Osnove matematike 1

Nastavni materijal za predmet Osnove matematike 1 na Odsjeku razredna nastava i Odsjeku predškolski odgoj, FF Tuzla

Autor
Samir Karasuljić

Email
samir.karasuljic@untz.ba
samir.karasuljic@gmail.com

Akademska 2019/20. godina

Sadržaj

1 Uvod **5**
1.1 Matematička logika 6
1.2 Zadaci za vježbu 12

2 Skupovi **13**
2.1 Uvodni pojmovi, definicije i notacija 13
2.2 Operacije sa skupovima 16
2.3 dekartov proizvod skupova 18
2.4 Zadaci 19

3 Binarne relacije **21**
3.1 Osnovni pojmovi 21
3.2 Osobine binarnih relacija 24
3.2.1 Relacija ekvivalencije 24
3.2.2 Relacija poretka 25
3.3 Zadaci za vježbu 27

4 Funkcije **28**
4.1 Osnovni pojmovi 28
4.2 Vrste preslikavanja 30
4.3 Zadaci 32

5 Binarne operacije **36**
5.1 Osobine binarnih opearcija 36
5.2 Algebarske strukture 37
5.3 Zadaci 38

6 Skup realnih brojeva **40**
6.1 Cijeli brojevi 40
6.1.1 Prirodni brojevi i skup prirodnih brojeva 40
6.1.2 Cijeli brojevi i skup cijelih brojeva 41
6.1.3 Reprezentacija cijelih brojeva 41
6.1.4 Djeljivost cijelih brojeva 43
6.1.5 Najveći zajednički djelilac i najmanji zajednički sadržilac 45
6.1.6 Matematička indukcija 47
6.2 Skup racionalnih brojeva 49
6.3 Skup iracionalnih brojeva 49
6.4 Skup realnih brojeva 49
6.5 Zadaci za vježbu 52

7 Jednačine i sistemi **53**
7.1 Linearne algebarske jednačine 53
7.2 Sistemi linearnih algebarskih jednačina 54

8 Kompleksni brojevi **57**
8.1 Algebarski oblik 59
8.1.1 Operacije sa komp. brojevima u alg. obliku 59
8.2 Geo. interpretacija kompleksnog broja 59
8.3 Trig. oblik kompleksnog broja 61
8.3.1 Množenje i dijeljenje kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku 62

8.3.2 Eksponencijalni kompleksnog broja . . . 62
8.3.3 Stepenovanje kompleksnog broja . . . 63
8.3.4 Korjenovanje kompleksnog broja . . . 63
8.4 Zadaci za vježbu . . . 65

Predgovor

Svrha pisanja ovog materijala je da olakša studenticama i studentima Odsjeka razredna nastava i Odsjeka predškolski odgoj na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Tuzli pripremu za polaganje ispita Osnove matematike 1. Ovaj materijal ili predavanja napisana su na osnovu Radić [6], Ušćumlić i Miličić [8], Mitrinović, Mihailović i Vasić [5], Dedagić [2], Crnjac, Jukić i Scitovski [1], Jukić i Scitovski [3, 4], K.H. Rosen [7] . Primjedbe, prijedlozi, uočene greške ☹, a i pohvale ☺ su dobrodošle i možete ih poslati na **samir.karasuljic@untz.ba** ili **samir.karasuljic@gmail.com**.

Poglavlje 1

Uvod

Osnovni pojmovi i definicije U matematici, kao i u drugim naukama, koristimo se riječima iz svakodnevnog života, čija značenja dobro znamo. Međutim osim ovih riječi upotrebljavamo i stručne riječi (odnosno pojmove, termine, izraze, ...). Ove stručne pojmove treba posebno objasniti, tj. dati neku formulaciju šta se podrazumijeva pod tim pojmovima, drugim riječima treba ih definisati. Definisati neki pojam znači objasniti ti ga preko drugih, jednostavnijih već poznatih pojmova. Na primjer da bi objasnili šta je kružnica koristimo pojam skup, zatim tačka i dr., te kažemo: Kružnica je skup svih tačaka u istoj ravni koje su podjednako udaljene od jedne fiksirane tačke te ravni. Sada se postavljaju pitanja: A šta je to ravan? Šta je to skup? Šta je tačka? Jasno je da postoji jedan lanac objašnjavanja jednog pojma preko drugog ili više njih, na primjer pojam P objašnjavamo preko pojma N, zatim pojam N preko pojma M. Lako je zaključiti da ovo zaključivanje ima kraj, tj. dolazimo do nekog pojma A, kojeg ne možemo objasniti preko jednostavnijih pojmova. Jedino preostaje da ovaj pojam A objasnimo kroz primjere iz svijeta oko nas ili da ga prihvatimo kao intuitivno jasan. Ovakvi pojmovi su već susretani na nižim nivoima obrazovanja, a neki od tih pojmova su tačka, prava, ravan, skup i dr. Ovakve pojmove nazivamo osnovnim pojmovima.

Za svaki pojam koji se definiše dajemo formulaciju iz koje se jasno vidi šta se pod njim podrazumijeva, koristeći se pri tome osnovnim i ranije definisanim pojmovima. Vodi se računa da u definiciji ne bude ni "viška" ni manjka "elemenata", ili da ne bude ni "preširoka", a ni "preuska", da bude jasna, tačna, precizna, da ne definišemo pojam sa njim samim, itd.

Definicija 1.1 (Nepotpuna).

Kružnica je skup svih tačaka koje su podjednako udaljene od jedne fiksirane tačke.

U ovoj definiciji izostavljeno je "te ravni", pa nije jasno je li definisana kružnica ili lopta.

Definicija 1.2 (Višak riječi).

Paralelogram je četvorougao čije su naspramne stranice jednaka i paralelne.

Višak su riječi "i paralelne", jer čim su naspramne stranice jednake one su i paralelne.

Definicija 1.3 (Definisanje "u krug").

Prav ugao je onaj koji je okomit.

Nekorektna definicija prav i okomit ugao su isti pojmovi.

Dakle definicijom uvodimo nove pojmove. Definicija ima dva glavna dijela: **definiendum** (dio koji se definiše) i **definiens** (dio kojim se definiše). Možemo reći i da svaka definicija ima **genus** (rod) i specifične odlike.

Definicija 1.4.

Paralelogram je četverougao čije su naspramne stranice jednake.

Ovo je ispravna definicija paraelograma, definiendum je paralelogram, definiens je četverougao čije su naspramne stranice jednake, genus je četverougao, dok su specifične osobine jednake naspramne stranice.

Aksiome i teoreme Vidjeli smo da se svaki pojam ne može definisati. Isto tako ne možemo ni svaku tvrdnju dokazati. Neke tvrdnje prihvatamo bez dokaza. Ovakve tvrdnje nazivamo osnovne tvrdnje ili **aksiome** neke teorije. Tvrdnje koje dokazujemo su **teoreme**. Teoreme dokazujemo koristeći aksiome, ranije dokazane teoreme, kao i pojmove bilo osnovne bilo definisane. Na primjer, tvrdnju da je jedan prirodan broj uzimamo kao aksiom, dok tvrdnju da prostih brojeva ima beskonačno mnogo smatramo teoremom.

Matematika je bitno deduktivna nauka Svaku matematičku teoriju razvijamo po uzoru na Euklidsku geometriju iz antičke Grčke. Postupak je sljedeći: polazimo od određenog broja osnovnih pojmova i aksioma, zatim se svaki novi pojam uvodi definicijom, a svaka nova tvrdnja se dokazuje, tj. pokazujemo da je svaka nova tvrdnja logična posljedica aksioma, definicija i prethodno dokazanih tvrdnji (teorema).

Za ovakav način razvijanja neke teorije kažemo da je deduktivan[1], pošto nove pojmove koje definišemo i tvrdnje koje dokazujemo izvodimo (dedukujemo) iz osnovnih pojmova, aksioma i prethodno dokazanih teorema, i to radimo potpuno oslanjajući se na matematičku logiku (o kojoj će poslije biti riječi) pri tome ne koristeći empiriju. Razumije se, i indukcija[2] ima veliko značenje u izgradnji matematike, jer nam pomaže u formulaciji osnovnih pojmova i aksioma.

Euklid je saznanja o geometriji i aritmetici iz antičke Grčke zapisao u Elementima (13 knjiga) upravo na ovaj opisani deduktivni način, od osnovnih pojmova i aksioma uvode se novi pojmovi preko definicija a tvrdnja se dokazuju. Ovakvo struktuirana matematička teorija (ili područje, grana) naziva se **aksiomatski sistem**. Aksiomatski sistem se sastoji od:

1. Skupa osnovnih pojmova (koje izražavamo nedefinisanim terminima koji sačinjavaju osnovu našeg stručnog riječnika);
2. Skupa aksioma, tj. od skupa početnih (nedokazanih) tvrdnji;
3. Zakona logike;
4. Skupa teorema koji slijede iz aksioma i definicija na temeljima zakona logike.

U formiranju aksiomatskog sistema jedno od najosjetljivijih pitanja ja upravo izbor osnovnih pojmova i aksioma. Nekada je manje važna logika, a više intuicija u ovom odabiru, te je itekako bitna i genijalnost samog matematičara koji razvija tu novu teoriju.

1.1 Matematička logika

U savremenoj matematici bitno mjesto zauzima jezik, odnosno korištenje jezika matematičke logike. Međutim veliku ulogu matematička logika ima i van same matematike. Značajna primjena je u kao u prirodnim naukama, tehničkim disciplinama i dr., na primjer u radu računara, u teorijskoj kibernetici itd.

Račun izkaza

Polazni objekti teorije iskaza nazivaju se elementarnim iskazima ili elementarnim sudovima. Uobičajeno se obilježavaju malim slovima a, b, c, ... Pretpostavlja se da elementarni iskaz mora biti ili istinit (tačan) ili neistinit (netačan). Takođe, smatramo da postoji mogućnost da se provjeri da li je dati iskaz tačan ili netačan. U algebri iskaza obično se ne razmatra sam sadržaj iskaza, nego da li je iskaz tačan ili netačan. Dakle, pod iskazom podrazumijevamo smišljeno tvrđenje, koje ima svojstvo da može biti samo ili tačno ili netačno. Istinitost iskaza p označava se sa grčkim slovom τ, i vrijedi

$$\tau(p) = \begin{cases} \top, \text{ako je iskaz } p \text{ tačan;} \\ \bot, \text{ako je iskaz } p \text{ netačan.} \end{cases} \tag{1.1}$$

$\top$ se čita "te", a $\bot$ "ne te".

Primjer 1.1.

Posmatrajmo sljedeće rečenice

1. Broj 36 je djeljiv sa 9.

[1] Dedukcija je metoda zaključivanja kojom iz opštih principa izvodimo pojedinačne zaključke.

[2] Indukcija je metoda zaključivanja kojom na osnovu posmatranja i proučavanja pojedinačnih slučajeva otkrivamo opšte principe. Mana indukcije je ta što u posmatranju ne obuhvata sve slučajeve, već samo odabrane, pa ne možemo biti sigurni je li dobijeni zaključak indukcijom valjan.

2. Broj 14 je djeljiv sa 6.
3. Broj 4 je manji od 10.
4. Beč je glavni grad Mađarske.

Pojašnjenje:

Iskazi 1. i 3. su tačni, dok 2. i 4. nisu. Sljedeće rečenice nisu iskazi:

1. $x + 3 < 0$, (jer nije data vrijednost promjenljive x).
2. Svim Sunčevog ima konstantu (rečenica nema smisla).
3. Februar ima 28 dana (nije precizirana godina, te se ne može utvrditi tačnost).
4. Danas je lijepo vrijeme (zavisi od ličnog mišljenja).

Logičke operacije

Od elementarnih iskaza pomoću logičkih operacija formiraju se složeni iskazi. Rezultate primjene ovakvih operacija mogu se prikazati u tablicama istinitosti. Operacije koje samo jednom iskazu daju određene vrijednosti nazivaju se unarne, ima ih 4, ako se operacija odnosi na dva iskaza onda je to binarna operacija, njih ima $2^{2^2} = 16$. Operacije nad n iskaza, tj. n–narne operacija ne uvode direktno, nego preko unarnih i binarnih operacija.

Počećemo sa negacijom

Definicija 1.5 (Negacija).

Negacija iskaza p je iskaz koji je istinit ako i samo ako je iskaz p neistinit, a neistinit je ako i samo ako je iskaz p istinit.

$\tau(p)$	$\tau(\neg p)$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Tabela 1.1: Tablica negacije

Primjer 1.2.

Negirati iskaze:
p : 3 je veće od 1;
q : 5 je manje od 4.

