je $a_1 = \frac{4}{5}$ i $d = 2$ odrediti S_{20}.

4. Riješiti jednačine
(a) $1 + 4 + 7 + \ldots + x = 210$; (b) $3 + 7 + \ldots + x = 465$;
(c) $(x+1) + (x+4) + \ldots + (x+28) = 155$.

5. Odrediti geometrijske nizove ako je
(a) $\begin{cases} a_1 + a_2 = 6 \\ a_2 + a_3 = 20; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} a_2 - a_1 = 5 \\ a_3 - a_2 = 30; \end{cases}$ (c) $\begin{cases} a_2 + a_3 = 6 \\ a_1 \cdot a_4 = 5. \end{cases}$

6. Odrediti q i n, ako je $a_1 = 2, a_n = 32$ i $S_n = 62$.

7. Odrediti a_n i S_n, ako je $a_1 = 2, n = 8$ i $q = \frac{1}{2}$.

8. Odrediti a_n i S_n, ako je $a_1 = 8, q = -1$ i $S_n = 8$.

Brojni nizovi

1. Izračunati granične vrijednosti
(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n-3}{6n+5}$; (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3-2n-4n^2}{3n^2-2n+5}$; (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^3+3n^2-n+1}{4n^2+2n-3}$; (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2-4n+11}{3n^4-n^2+n+2}$;
(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}}{n+4}$; (f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-2}{\sqrt[3]{n^3+n^2-5}}$; (g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;
(h) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n-3}-n\right)$; (i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-4n+3}\right)$;
(j) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n+5}\right)$; (k) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{2n}\right)$;
(l) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2+n-12}{1+2+\ldots+(2n-1)+2n}$; (m) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+5+25+\ldots+5^{n-1}}{1+2+4+\ldots+2^{n-1}}$;
(n) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{10^{n-1}}\right)$;
(o) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$;
(p) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)^n$; (q) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{4n}\right)^{2n+2}$; (r) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n+4}{n-2}\right)^n$;
(s) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+6}{2n-5}\right)^{3n-5}$; (t) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3n-2}{3n+4}\right)^{2n+4}$;
(u) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{6n^2+n+3}{6n^2+n+1}\right)^{n^2+n}$; (v) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+n+2}\right)^{3n-1}$;
(w) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[\ln n - \ln(n+2)\right]$; (x) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\left[\ln(2n^2+3n+2)-\ln(2n^2+n+1)\right]$.

Osnovne osobine funkcija i granične vrijednosti funkcija

1. Odrediti definiciono područje sljedećih funkcija
(a) $f(x) = \sqrt{3x-5}$; (b) $f(x) = \sqrt{-x^2-x+12}$; (c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3-5x}$;
(d) $f(x) = \dfrac{x+3}{3x^2-4x+1}$; (e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+3}{2-x}}$;
(f) $f(x) = \sqrt{x^2-x-2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$; (g) $f(x) = \ln(3-x^2)$;
(h) $f(x) = \log(x-2)^2$; (i) $f(x) = \dfrac{\ln(5+4x-x^2)}{\sqrt{x-2}}$;
(j) $f(x) = \arcsin(5x-4)$; (k) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x+1}{x-3}$;
(l) $f(x) = \arccos\dfrac{x+4}{1-9x}$; (m) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{4x+5}$.

2. Ispitati parnost, odnosno neparnost sljedećih funkcija
(a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$; (b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+1}$; (c) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sin x\cos x}$;
(d) $f(x) = \sqrt[5]{(x-4)^2} + \sqrt[7]{(1-3x)^4}$; (e) $f(x) = \ln\dfrac{2-x}{2+x}$; (f) $f(x) = \dfrac{3^x-3^{-x}}{x^2\operatorname{tg}x}$.