Rješenje:
$\neg p$: 3 nije veće od 1
$\neg q$: 5 nije manje od četiri.
Vidimo da je $\tau(p) = \top$ ali $\tau(\neg p) = \bot$, dok je $\tau(q) = \bot$ i $\tau(\neg q) = \top$.

Definicija 1.6 (Konjukcija).

Konjukcija iskaza p i q je iskaz koji je istinit ako i samo ako su oba iskaza p i q istiniti.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \wedge q)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Tabela 1.2: Tablica konjukcije

Primjer 1.3.

Formirati konjukciju od zadanih iskaza:
p : broj 24 je sadržilac broja 6;
q : broj 24 je djelilac broja 48.
Rješenje:
$p \wedge q$: broj 24 je sadržilac broja 6 i djelilac broja 48. Ova konjukcija je tačna jer su oba iskaza p i q tačni.

Primjer 1.4.

Formirati konjukciju od sljedećih iskaza:
p : četvorougao ima dvije dijagonale;
q : petougao ima 4 dijagonale.
Rješenje:
$p \wedge q$: četvorougao ima dvije dijagonale i petougao ima 4 dijagonale. Konjukcija nije tačna jer petougao ima 5 dijagonala (broj dijagonala je $D_n = \frac{(n-3)n}{2}$).

Definicija 1.7 (Disjunkcija).

Disjunkcija iskaza p i q je iskaz koji je istinit ako i samo ako je bar jedan od iskaza p ili q istiniti.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \vee q)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Tabela 1.3: Tablica disjunkcije

Primjer 1.5.

Formirati disjunkciju od iskaza:
p : broj 10 je paran;
q : broj 10 je prost.
Rješenje:
$p \vee q$: broj 10 je paran ili broj 10 je prost. Disjukcija je tačna jer $\tau(p) = \top$, što je dovoljno da dusjunkcija bude tačna.

Definicija 1.8 (Ekskluzivna disjunkcija).

Ekskluzivna disjunkcija iskaza p i q je iskaz koji je istinit ako i samo ako je istinit samo jedan od iskaza p i q.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \veebar q)$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Tabela 1.4: Tablica ekskluzivne disjunkcije

PRIMJER 1.6.

Dati su iskazi:
p : sutra u 5 sati poslije podne biću kući;
q : sutra u 5 sati poslije podne biću van kuće.
Rješenje:
Sutra u 5 sati poslije podne ili ću biti kući ili ću biti van kuće. Samo jedno od toga može biti tačno.

DEFINICIJA 1.9 (Implikacija).

Implikacija iskaza p i q je iskaz koji je neistinit ako i samo ako je istinit iskaz p a iskaz q je neistinit.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \Rightarrow q)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Tabela 1.5: Tablica implikacije

U implikaciji $p \Rightarrow q$ iskaz p se naziva premisa ili pretpostavka, a iskaz q posljedica ili konsekvenca implikacije. Iskaz $p \Rightarrow q$ čita se još "iz p proizilazi q"; ili "p je dovoljan uslov za q"; ili "q je potreban uslov za p".

Kada se kaže "p je dovoljan uslov za q", onda to znači da je iskaz q istinit ako je iskaz p istinit. Na primjer, da bi neki broj bio djeljiv sa 2 dovoljno je da bude djeljiv sa 4, Ali ako broj nije djeljiv sa 2, onda nije djeljiv ni sa 4. U ovom slučaju djeljiv sa 4 je dovoljan uslov za iskaz djeljiv sa 2, dok je djeljiv sa 2 potreban uslov za djeljiv sa 4. Kada se kaže "q je potreban uslov za p", to znači da iskaz p ne može biti istinit ako iskaz q nije istinit.

PRIMJER 1.7 (Pojašnjenje za treću i četvrtu vrstu iz Tabele 1.5 –Tablica implikacija).

Dva dječaka sabiraju brojeve 10 i 20. Prvi dječak kada je sabrao kaže da je zbir 40, drugi kaže pogriješio si. Posmatrajmo implikaciju: Ako je zbir brojeva 10 i 20 jednak 40, onda je prvi dječak pogriješio. Ovdje je
p : $10 + 20 = 40$;
q : prvi dječak je pogriješio.
Implikaciju $p \Rightarrow q$ upravo iskazanu smatramo istinitom (iako premisa p nije tačna), i ovakve primjere susrećemo često u životu.

A ako je drugi dječak rekao prvom:
Ako je $10 + 20 = 40$, onda sam ja visok 5 metara. Ovdje je
p : $10 + 20 = 40$,
q : drugi dječak je visok 5 metara. Oba iskaza su netačna, ali ovu implikaciju prirodno smatramo tačnom.

DEFINICIJA 1.10 (Ekvivalencija).

Ekvivalencija iskaza p i q je iskaz koji je istinit ako i samo ako su vrijednosti iskaza p i q iste.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \Leftrightarrow q)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

Tabela 1.6: Tablica ekvivalencije

PRIMJER 1.8.

Iskaze:
p **:** ako je broj djeljiv sa 6, onda je djeljiv i sa 2 i sa 3;
q **:** ako je broj djeljiv i sa 2 i sa 3, onda je on djeljiv i sa 6.
možemo spojiti u jedan složeni iskaz (ekvivalenciju):
$p \Leftrightarrow q$ **:** da bi prirodan broj bio djeljiv sa 6, potrebno je i dovoljno da bude djeljiv i 2 i sa 3; ili prirodan broj je djeljiv sa 6, ako i samo ako je djeljiv i 2 i sa 3; ili prirodan broj je djeljiv sa 6, onda i samo onda ako je djeljiv i 2 i sa 3.

DEFINICIJA 1.11 (Iskazna formula).

Iskazna formula je konačan niz iskaza sastavljen pomoću logičkih operacija, konstanti $\top$ i $\perp$ i glavnih promjenljivih iskaza p, q, $r, \ldots$

PRIMJER 1.9 (Iskazne formule).

Iskazne formule sa dva i tri iskazna slova.

(a) $(p \Rightarrow \neg r) \wedge (p \veebar r)$;

(b) $(p \wedge q) \vee r$.

DEFINICIJA 1.12 (Tautologija).

Iskazna formula koja je tačna bez obzira na istinitosnu vrijednost iskaza u njoj, naziva se tautologija.

PRIMJER 1.10.

Ispitati da li je tautologija

(a) $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$;

(b) $p \Rightarrow (q \vee r)$.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(\neg p)$	$\tau(p \wedge \neg p)$	$\tau((p \wedge \neg p) \Rightarrow q)$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$

Tabela 1.7: Rješenje za iskaznu formulu datu pod (a)

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(r)$	$\tau(q \vee r)$	$\tau(p \Rightarrow (q \vee r))$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Tabela 1.8: Rješenje za iskaznu formulu datu pod (b)

Iz Tabele 1.7 zaključujemo da je formula data u (a) tautologija, dok na osnovu Tabele 1.8 vidimo da formula data u (b) nije tautologija.

Predikati i kvantifikatori Mogućnosti primjene računa iskaza, posebno u matematici, dosta su ograničene jer se ne mogu iskoristiti u iskazivanju osobina i odnosa između matematičkih objekata. Ovaj nedostatak otklanja se uvođenjem novih pojmova i operacija. Na primjer, ako su x i y realni brojevi, onda iskazi "x je paran broj" ili "x je manji od y" mogu biti kako istiniti tako i neistiniti, zavisno od vrijednosti realnih brojeva x i y. Ako je $x = 1$ onda je prvi iskaz neistinit, a kao je $x = 2$ onda je taj iskaz istinit. Za $x = 3$ i $y = 5$ drugi iskaz je tačan (istinit), dok za $x = 6$ i $y = 4$ neistinit je. Iskaze ovakve vrste smatramo neodređenim. U ovakvim slučajevima elementarni iskazi tretiraju se kao promjenljive koje uzimaju jednu od vrijednosti $\top$ i $\bot$. U matematici se susrećemo sa iskazima koji se odnose na izvjesne objekte, ili elemente.

Neka je dat skup M objekata (elemenata) $x, y, z, \ldots$ Iskazi koji se odnose na te objekte obilježavaju se sa, na primjer

$$P(x),\ Q(y),\ R(x, y), \ldots$$

Ako je M skup prirodnih brojeva, u tom slučaju prethodni iskazi mogu da znače: "x je prost broj", "y je paran broj", "x je manje od y", respektivno. Sada ovi iskazi mogu biti kako istiniti, tako i neistiniti. U nastavku samo ćemo iskaze sa ovakvim osobinama razmatrati.

Neka je x proizvoljni element iz skupa objekata M. U tom slučaju neki iskaz $P(x)$ je potpuno određen kada je x objekat iz M. Isto tako neki iskaz $R(x, y)$ je potpuno određen ako su x i y određeni objekti iz skupa M. Ovakvi iskazi postaju funkcije od tih objekata, tj. promjenljivih.

Definicija 1.13 (Predikat).

Neodređeni iskazi koji zavise od jedne ili više promjenljivih nazivaju se logičke funkcije ili predikati.

Skup M naziva se predmetna oblast, dok se elementi skupa M nazivaju predmetne promjenljive ili promjenljivi objekti, a ako su neki od tih objekata fiksirani onda se oni nazivaju individualni objekti ili predmetne konstante. Iskazi ili iskazne promjenljive i predikati koji zavise od individualnih objekata nazivaju se, u logici predikata, elementarni iskazi. Iskazne promjenljive i predikati kako od individualnih objekata tako i od predmetnih promjenljivih nazivaju se elementarne formule logike predikata.

Definicija 1.14 (Formule logike predikata).

Pod formulom logike predikata podrazumijeva se svaki konačan izraz formiran od elementarnih iskaza i elementarnih formula logike predikata, primjenom konačnog broja logičkih operacija $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$.

Možemo primjetiti da logika ili račun predikata predstavlja poopštenje računa iskaza, pošto sadrži u sebi cio račun iskaza kao i sve njegove operacije i formule.

Osim operacija računa iskaza u logici predikata upotrebljavaju se još dvije nove operacije, koje su povezane sa osobinama logike ili računa predikata.

1^0 Univerzalni kvantifikator. Neka je $P(x)$ potpuno određen predikat koji ima jednu od dvije vrijednosti $\top$ ili $\bot$ za svaki element skupa M. Tada se pod izrazom

$$(\forall x)P(x),$$

koji se čita "za svako x $P(x)$ je istinito", podrazumijeva istinit iskaz, kada je $P(x)$ istinito za svako x iz skupa M, a neistinit u suprotnom slučaju. Sam simbol $\forall$ naziva se univerzalni kvantifikator.

2^0 Egzistencijalni kvantifikator. Neka je $R(x)$ neki predikat. Formula

$$(\exists x)R(x),$$

koja se čita "postoji x za koje je $R(x)$ istinito, definiše se tako što se smatra da poprima vrijednost $\top$, ako postoji element x iz skupa M, za koji je $R(x)$ istinito, a vrijednost $\perp$ u suprotnom slučaju. Znak $\exists$ naziva se egzistencijalni kvantifikator.

PRIMJER 1.11.

1. $(\forall x)\ x = x$, je istinit iskaz;
2. $(\forall x)(\exists y)\ x - y = 2$, čita se "za svako x postoji y, tako da je $x - y = 2$";
3. $(\forall x)(\forall y)\ (x = y) \Rightarrow (x^3 = y^3)$, čita se "za svako x i svako y, iz $x = y$ slijedi $x^3 = y^3$";
4. $(\exists x)(\exists y)\ x^2 + y^2 = 4$, čita se "postoji x i postoji y, takvi da je $x^2 + y^2 = 4$";
5. $(\exists x)\ x^2 + 1 = 0$, ovaj iskaz nije tačan.

1.2 Zadaci za vježbu

1. Ispitati da li sljedeće formule tautologije:
   (a) $p \wedge \neg p$; (b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$; (c) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$; (d) $(p \vee q) \Rightarrow \neg q$;
   (e) $(p \wedge q) \vee r$; (f) $(p \vee \neg) \Rightarrow (q \wedge r)$; (g) $(q \wedge \neg g) \Rightarrow (p \vee \neg r)$.
2. Pomoću kvantifikatora izraziti rečenicu: Za svaki realan broj a je $a^3 = a \cdot a \cdot a$, (oznaka za skup realnih brojeva je $\mathbb{R}$);
3. Izraziti pomoću kvantifikatora rečenicu: Proizvod tri realna broja a, b i c je nula onda i samo onda ako je $a = 0$ ili $b = 0$ ili $c = 0$;
4. Napisati pomoću kvantifikatora: Za svaki realan broj x je $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$;
5. Napisati pomoću kvantifikatora: Za svako a je $a + a + a = 3a$;
6. Napisati pomoću kvantifikatora: Postoji bar jedno a za koje je $a^2 = 4$;
7. Napisati pomoću kvantifikatora: Za svako x postoji y takvo da je $x + 3y = 4$;
8. Napisati pomoću kvantifikatora: Postoje x i y takvi da je $x + y = 7$;
9. Napisati pomoću kvantifikatora: Za svako x iz skupa prirodnih brojeva postoji y iz skupa realnih brojeva takav da je $y : x = 5$, (oznaka za skup prirodnih brojeva je $\mathbb{N}$);
10. Napisati riječima iskaze date formulama:
    (a) $(\exists y \in \mathbb{N})\ y + 1 \geqslant 0$; (b) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x^2 + y^2 \geqslant 0$; (c) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{Z}) x > y$, (oznaka za skup cijelih brojeva je $\mathbb{Z}$).
11. Utvrditi istinitnu vrijednost iskaza:
    (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x + y > 0$; (b) $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x + y > 0$.

Poglavlje 2

Skupovi

Skup odnosno pojam skupa igra značajnu ulogu u savremenoj matematici, kako zbog činjenice da je teorija skupova postala jedna detaljna i sadržajna matematička disciplina, to i zbog uticaja na druge oblasti matematike. U današnjoj matematici se vrlo lako može uočiti skupovno–teorijski pristup. Bitno je pomenuti da se jezik teorije skupova sve više koristi i drugoj naučnoj i tehničkoj literaturi. Primjena ovog apstraktnog jezika omogućava, između ostalog, lakše povezivanje i ispitivanje raznih procesa i pojava koje su prilično razlikuju po raznim kriterijumima.

Izučavanje i primjena teorije skupova može se realizovati na različitim nivoima strogosti. Za potrebe ovog izlaganja dovoljna će biti nivo strogosti "naivne teorije skupova".

Osnove teorije skupova postavio je krajem devetnaestog vijeka njemački matematičar Cantor. [1]

2.1 Uvodni pojmovi, definicije i notacija

Skup i elemente skupa smatramo intuitivno jasnim i zbog toga ih prihvatamo bez definisanja, tj. smatramo ih osnovnim pojmovima. Primjeri skupova su: skup studentica/studenata u jednoj grupi na nekom fakultetu, skup stanovnika u nekoj zgradi, skup svih stanovnika jednog mjesta, i dr. U matematici su posebno bitni skupovi sa matematičkim objektima, a to su na primjer skup prirodnih brojeva kojeg sačinjavaju prirodni brojevi, skup realnih brojeva, skupovi koje sačinjavaju razni geometrijski objekti i dr. Neki skupovi koji se češće upotrebljavaju imaju svoje standardne oznake, na primjer

- $\mathbb{N}$ skup svih prirodnih brojeva;
- $\mathbb{Z}$ skup svih cijelih brojeva;
- $\mathbb{Q}$ skup svih racionalnih brojeva;
- $\mathbb{R}$ skup svih realnih brojeva;
- $\mathbb{R}^+$ skup svih realnih pozitivnih brojeva;
- $\mathbb{I}$ skup svih iracionalnih brojeva;
- $\mathbb{C}$ skup svih kompleksnih brojeva;
- (a, b) otvoren interval u $\mathbb{R}$ ili kraće interval;
- $[a, b]$ zatvoren interval u $\mathbb{R}$ ili kraće segment.

Elementi mogu pripadati ili ne pripadi nekom skupu. Tvrdnje "element x pripada skupu A" ili "x je element skupa A", ili "x je tačka iz skupa A," imaju isto značenje (smisao) i ovo pišemo simbolički $x \in A$ (čitamo x pripada skupu A) oznaka $\in$ znači pripada. U slučaju da element x ne pripada skupu A, onda pišemo $x \notin A$, (čitamo x ne pripada skupu A), $\notin$ oznaka da neki element ne pripada skupu.

U slučaju da elementi a, b, c pripadaju skupu A pišemo

$$\boxed{A = \{a, b, c\}} \tag{2.1}$$

Skup ne zavisi od rasporeda (poretka) kojim su dati njegovi elementi. Tako su na primjer, skupovi $\{1, 2, 3\}$ i $\{2, 1, 3\}$ jednaki. Takođe su jednaki i skupovi $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 3, 3, 3\}$, itd.

[1] George Cantor, 3.3.1845. –6,1,1918., bio je njemački matematičar. Osnivač je teorije skupova.

Ako je n prirodan broj, skup $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ od n elemenata $x_1, x_2, \dots, x_n$ je konačan. Skup je beskonačan ako broj njegovih elemenata nije konačan. Broj elemenata nekog skupa A označavamo sa $\text{card}\, A$ i čitamo kardinalni broj[2] skupa A.

Elementi skupa imaju neku zajedničku osobinu, na primjer $P(x)$, pa možemo sad pisati

$$\boxed{B = \{x : P(x)\}} \tag{2.2}$$

a ovo znači "B je skup svih elemenata koji imaju osobinu $P(x)$.

Primjer 2.1.

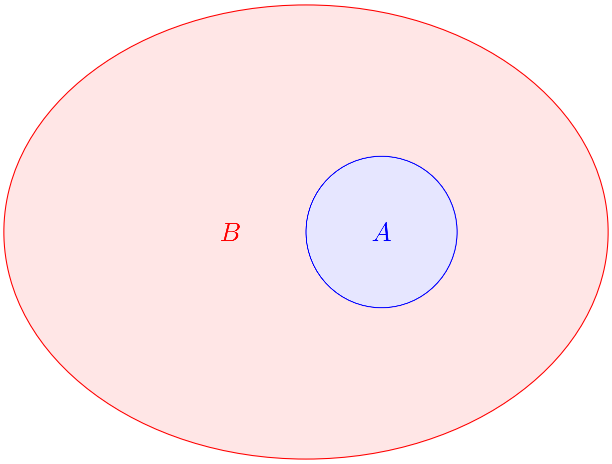
Napisati simbolički skup realnih brojeva koji su veći od 3 a manji od 10.
Rješenje: $B = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x < 10\}$, u ovom slučaju $P(x)$ je $3 < x < 10$.

Skup može sadržavati konačan broj elemenata, beskonačan a možemo biti i bez elemanta. U slučaju da broj elemenata 0 kažemo da je to prazan skup. Oznaka za prazan skup je $\emptyset$.

Ako su svi elementi jednog skupa A sadržani u drugom skupu B, simbolički zapisano $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$, onda kažemo da je skup A sadržan u skupu B, ili da je A podskup od B i pišemo

$$\boxed{A \subset B}$$

Vidjeti Sliku 2.1 prethodno možemo preciznije napisati



Slika 2.1: Skup A je podskup skupa B

Definicija 2.1 (Podskup).

Svaki skup koji je sadržan u nekom skupu B naziva se podskup skupa B.

Ako vrijedi da su elementi skupa A sadržani u skupu B, i elementi skupa B su sadržani u skupu A, onda su skupovi A i B imaju iste elemente, drugi riječima A i B su jednaki i vrijedi $A = B$.

Prazan skup je podskup svakog skupa.

[2]Kod skupova sa beskonačnim brojem elemenata kardinalni broj predstavlja moć skupa.

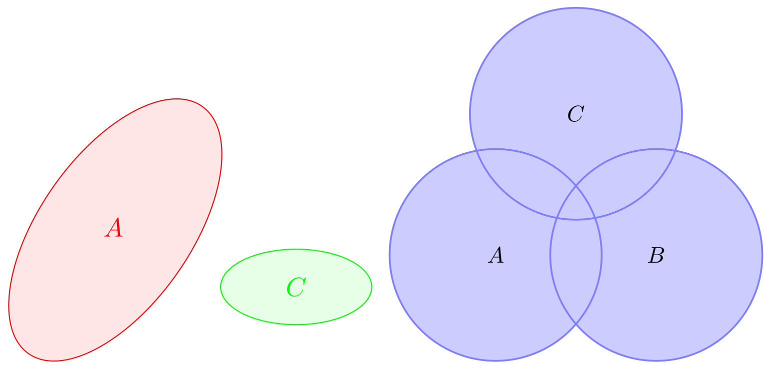
Definicija 2.2 (Partitivni skup).

Skup svih podskupova skupa A naziva se partitivni skup skupa A i obilježava se sa $P(A)$.

Primjer 2.2.

Dat je skup $A = \{a, b, c\}$. Odrediti partitivni skup skupa A.
Rješenje: $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Ako je n broj elemenata skupa A, onda je broj elemenata partitivnog skupa $P(A)$ jednak 2^n, tj. ako je card $= n$ onda je $\operatorname{card} P(A) = 2^n$. Skupove možemo predstavljati i grafički jedan od načina je pomoću Euler–Vennovih dijagrama, Slika 2.2.



Slika 2.2: Predstavljanje skupova Euler–Vennovim dijagramima

Često puta korisno je uvesti pojam univerzalnog skupa. U mnogim matamatičkim oblastima javlja se potreba za nekim opštim skupom, koji će sadržavati sve skupove koji se razmatraju u toj oblasti. Uobičajeno ovakav skup se naziva univerzalni skup (ili univerzum). Univerzalni skup se ne definiše nego se jednostavno podrazumijeva da znamo o kakvom skupu se radi. Po pravilu univerzalni skup je relativan pojam, razlikuje se od oblasti do oblasti, na primjer on može biti skup svih tačaka ravni ili skup svih tačaka prave, ili skup svih racionalnih brojeva,... Dakle, univerzalni skup zavisi od potrebe i oblasti gdje se koristi.

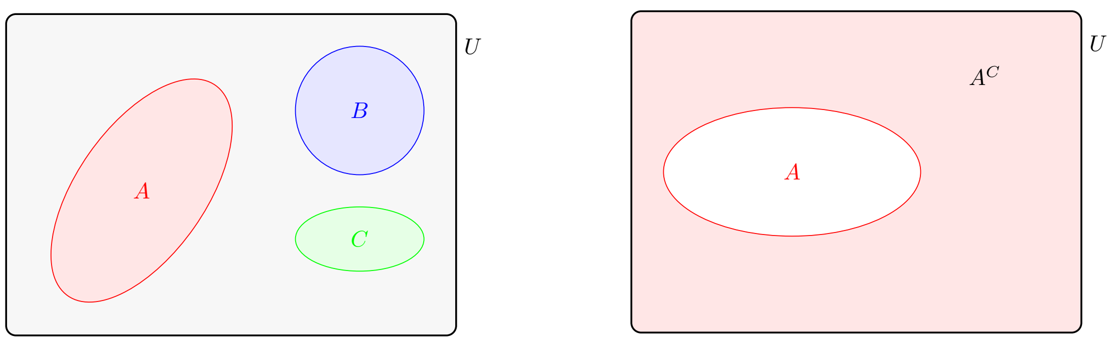
U odnosu na univerzalni skup možemo uvesti pojam komplementa skupa.

Definicija 2.3 (Komplement skupa).

Ako je $A \subset U$, onda se pod komplementom skupa A u odnosu na skup U podrazumijeva skup A^C za koji vrijedi

$$A^C = \{x : x \in U \land x \notin A\}.$$

Na Slici 2.3b prikazan je svijetlocrvenom bojom komplement skupa A u odnosu na skup U.



(a) Univerzalni skup U

(b) Komplement A^C

Slika 2.3: Univerzalni skup U i komplement A^C, skupa A u odnosu na univerzalni skup U

2.2 Operacije sa skupovima

Za neki dati univerzalni skup U, možemo od elemenata njegovog partitivnog skupa $P(E)$ formirati nove skupovi primjenom raznih operacija.

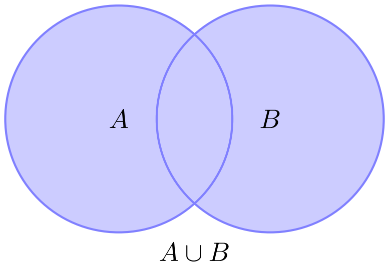
Unija skupova

Definicija 2.4 (Unija skupova).

Unija skupova A i B (u oznaci $A \cup B$) je skup svih elemenata koji se nalaze bar u jednom od skupova A ili B.

Simbolički zapisana unija skupova A i B izgleda ovako

$$A \cup B = \{x : x \in A \lor x \in B\}.$$



Slika 2.4: Unija skupova A i B, predstavljena je svijetloplavom bojom.

Primjer 2.3.

Ako je $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{3,4,9,10\}$. Izračunati $A \cup B$.
Rješenje: $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,9,10\}$.