3. Izračunati osnovni period sljedećih funkcija
(a) $f(x) = \sin x$; (b) $f(x) = \cos 3x$; (c) $f(x) = x^2-2x+4$.

4. Izračunati limese
(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3-4}{\sqrt{x^4+1}}$;
(d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$; (e) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$; (f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;
(g) $\lim\limits_{x\to64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$; (h) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; (i) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$;
(j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}}$; (k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$; (l) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;
(m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^4}{x^4}$;

5. Izračunati limese
(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$; (b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$;
(c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg}x}$; (d) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}$; (e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$;
(f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$; (g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$; (h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$;

6. Izračunati limese
(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+4}$;
(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-3x+1}\right)^{3x-4}$; (e) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(2x+1)-\ln(2x+4)]\cdot\dfrac{1}{3x-2}$;
(f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(3x+3)-\ln(3x-1)}{4x+1}$; (g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x^2+3x+3)-\ln(2x^2+3x-1)}{5x-3}$;
(h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x-1}{x}$; (i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7^x-1}{x}$; (j) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt[x]{3}-1)$;
(k) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[x]{2}-1\right)$; (l) $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$; (m) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$;

7. Izračunati limese

   (a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0_+}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

   (e) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin x}$;

   (f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin x}\right)^{\frac{2}{x^3}}$; (g) $\lim\limits_{x\to -a}\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} a}{x+a}$; (h) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$;

   (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x}-1}{x(\sqrt{1+2\sin^2 x}-1)}$; (j) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}$;

   (k) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\sqrt{2x}}$; (l) $\lim\limits_{x\to}(\cos x)^{\frac{3}{x^2}}$;

   (m) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; (n) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

   (o) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

8. Zadana je funkcija $f(x)=4x-3$. Izračunati $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(f(x))-\ln(f(x-1))]$.

9. Ispitati neprekidnost sljedećih funkcija

   (a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{2} \text{ za } x\neq 0,\\ 2 \text{ za } x=0.\end{cases}$

   (b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} \text{ za } x\neq 2,\\ 4 \text{ za } x=2.\end{cases}$

10. Dodefinisati funkciju tako da ona bude neprekidna u datoj tački

   (a) $f(x)=\dfrac{3x-3}{\sqrt{2x+7}-3}$ u tački $x_0=1$;

   (b) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+2x}-1}$ u tački $x_0=0$.

11. Odrediti parametar $a\in\mathbb{R}$ tako da funkcija bude neprekidna za $\forall x\in\mathbb{R}$, ako je

   (a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2-x-2)}{x-2} \text{ za } x\neq 2\\ a \text{ za } x=2;\end{cases}$

   (b) $f(x)=\begin{cases}x^2+2a \text{ za } x\leqslant 0\\ 2-x \text{ za } x>0.\end{cases}$

12. Izračunati asimptote funkcija

   (a) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+4}$; (b) $f(x)=\dfrac{-x^2-x+6}{x+7}$; (c) $f(x)=\dfrac{4x+3}{x^2-2x-15}$;

   (d) $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x}{2x^2+3x+1}$; (e) $f(x)=\dfrac{3x^2-x+2}{x^2-x-6}$; (f) $f(x)=\dfrac{x(2x^2-1)}{(3x+2)^2}$:

   (g) $f(x)=\dfrac{xe^{\frac{1}{x}}}{x-1}$; (h) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}-2}$; (i) $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$;

   (j) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$; (k) $f(x)=\dfrac{(x^2+1)\sqrt{x^2+5}}{x(2x+1)}$; (l) $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}$;

   (m) $\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-4}}$; (n) $f(x)=\dfrac{(x^2+2)\sqrt{3x^2-1}}{(x+1)x}$;

Literatura i reference

[1] M. Crnjac, D. Jukić and R. Scitovski. *Matematika.* Ekonomski fakultet Osijek, R.Hrvatska, 1994.

[2] F. Dedagić. *Uvod u višu matematiku.* Univerzitet u Tuzli, Tuzla, BiH, 1997.

[3] D. Jukić and R. Scitovski. *Matematika 1.* Prehrambeno tehnološki fakultet i Elektrotehnički fakultet Osijek, R. Hrvatska, 1998.

[4] D. Jukić and R. Scitovski. *Matematika 1.* STUDIO HS Internet d.o.o., Osijek, R. Hrvatska, 2017. ISBN: 978-953-6032-18-1.

[5] D.S. Mitrinović, D. Mihailović and P.M. Vasić. *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija.* Beogradski izdavački zavod, Beograd, SFRJ, 1973.

[6] P.M. Ušćumlić M.P. i Miličić. *Elementi više matematike.* IP "Nauka", Beograd, Srbija, 2002.

Indeks i pojmovi