Presjek skupova

Definicija 2.5 (Presjek skupova).

Presjek skupova A i B (u oznaci $A \cap B$) je skup svih elemenata koji istovremeno pripadaju i skupu A i skupu B.

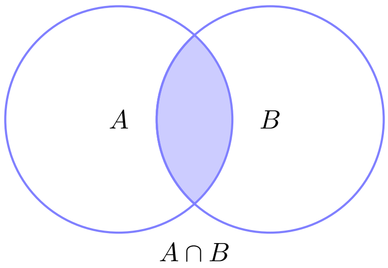
Simbolički zapisan presjek skupova A i B izgleda ovako

$$A \cap B = \{x : x \in A \land x \in B\}.$$

Ako dva skupa nemaju zajedničkih elemenata za njih imamo naziv dat u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.6 (Disjunktni skupovi).

Za dva skupa kažemo da su disjunktni ako nemaju zajedničkih elemenata.



Slika 2.5: Presjek skupova A i B

PRIMJER 2.4.

Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 7, 8\}$, $C = \{6, 7, 9\}$. Odrediti $A \cap B$, $B \cap C$ i $A \cap C$.
Rješenje: $A \cap B = \{1, 3\}$, $B \cap C = \{7\}$, $A \cap C = \varnothing$.

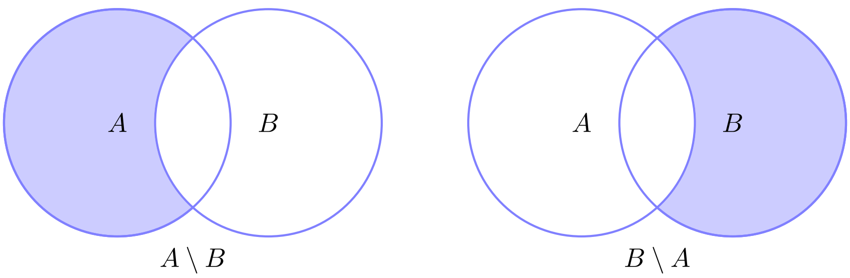
Razlika i simetrična razlika skupova

DEFINICIJA 2.7 (Razlika skupova).

Razlika (diferencija) skupova A i B (u oznaci $A \setminus B$) je skup svih elemenata skupa A a koji ne pripadaju skupu B.

Simbolički zapisana razlika skupova A i B izgleda ovako

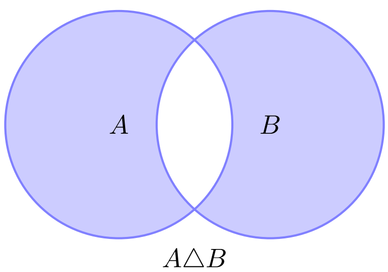
$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$



Slika 2.6: Razlika skupova $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

DEFINICIJA 2.8 (Simetrična razlika skupova).

Skup $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ je simetrična razlika skupova A i B i obilježava se sa $A \bigtriangleup B$.



Slika 2.7: Simetrična razlika skupova

PRIMJER 2.5.

Dati su skupovi $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{d, e, f, g, h\}$. Odrediti $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$.

Rješenje:

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; $A \cap B \quad = \{d, e, f\}$; $A \setminus B = \{a, b, c\}$; $B \setminus A \quad = \{g, h\}$, $A \triangle B = \{a, b, c, g, h\}$.

2.3 Dekartov proizvod skupova

Simboli $\{a, b\}$ i $\{b, a\}$ označavaju isti skup od dva elementa a i b. U ovakvim skupovima redoslijed elemenata nije bitan. Međutim nekada je potrebno da znamo i redoslijed elemanata, na primjer koordinate tačke u pravouglom koordinatnom sistemu u ravni čine dva broja i bitno je da znamo šta je x–koordinata, a šta y–koordinata. Da bi riješili ovaj problem, uvešćemo pojam uređenog para čija je prva komponenta (projekcija) a, a druga komponenta (projekcija) b.

DEFINICIJA 2.9 (Uređeni par).

Uređeni par elemenata a i b, u oznaci (a, b), je

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Ovaj uređeni par označavamo sa (a, b)[3] ili $\langle a, b\rangle$. Smatramo da je (a, b) različito od (b, a) osim u slučaju $a = b$. Uređeni parovi (a, b) i (c, d) su jednaki ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

DEFINICIJA 2.10 (Uređena trojka).

Uređena trojka (a, b, c) elemenata a, b, c definiše se pomoću jednakosti

$$(a, b, c) = ((a, b), c).$$

Na sličan način se definiše i uređena n–torka $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Dekartov proizvod

Sljedeći pojam važan je u matematici, a i u njenim primjenama.

DEFINICIJA 2.11 (Dekartov proizvod).

Dekartov proizvod dva skupa A i B je skup C čiji su elementi uređeni parovi sa prvom komponentom iz skupa A i drugom iz skupa B, tj.

$$C = A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

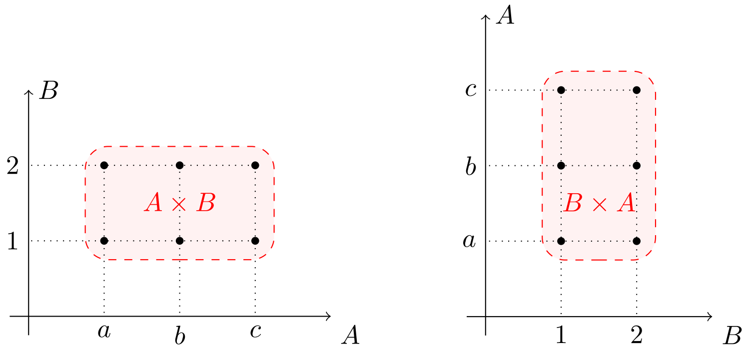
Ako skup A ima n elemenata, a skup B ima n elemenata, onda skupovi $A \times B$ i $B \times A$ imaju po $m \cdot n$ elemenata (ili ako je $\operatorname{card} A = m$ i $\operatorname{card} B = n$, onda je $\operatorname{card} A \times B = m \cdot n$).

PRIMJER 2.6.

Dati su skupovi $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$. Odrediti $A \times B$, $B \times A$.

Rješenje:
$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$; $B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

[3] Ne miješati sa intervalom (a, b)



Slika 2.8: Dekartovi proizvodi $A \times B$ i $B \times A$

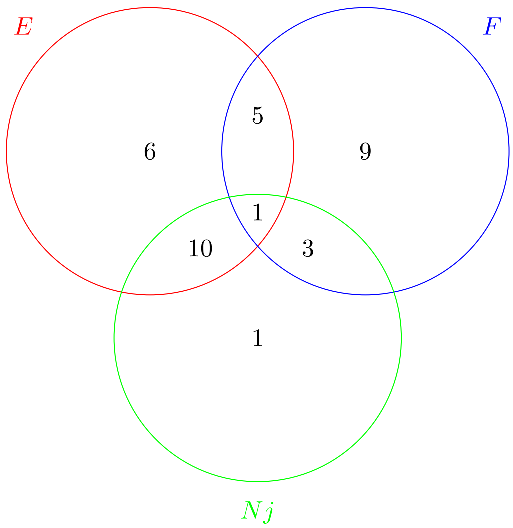
2.4 Zadaci

PRIMJER 2.7.

Na jednom kursu stranih jezika, svaki od 35 polaznika uči bar jedan od tri strana jezika (francuski, njemački i engleski) i to: 18 polaznika uči francuski, 22 engleski, 6 polaznika uči engleski i francuski, 11 engleski i njemački, 4 francuski i njemački i jedan polaznikači sva tri jezika. Koliko polaznika uči njemački jezik?

Rješenje: Označima sa F, Nj i E skupove polaznika koji uče francuski, njemački i engleski jezik, respektivno.
Ukupan broj polaznika je $\text{card}(F \cup Nj \cup E) = 35$, dok jedan polaznik uči sva tri jezika pa je $\text{card}(F \cap Nj \cap E) = 1$. Broj 1 pišemo u presjeku sva tri skupa (vidjeti Sliku 2.9), 6 polaznika uči francuski i engleski ali jedan uči i njemački pa $\text{card}(E \cap F) - \text{card}(E \cap F \cap Nj) = 5$ pišemo između skupova E i F, 11 polaznika uči engleski i njemački pa je $\text{card}(Nj \cap E) - \text{card}(E \cap F \cap NJ) = 10$ pišemo između skupova E i Nj, 4 polaznika uče francuski i njemački, pa sada $\text{card}(F \cap Nj) - \text{card}(E \cap F \cap Nj) = 3$ i to pišemo između skupova E i Nj. Pošto ukupno 18 polaznika uči francuski (samo francuski ili u kombinaciji sa ostalim jezicima), to je broj polaznika koji uče samo francuski $\text{card}\, F - \text{card}(F \cap E) - \text{card}(F \cap Nj) + \text{card}(E \cap F \cap Nj) = 9$. Na isti način postupamo sa engleskim jezikom, 22 polaznika uči engleski (ponovo sve mogućnosti), sada je broj polaznika koji uče samo engleski $\text{card}\, E - \text{card}(F \cap E) - \text{card}(E \cap Nj) + \text{card}(E \cap F \cap Nj) = 6$.

Ukupan broj polaznika koji uče engleski je $6 + 5 + 1 + 10 = 22$ (crvena kružnica), 9 polaznika uči samo francuski (plava kružnica) i 3 polaznika uče francuski i njemački. Broj ovih polaznika je $22 + 9 + 3 = 34$, preostali polaznici su oni koji slušaju samo njemački i njih je $35 - 34 = 1$. I na kraju samo saberemo broj polaznika u zelenoj kružnici, $10 + 1 + 3 + 1 = 15$, dakle ukupno je 15 polaznika koji slušaju njemački (u bilo kojoj varijanti).



Slika 2.9: Polaznici kursa stranih jezika predstavljeni Euler–Vennovim dijagramom

Primjer 2.8.

Dati su skupovi $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leqslant x < 4\}$, $B = \{1, 4\}$. Odrediti
1. $(A \cup B) \times (A \cap B)$; 2. $(A \cup B) \times (A \setminus B)$.
Rješenje:
1. Vrijedi $A = \{1, 2, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{1\}$, sada je
$(A \cup B) \times (A \cap B) = \{1, 2, 3\} \times \{1, 4\} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$.
2. Vrijedi $A = \{1, 2, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $(A \setminus B) = \{2, 3\}$, pa je sada
$(A \cup B) \times (A \setminus B) = \{1, 2, 3, 4\} \times \{2, 3\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$.

Zadaci za vježbu

1. Odrediti uniju skupova A i B ako je
(a) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \leqslant 5 \wedge x > 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : -2 \leqslant x \leqslant 3\}$; (b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant -1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$; (c) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : x > 10\}$;

2. Odrediti presjek kupova A i B ako je
(a) $A = \{x \in \mathbb{Z} : -4 \leqslant x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : 3 < x \leqslant 12\}$; (b) $A = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leqslant< 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : 5 \leqslant x < 15\}$; (c) $A = \{x \in \mathbb{R} : 6 < x \leqslant 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leqslant y \leqslant 7\}$.

3. Odrediti razlike $A \setminus B$ i $B \setminus A$ ako je
(a) $A = \{x \in \mathbb{Z} : 4 < x \leqslant 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : -2 < x \leqslant 5\}$; (b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x > -2\}$.

4. Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{2, 4, 6\}$. Odrediti
(a) $(A \cup B) \setminus C$; (b) $(A \cap B) \setminus C$; (c) $(A \cup B) \setminus (B \cap C)$; (d) $(A \cup C) \setminus (B \setminus C),$; (e) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

5. Odrediti komplement skupa B u odnosu na skup $E = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ ako je
(a) $B = \{1, 2, 3\}$, (b) $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 8\}$; (c) $B = \{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 15\}$; (d) $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

6. U jednoj porodici bilo je mnogo djece. Sedmoro njih voljelo je kupus, šestoro mrkvu, petoro krompir, četvoro je voljelo kupus i mrkvu, troje kupus i krompir, dvoje mrkvu i krompir i samo jedno dijete voljelo je sve mrkvu, krompiri kupus. Koliko je ukupno djece bilo u toj porodici?

7. U jednom razredu 10 učenika bavi se fudbalom, 12 šahom, 18 košarkom, 5 učenika fudbalom i šahom, 7 fudbalom i košarkom, 8 šahom i košarkom i 3 učenika šahom, fudbalom i košarkom. Koliko je sportista u razredu?

8. Odrediti partitivni skup za date skupove
(a) $A = \{a, b\}$; (b) $A = \{1, 2, 3\}$; (c) $A = \{a, b, c, d\}$.

9. Izračunati
(a) $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$, ako je $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{a, c, g\}$.
(b) $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$, ako je $A = \{a, 2, k\}$, $B = \{1, 2, b\}$.

Poglavlje 3

Binarne relacije

3.1 Osnovni pojmovi

Između elemenata bilo jednog ili dva i više skupova mogu da postoje različiti odnosi ili veze. U skupu realnih brojeva znamo da brojevi mogu da budu veći, manji ili jednaki, prave u geometriji mogu da budu paralelne, okomite,..., trouglovi mogu da budu podudarni, slični, ... Različite veze između elemenata skupova u matematici proučavaju se u teoriji relacija. Pojam relacije spada među najopštije pojmove matematike.

Definicija 3.1 (Binarna relacija).

Ako su A i B dva neprazna skupa, binarna relacija u skupu $A \times B$ je svaki njegov podskup.

Ako je $A = B$, relacija u skupu

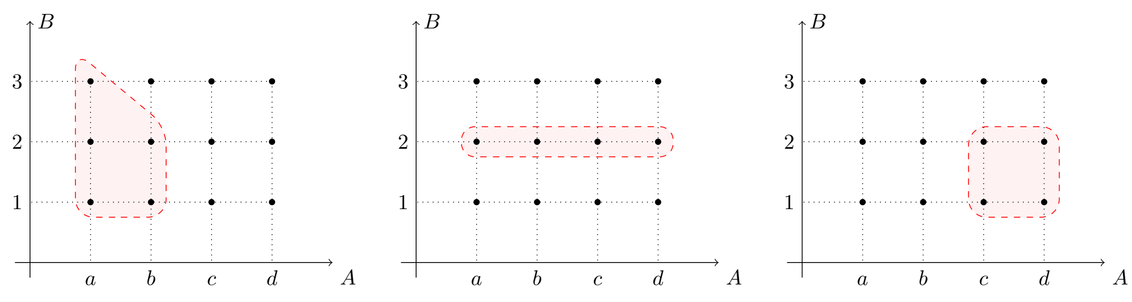
$$\boxed{A \times B = A \times A}$$

zove se i relacija u skupu A. Binarnu relaciju najčešće označavamo sa ϱ. Pošto je binarna relacija podskup Dekartovog proizvoda $A \times B$ možemo pisati $\varrho \subset A \times B$. Ako je $\varrho \subset A \times B$ i ako $(a, b) \in \varrho$, gdje je $a \in A$ i $b \in B$, onda se kaže su elementi a i b u relaciji ϱ i pišemo $a\varrho b$, a ako a i b nisu u relaciji ϱ, onda pišemo $\neg(a\varrho b)$, (može i $a \neg\varrho b$) ili $(a, b) \notin \varrho$. Binarnu relaciju ϱ simbolički pišemo

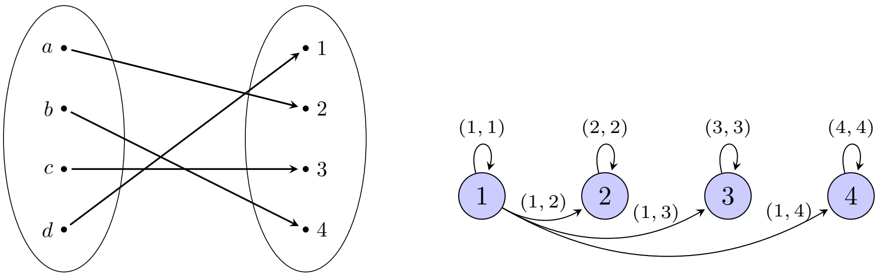
$$\boxed{\varrho = \{(a, b) \in A \times B : a \in A \wedge b \in B\}}$$

Napomena 3.1.

Relacije $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$ su binarne relacije u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$.



Slika 3.1: Primjeri binarnih relacija



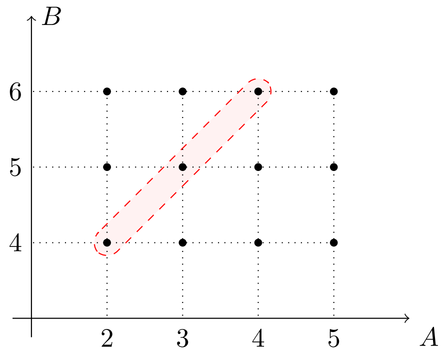
Slika 3.2: Primjeri predstavljanja binarnih relacija

Na Slici 3.1 predstavljeni su razni podskupovi Dekartovog proizvoda $A \times B$, svi ovi podskupovi su neke binarne relacije na $A \times B$. Slike 3.1 i 3.2 predstavljaju razne načine predstavljanja binarnih relacija.

Skup svih prvih koordinata relacije $\varrho \subset A \times B$ naziva se skup definisanosti ili domen relacije ϱ i obilježava se sa $D(\varrho)$ ili D_ϱ, dok se skup svih drugih koordinata ove relacije naziva skup vrijednosti relacije ϱ ili kodomen i označava $R(\varrho)$.

Primjer 3.1.

Dati su skupovi $A = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : 4 \leqslant x \leqslant 6\}$. Odrediti binarnu relaciju $\varrho = \{(a, b) \in A \times B : b = a + 2\}$, zatim odrediti D_ϱ i $R(\varrho)$.
Rješenje: Vrijedi $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, te je $\varrho = \{(2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$, i $D_\varrho = \{2, 3, 4\}$, $R(\varrho) = \{4, 5, 6\}$.



Slika 3.3: Relacije ϱ predstavljena grafički

Definicija 3.2 (Presjek skupa ϱ elementom a).

Pod presjekom skupa $\varrho \subset A \times B$ elementom $a \in A$ podrazumijeva se skup svih elemenata $b \in B$ takvih da je $(a, b) \in \varrho$, u oznaci ϱ_a.

Vrijedi

$$\varrho_a = \{b : b \in B \wedge (a, b) \in \varrho\}.$$

Definicija 3.3 (Skup svih presjeka).

Skup svih presjeka relacije ϱ naziva se faktor–skup, skupa B po relaciji ϱ, u oznaci $B|_\varrho$.

Primjer 3.2.

Neka je $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ i
$\varrho = \{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_4), (a_4, b_3), (a_5, b_2), (a_5, b_4)\}$.

Vrijedi $\varrho_{a_1} = \{b_1, b_3\}$, $\varrho_{a_2} = \{b_1, b_3, b_4\}$, $\varrho_{a_3} = \{b_1, b_2, b_4\}$, $\varrho_{a_4} = \{b_3\}$ i $\varrho_{a_5} = \{b_2, b_4\}$. Faktor–skup je $B|_\varrho = \{\varrho_{a_1}, \varrho_{a_2}, \varrho_{a_3}, \varrho_{a_4}, \varrho_{a_5}\} = \{\{b_1, b_3, \}, \{b_1, b_3, b_4\}, \{b_1, b_2, b_4\}, \{b_3\}, \{b_2, b_4\}\}$.

DEFINICIJA 3.4 (Inverzna relacija).

Ako je $\varrho \subset A \times B$, onda se pod inverznom relacijom podrazumijeva skup $\varrho^{-1} \subset B \times A$ pri čemu je

$$\varrho^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in \varrho\}.$$

Drugim riječima $b\varrho^{-1}a \Leftrightarrow a\varrho b$.

PRIMJER 3.3.

Dati su skupovi $A = \{-1, 1, 3, 4\}$ i $B = \{0, -2, 2\}$. Odrediti ϱ i ϱ^{-1}, ako je $\varrho = \{(a, b) \in A \times B : a + b = 1\}$.
Rješenje:
Vrijedi $\varrho = \{(-1, 2), (1, 0), (3, -2)\}$ i $\varrho^{-1} = \{(2, -1), (0, 1), (-2, 3)\}$.

DEFINICIJA 3.5 (Proizvod (ili kompozicija) relacija).

Ako je $\varrho \subset A \times B$ i $r \subset B \times C$, onda se pod proizvodom (ili kompoziciom) relacija ϱ i r podrazumijeva relacija definisana u skupu $A \times C$, u oznaci ϱr takva da je

$$a(\varrho r)c \Leftrightarrow (\exists x)(a\varrho x \wedge xrc),$$

gdje je $a \in A, x \in B$ i $c \in C$.

PRIMJER 3.4.

Neka je $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6\}$ i $C = \{1, 2, 4, 7, 8\}$, te neka vrijedi $\varrho = \{(1, 5)\}$ i $r = \{(5, 7), (6, 8)\}$, onda je kompozicija $\varrho r = \{(1, 7)\}$.

DEFINICIJA 3.6 (Relacija jednakosti).

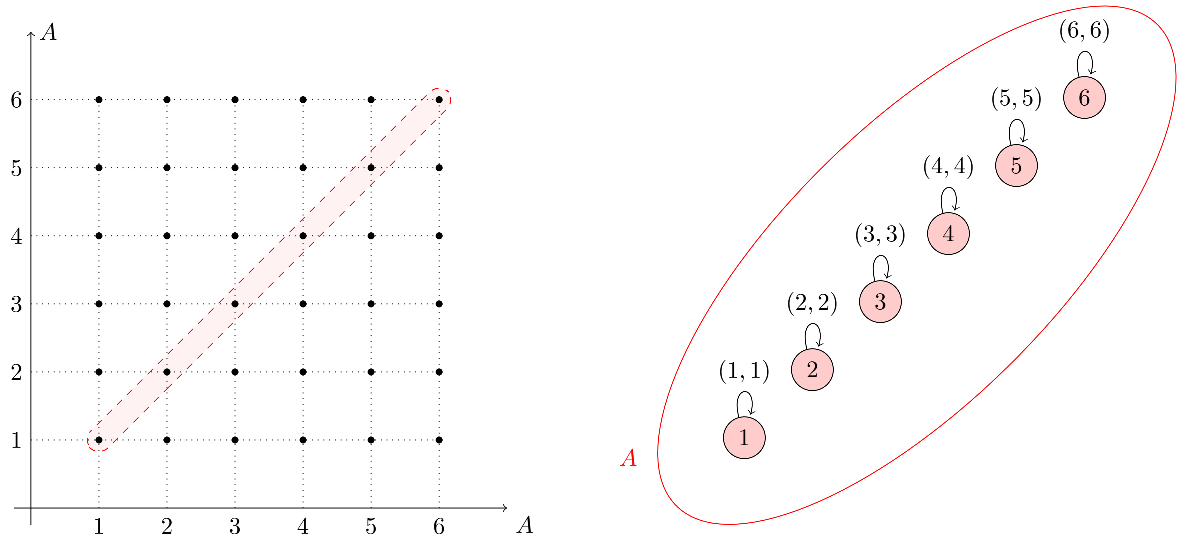
Pod relacijom jednakosti u skupu A podrazumijeva se dijagonala skupa $A \times A$ i obilježava se sa $\triangle$.

Dakle vrijedi

$$\triangle = \{(a, a) : a \in A\}.$$

PRIMJER 3.5.

Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, vrijedi $\triangle = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$, vidjeti Sliku 3.4.



(a) Mreža (b) Šema

Slika 3.4: Relacija jednakosti predstavljena mrežom i šemom

3.2 Osobine binarnih relacija

U konkretnim matematičkim oblastima, kao i primjenama van matematike, neke relacije se više koriste, odnosno relacije koje imaju određene osobine. Ovdje će biti navedene neke od tih osobina. Pretpostavimo da je relacija ϱ definisana u skupu A.

1. Relacija ϱ je refleksivna ako je $(\forall a \in A)\, a\varrho a$.
2. Relacija ϱ je antirefleksivna ako je $(\forall a \in A)\neg(a\varrho a)$ (ili $(a, a) \notin \varrho$).
3. Relacija ϱ je simetrična ako je $(\forall a, b \in A)\, a\varrho b \Leftrightarrow b\varrho a$.
4. Relacija ϱ je antisimetrična ako je $(\forall a, b \in A)\,(a\varrho b \wedge b\varrho a) \Rightarrow a = b$.
5. Relacija ϱ je tranzitivna ako je $(\forall a, b, c \in A)\,(a\varrho b \wedge b\varrho c) \Rightarrow a\varrho c$.

Primjer 3.6.

1. Dat je skup $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i relacija $\varrho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 3), (4, 4)\}$. Ova relacija je refleksivna.
2. Dat je skup $A = \{1, 4, 5, 7\}$ i relacija $\varrho = \{(1, 1), (4, 7), (7, 4), (5, 5)\}$. Ova relacija nije refleksivna.
3. Dat je skup $A = \{1, 3, 4, 6\}$ i relacija $\varrho = \{(1, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 1), (4, 4), (6, 6)\}$. Ova relacija je simetrična relacija.
4. Dat je skup $A = \{1, 3, 4\}$ i relacija $\varrho = \{(1, 3), (3, 4), (3, 3), (4, 4)\}$. Ova relacija nije simetrična.
5. Dat je skup $A = \{1, 3, 5, 7\}$.
   (a) $\varrho = \{(1, 5), (3, 3), (5, 5), (5, 7), (7, 3)\}$ je antisimetrična.
   (b) $\varrho = \{(1, 1), (3, 3), (5, 5), (7, 7)\}$ je i simetrična i antisimetrična.
   (c) $\varrho = \{(1, 5), (3, 5), (5, 1), (5, 5)\}$ nije ni antisimetrična ni simetrična.
6. Dat je skup $A = \{2, 3, 4, 5\}$ i relacija $\varrho = \{(2, 3), (3, 4), (2, 4), (4, 5), (3, 5), (2, 5)\}$. Ova relacija je tranzitivna.

3.2.1 Relacija ekvivalencije

Relacija ekvivalencije ima veliki značaj u matematici.

Definicija 3.7 (Relacija ekvivalencije).

Binarna relacija $\varrho \subset A \times A$ naziva se relacija ekvivalencije ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Relacija ekvivalencije označava se sa $\sim$, pa umjesto $a\varrho b$ pišemo $a \sim b$ i čitamo "a je ekvivalentno b". Jednakost brojeva je jedna relacija ekvivalencije, zatim paralelnost pravi, podudarnost trouglova,...

Definicija 3.8 (Klase ekvivalencije).

Skup svih elemenata $a \in A$ koji su u relaciji ekvivalencije $\sim$ naziva se klasa ekvivalencije i obilježava sa C_a, simbolički

$$C_a = \{x \in A : x \sim a\}.$$

Element a nazivamo predstavnik klase C_a.

Definicija 3.9 (Faktorski ili kvocijenti skup).

Skup svih klasa ekvivalencije nekog skupa A zove se faktorski skup i obilježava se sa $A|_\sim$.

Primjer 3.7.

U skupu $A = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 25, 26, 27, 28\}$ zadana je relacija ϱ ima jednak zbir cifara. Ispitati da li je ϱ relacija ekvivalencije. Ako jeste odrediti klase i faktorski skup.
Vrijedi $\varrho = \{(16, 16), \dots, (28, 28), (16, 25), (25, 16), (17, 26), (26, 17), (18, 27), (27, 18), (19, 28), (28, 19)\}$.
Vidimo da je relacija ϱ refleksivna, simetrična i tranzitivna, dakle ϱ je relacija ekvivalencije. Klase su $C_{16} = \{16, 25\}$, $C_{17} = \{17, 26\}$, $C_{18} = \{18, 27\}$, $C_{19} = \{19, 28\}$, $C_{20} = \{20\}$, $C_{21} = \{21\}$, $C_{22} = \{22\}$, $C_{23} = \{23\}$, $C_{24} = \{24\}$.
Količnički skup je $A|_\sim = \{\{16, 25\}, \{17, 26\}, \{18, 27\}, \{19, 28\}, \{20\}, \{21\}, \{22\}, \{23\}, \{24\}\}$.

Primjer 3.8.

Dat je skup $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i binarna relacija
$\varrho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (5, 4), (4, 5)\}$. Ispitati da li je relacija ϱ relacija ekvivalencije, ako jeste odrediti klase, faktorski skup, nacrtati mrežu i šemu.
Rješenje. Relacija ϱ ima osobine refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti. Klase su $C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_4 = \{4, 5\}$ i $C_6 = \{6\}$.
Količnički skup je $A|_\varrho = \{C_1, C_4, C_6\} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}$. Vidjeti Sliku 3.5.

3.2.2 Relacija poretka

Osim relacije ekvivalencije, relacija poretka ima bitnu ulogu u matematici.

Definicija 3.10 (Relacija poretka).

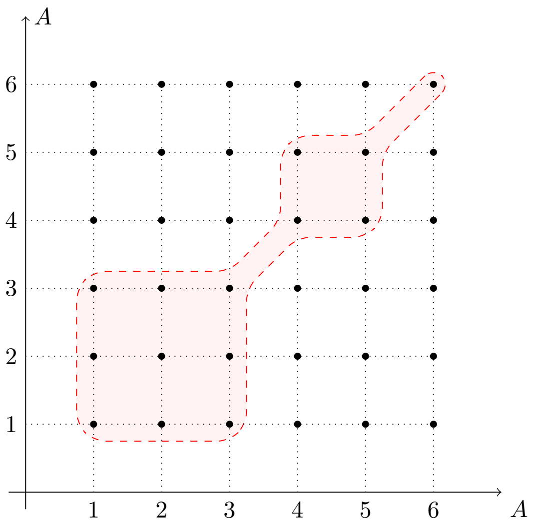
Binarna relacija $\varrho \subset A \times A$ naziva se relacija poretka ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Relaciju poretka obilježavamo sa $\leqslant$ i čitamo "manje ili jednako". Ako je $a \leqslant b$ ili $b \leqslant a$ onda se kaže da su elementi a i b uporedivi. Ako na skupu A postoji relacija poretka $\leqslant$ onda se kaže da je skup A uređen relacijom poretka $\leqslant$ i pišemo $(A, \leqslant)$.

Ako su svi elementi skupa A uporedivi, onda se on naziva potpuno uređen, ili lanac, ili linearno uređen. U slučaju da svi elementi skupa A nisu uporedivi onda se kaže da je A djelimično uređen skup.

Definicija 3.11 (Relacija strogog poretka).

Binarna relacija koja posjeduje osobine tranzitivnosti i antirefleksivnosti, naziva se relacija strogog poretka



(a) Mreža (b) Šema

Slika 3.5: Relacija ekvivalencije predstavljena mrežom i šemom

i obilježava se sa $<$ i čita "manje".

Relacija $<$ na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ je relacija strogog uređenja.

Ako je $a < b$ kaže se i da je a ispred b ili b je iza a. Ako je $a < b$ i $b < c$ onda kažemo da je b između a i c.

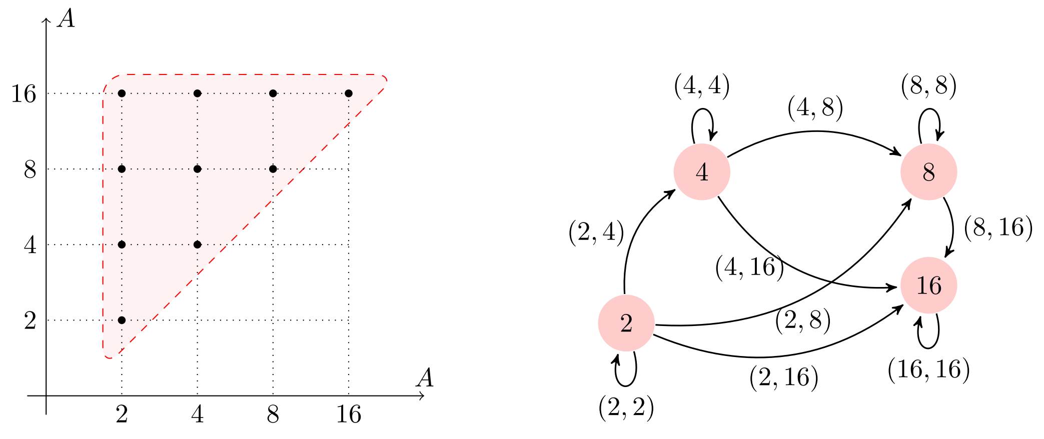
PRIMJER 3.9.

U skupu $A = \{2, 4, 8, 16\}$ definisana je operacija ϱ sa $a\varrho b \iff a \mid b$.

1. Napisati relaciju ϱ kao skup uređenih parova, nacrtati mrežu i šemu.
2. Ispitati da li je ϱ relacija poretka

Rješenje:

1. Vrijedi $\varrho = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (2, 16), (4, 4), (4, 8), (4, 16), (8, 8), (8, 16), (16, 16)\}$. Vidjeti Sliku 3.6.
2. Operacija ϱ je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, dakle ϱ je relacija poretka.



(a) Mreža (b) Šema

Slika 3.6: Relacija poretka predstavljena mrežom i šemom

3.3 Zadaci za vježbu

1. U skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ zadana je relacija sa $\varrho = \{(a, b) \in A \times A : b \geqslant a + 1\}$.
   (a) Odrediti relaciju ϱ kao skup uređenih parova.
   (b) Predstaviti relaciju ϱ grafički u koordinatnom sistemu i strelastom dijagramu.
   (c) Odrediti domen D_ϱ i kodomen relacije R_ϱ.
   (d) Odrediti presjeke relacije sa svakim elementom i uniju tih presjeka.

2. Date su relacije $\varrho = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, e)\}$ i $r = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, c)\}$. Odrediti kompoziciju relacija ϱ i r.

3. Dati su skupovi $A = \{x \in \mathbb{Z} : -2 \leqslant x \leqslant 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leqslant x \leqslant\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} : x < 5\}$. Odrediti
   (a) Relacije $\varrho = \{(a, b) \in A \times B : ab > 0\}$, $r = \{(b, c) \in B \times C : b + c < 4\}$.
   (b) Inverzne relacije ϱ^{-1} i r^{-1}.
   (c) Kompozicije relacija ϱr i $(\varrho r)^{-1}$.

4. U skupu $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ definisana je relacija ϱ sa $x\varrho y \Leftrightarrow x + y = 2$.
   (a) Napisati relaciju ϱ (kao skup uređenih parova).
   (b) Predstaviti relaciju ϱ grafički (u koordinatnom sistemu–mreži i u strelastom dijagramu–šemi).
   (c) Koje osobine ima relacija ϱ?

5. U skupu $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ definisana je relacija ϱ sa $x\varrho y \Leftrightarrow x^2 = y^2$.
   (a) Napisati relaciju ϱ (kao skup uređenih parova).
   (b) Predstaviti relaciju ϱ grafički (u koordinatnom sistemu–mreži i u strelastom dijagramu–šemi).
   (c) Koje osobine ima relacija ϱ?
   (d) Ako je relacija ϱ relacija ekvivalencije odrediti klase i količnički skup.

6. U skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ za relaciju ϱ date su njene klase $\{1, 5, 6\}$ $\{2\}$, $\{3, 7\}$, $\{4\}$.
   (a) Napisati relaciju ϱ (kao skup uređenih parova).
   (b) Predstaviti relaciju ϱ grafički (u koordinatnom sistemu–mreži i u strelastom dijagramu–šemi).
   (c) Koje osobine ima relacija ϱ?
   (d) Šta je količnički skup $A|_\varrho$?

7. U skupu $A = \{15, 16, 17, 21, 24, 25, 33, 34, 37\}$ definisana je relacija ϱ sa $x\varrho y \Leftrightarrow x$ i y imaju isti zbir cifara.
   (a) Napisati relaciju ϱ kao skup uređenih parova.
   (b) Predstaviti relaciju ϱ grafički.
   (c) Navesti osobine relacije ϱ.

8. U skupu $a = \{5, 10, 20, 30, 40\}$ zadana je relacija ϱ sa $x\varrho y \Leftrightarrow x \mid y$.
   (a) Pokazati da je ϱ relacija poretka.
   (b) Predstaviti relaciju ϱ grafički.

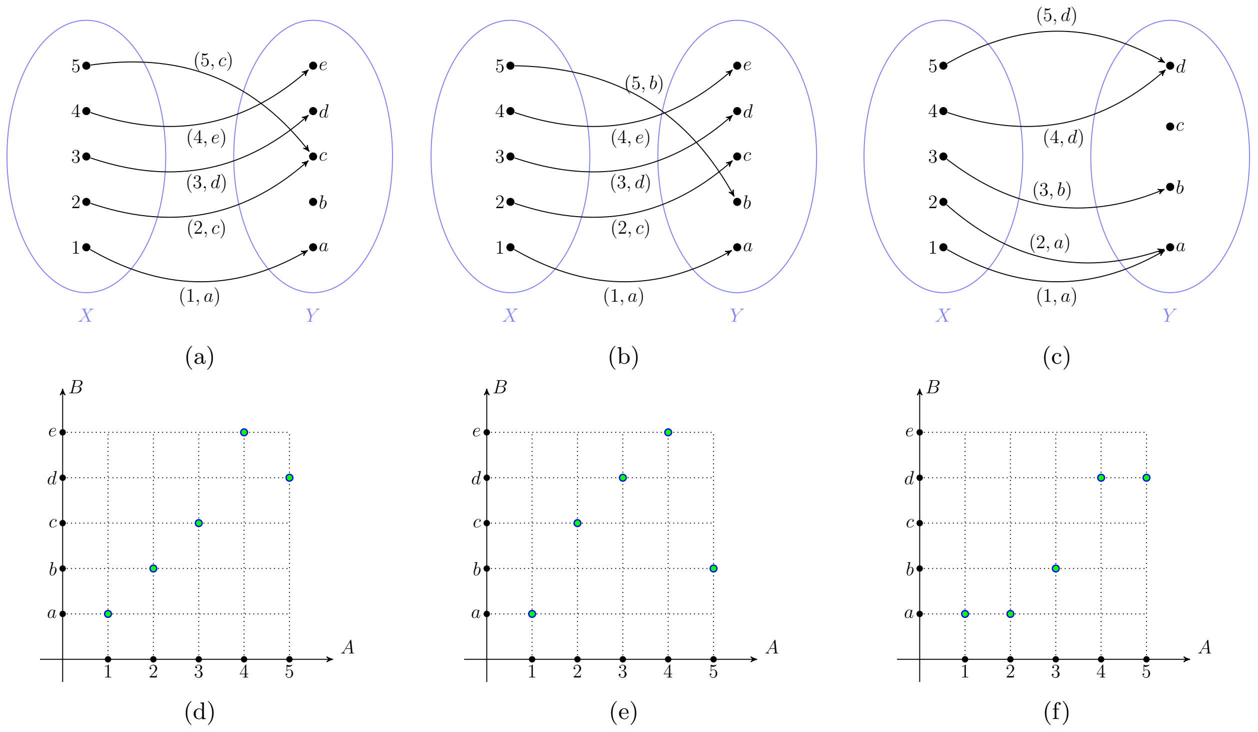
Poglavlje 4

Funkcije

U ovom poglavlju biće uvedeni pojmovi koji se koriste u čitavoj matematici, a posebno u nekim oblastima kao što je matematička analiza. Ove pojmove najlakše je matematički precizno uvesti koristeći teoriju skupova, odnosno odgovarajuće pojmove iz teorije skupova. Ovakav pristup omogućava nam uvođenje jedinstvene terminologije koja se onda koristi u različitim oblastima kako matematike tako i drugim naukama gdje se ovi pojmovi koriste, a korištenje jedinstvene terminologije dovelo je do lakšeg povezivanja različitih nauka.

4.1 Osnovni pojmovi

Pojam funkcije uvodimo preko pojma binarne relacije, drugim riječima funkcija nije ništa do jedna posebna klasa binarne relacije, tj. binarna relacija sa nekim dodatnim osobinama koje su navedene u sljedećoj definiciji.



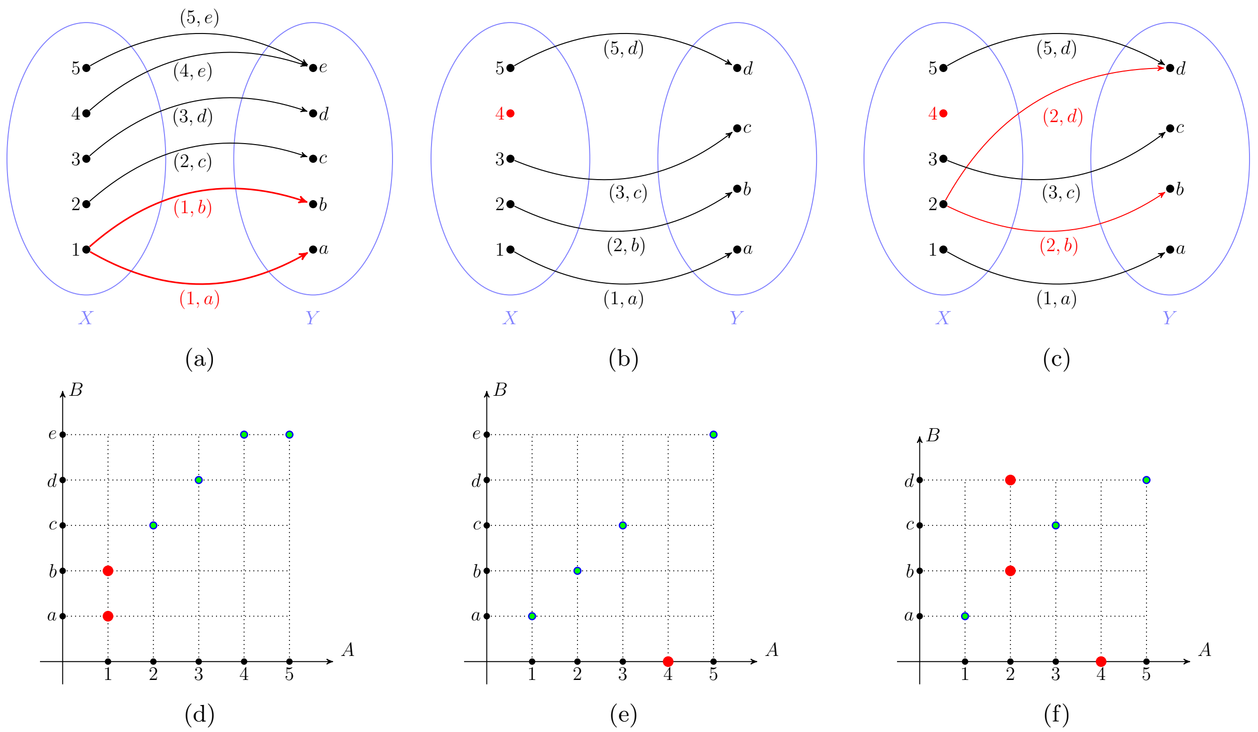
Slika 4.1: Funkcije

Definicija 4.1 (Funkcija).

Neka su X i Y neprazni skupovi. Binarnu relaciju $f \subset X \times Y$ nazivamo preslikavanje ili funkcija, skupa X u skup Y ako vrijedi

1. $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x, y) \in f$;
2. $(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$.

Drugim riječima svakom elementu $x \in X$ takvom da je $(x, y) \in f$ odgovara jedan i samo jedan element $y \in Y$. Na Slici 4.1 predstavljene su relacije koje su funkcije. Dakle, svi elementi $x \in X$ moraju se preslikati u neki element iz skupa Y i ne smiju se preslikati u dva elementa. Na Slici 4.2 dati su primjeri relacija koje nisu preslikavanja odnosno funkcija, crvenom bojom označeni su ili elementi ili uređeni parovi zbog kojih ove relacije nisu funkcije.



Slika 4.2: Nisu funkcije

Skup X zovemo domen (ili definiciono područje ili oblast definisanosti) i označavamo $D(f)$ ili D_f, a skup $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ zovemo kodomen (ili skup vrijednosti funkcije). Oznake koje se koriste za kodomen su $V(f)$, V_f, $R(f)$, R_f, $f(X)$ i druge. Elemente skupa D_f zovemo originali (ili argumenti ili promjenljive), a elemente skupa R_f slike. Relacija f je funkcija, ako svakom originalu odgovara tačno jedna slika.

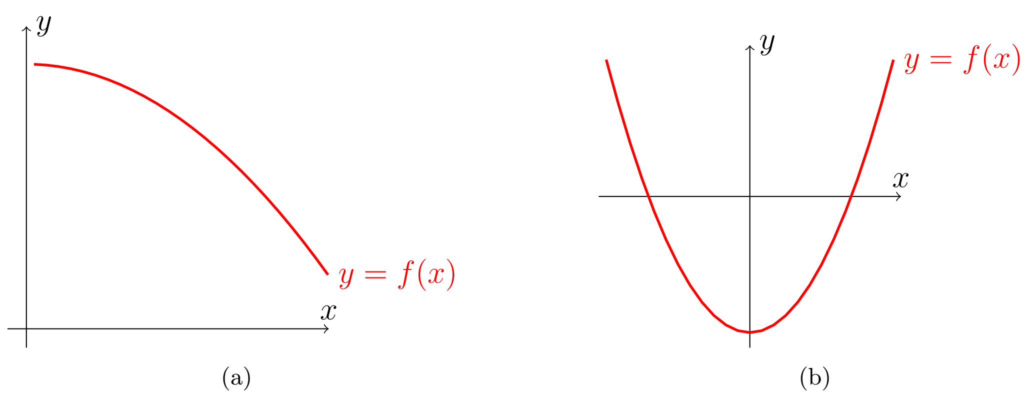
Da funkcija f preslikava skup X u skup Y označavamo sa

$$\boxed{f : X \mapsto Y,}$$

ako je $(x, y) \in f$ onda pišemo

$$\boxed{y = f(x) \text{ ili } f : x \mapsto y.}$$

Funkcije možemo predstavljati grafički. Preciznije, je dato u sljedećoj definiciji



Slika 4.3: Grafici funkcija

Definicija 4.2 (Grafik funkcije).

Ako je $D_f \subset \mathbb{R}$ i $R_f \subset \mathbb{R}$ onda skup tačaka $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$ zovemo grafik funkcije f.

Grafik funkcije definisan na ovaj način predstavlja neki skup tačaka u Dekartovom koordinantom sistemu, vidjeti Sliku 4.3.

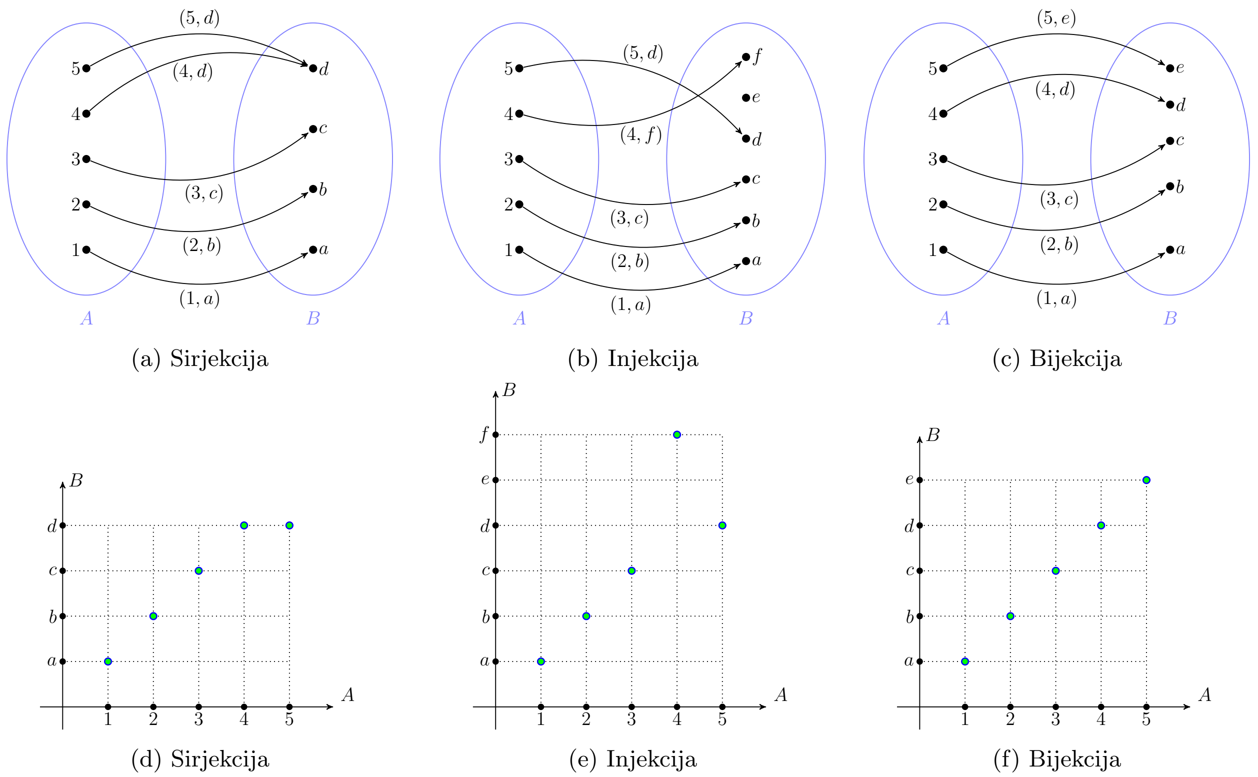
4.2 Vrste preslikavanja

Neka $f : X \mapsto Y$, dakle svakom elementu $x \in X$ funkcija f pridružuje neki element $y \in Y$. Ne znamo ništa o tome da li su svi elementi skupa Y slika nekog elementa (originala) iz skupa X, kao i to da li je neki element $y \in Y$ slika jednog ili više originala, vidjeti Sliku 4.1. Iz prethodno navedenog uvodimo nova preslikavanja koja imaju neke dodatne osobine, a koje nam obezbjeđuju da svi elementi skupa Y slike, zatim da svaki elementi $y \in Y$ bude slika samo jednog elementa iz skupa X.

Definicija 4.3 (Sirjekcija).

Za funkciju $f : X \mapsto Y$ kaže se da je preslikavanje skupa X na skup Y, ili da je sirjekcija skupa X na skup Y, ako je $R_f = Y$.

Iz definicije slijedi da je svaki $y \in Y$ slika bar jednog elementa $x \in X$, vidjeti Sliku 4.4a ili 4.4d.



Slika 4.4: Vrste preslikavanja: Sirjekcija, injekcija i bijekcija

Definicija 4.4 (Injekcija).

Za funkciju $f : X \mapsto Y$ kaže se da je injekcija ili injektivno preslikavanje, ako vrijedi

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Drugim riječima kod injektivnog preslikavanja karakteristično je da jednakost slika povlači jednakost originala ili različitim originalima odgovaraju različite slike, različiti originali slikaju se u različite slike, vidjeti Sliku 4.4b ili 4.4e.

I ako je neko preslikavanje istovremeno i sirjektivno i injektivno dobijamo novo preslikavanje dato u sljedećoj definiciji.

Definicija 4.5 (Bijekcija).

Funkcija $f : X \mapsto Y$ naziva se bijekcija ili bijektivno preslikavanje, ako je ona istovremeno i sirjekcija i injekcija.

Bijekcija se naziva još i uzajamno jednoznačno preslikavanje ili obostrano jednoznačno preslikavanje, vidjeti Sliku 4.4c ili 4.4f.

Definicija 4.6 (Kompozicija).

Ako su $f : X \mapsto Y$ i $g : Y \mapsto Z$ funkcije, tada funkciju $h : X \mapsto Z$ zadanu sa

$$h = \{(x, g(f(x))) : x \in X\}$$

zovemo složena funkcija (ili kompozicija, slaganje funkcija), funkcija f i g i pišemo $h = g \circ f$.

Dakle vrijedi $h(x) = g(f(x))$.

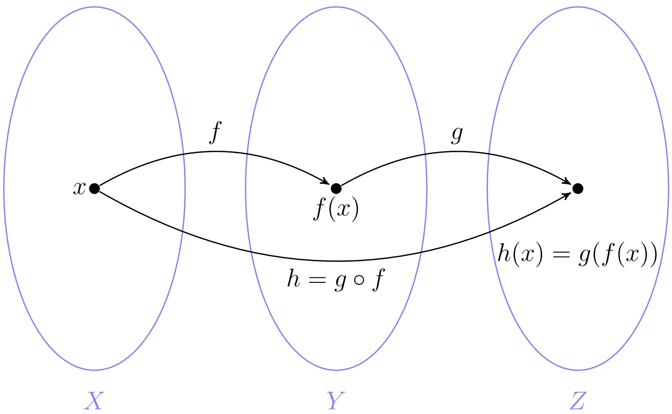
Za proizvoljne funkcije važi asocijativni zakon za kompoziciju funkcija. Za funkcije $f : X \mapsto Y$, $g : Y \mapsto Z$, i $h : Z \mapsto W$ vrijedi

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

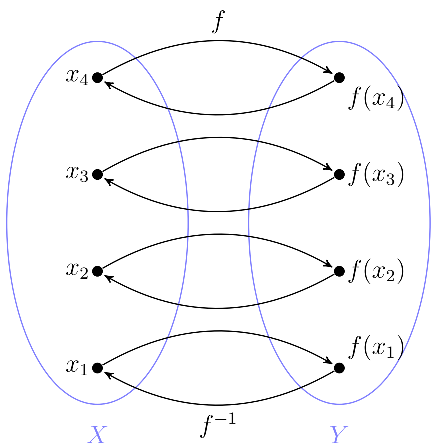
Svakoj funkciji $f : X \mapsto Y$, kao specijalnom slučaju relacije iz X u Y odgovara inverzna relacija $f^{-1} \subset Y \times X$ iz Y u X. U opštem slučaju relacija f^{-1} nije funkcija. U slučaju kada je f^{-1} funkcija onda se ona naziva inverzna funkcija, funkcije f. Uslov kada je inverzna relacija f^{-1} inverzna funkcija, funkcije f dat je u sljedećoj teoremi.

Teorema 4.1.

Inverzna relacija f^{-1} funkcije $f : X \mapsto Y$ biće funkcija $f^{-1} : Y \mapsto X$ ako i samo ako je f bijekcija.



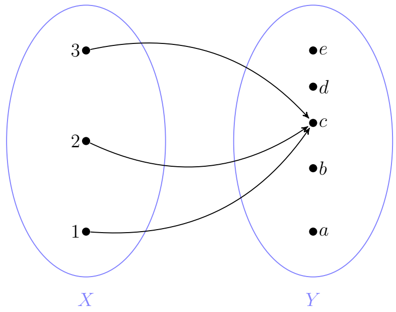
(a) Kompozicija funkcija



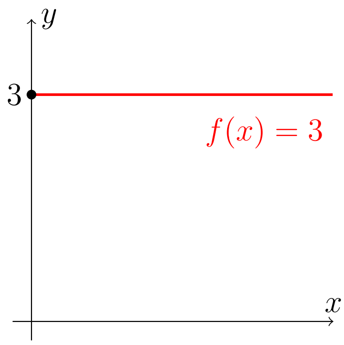
(b) Inverzna funkcija f^{-1} funkcije f

Slika 4.5: Kompozicija funkcija (preslikavanja) i inverzna funkcija

Osim navedenih vrsta preslikavanja, često susrećemo i konstantnu funkciju (preslikavanje) Slika 4.6 i identičku funkciju (preslikavanje) Slika 4.7.

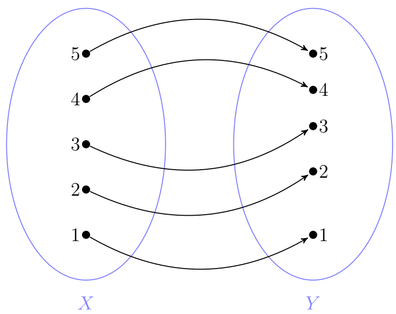


(a) Svi elementi skupa X se slikaju u element c

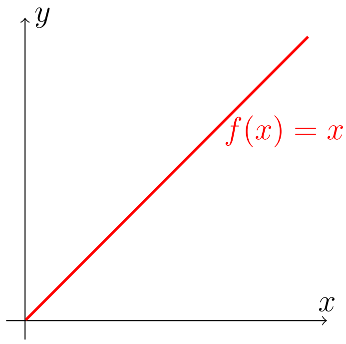


(b) Grafik konstantne funkcije $f(x) = 3$

Slika 4.6: Primjeri konstantnih funkcija



(a) Svi elementi skupa X se slikaju u iste elemente



(b) Grafik identičke funkcije $f(x) = x$

Slika 4.7: Primjeri identičkih funkcija

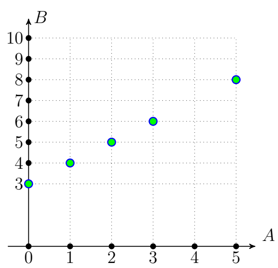
4.3 Zadaci

Primjer 4.1.

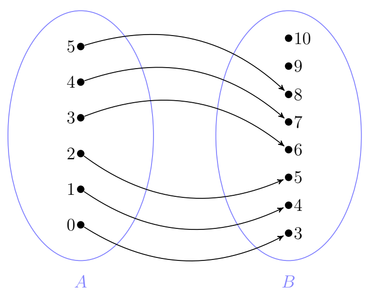
Dati su skupovi $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ i funkcija $f(x) = x + 3$. Predstaviti funkciju pomoću tabele, uređenih parova, koordinatnog sistema i strelastog dijagrama.
Rješenje: Vidi Tabelu 4.1 za tabelarno predstavljenja fukcije. Predstavljenje funkcije uređenim parovima $f = \{(0, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 6), (5, 8)\}$. Vidjeti Sliku 4.8 za koordinatni sistem i strelasti dijagram.

x	0	1	2	3	5
$f(x)$	3	4	5	6	8

Tabela 4.1: Predstavljanje funkcije $f(x) = x + 3$ tabelarno



(a) Funkcija $f(x) = x+3$ predstavljena u koordinatnom sistemu

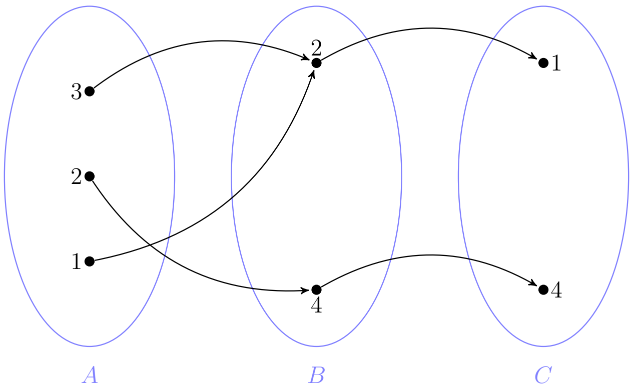


(b) Funkcija $f(x) = x + 3$ predstavljena u strelastom dijagramu

Slika 4.8: Funkcija $f(x) = x + 3$

PRIMJER 4.2.

Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ i $C = \{1, 4\}$, funkcija $f : A \mapsto B$ zadana sa $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 2$, te funkcija $g : B \mapsto C$ zadana sa $g(2) = 1$, $g(4) = 4$. Odrediti funkciju $h = g \circ f$, tj. $h(x) = g(f(x))$.
Rješenje: Vrijedi $h(1) = 1$, $h(3) = 1$, $h(2) = 4$, vidjeti Sliku 4.9.



Slika 4.9: Kompozicija preslikavanja

PRIMJER 4.3.

Date su funkcije $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x - 1$, $k(x) = 3x + 1$. Odrediti kompozicije funkcija $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ (g \circ k)$, $(f \circ g) \circ k$, $f \circ (f \circ g)$.
Rješenje:

$$\begin{aligned}
&(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = 2x - 1 + 1 = 2x,\\
&(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(f(x)) - 1 = 2(x + 1) - 1 = 2x + 1,\\
&\text{Odredimo prvo } g \circ k\\
&(g \circ k)(x)) = 2(3x + 1) - 1 = 2(3x + 1) - 1 = 6x + 1,\\
&\text{Sada računamo } f(g(k(x)))\\
&(f \circ (g \circ k))) = g(k(x)) + 1 = 6x + 1 + 1 = 6x + 2,\\
&(f \circ g) \circ k = 2k(x) = 2(3x + 1) = 6x + 2,\\
&(f \circ (f \circ g))(x) = f(g(x)) + 1 = 2x + 1.
\end{aligned}$$

PRIMJER 4.4.

Date su funkcije $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 - 5$. Odrediti $f \circ g$ i $g \circ f$.
Rješenje:

$$\begin{aligned}
&(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(g(x)) = 2(x^2 - 5) = 2x^2 - 10,\\
&(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 5 = (2x)^2 - 5 = 4x^2 - 5.
\end{aligned}$$

PRIMJER 4.5.

Date su funkcije $f(x + 1) = 3x + 3$, $g(2x - 1) = x$, $k(x - 3) = x^2 + x$. Odrediti

(a) $f(x)$, $g(x)$, $k(x)$;

(b) $f \circ g$, $g \circ k$, $f \circ (g \circ k)$.

Rješenje:

(a) Odredimo prvo $f(x)$, uvodimo smjenu $x + 1 = t$, pa je $x = t - 1$. Uvrstimo prethodne izraze u $f(x + 1) = 3x + 3$, vrijedi $f(t) = 3(t - 1) + 3 = 3t$, dakle vrijedi $f(t) = 3t$ pa je i $f(x) = 3x$. Sljedeća smjena je $2x - 1 = t$, pa je $x = \frac{t+1}{2}$, pa je $g(t) = \frac{t+1}{2}$ te vrijedi $g(x) = \frac{x+1}{2}$. I na kraju smjena je $x - 3 = t$ i $x = t + 3$, pa je $f(t) = (t + 3)^2 + t + 3 = t^2 + 7t + 12$ i $f(x) = x^2 + 7x + 12$. Odredimo sada $f \circ g$, $g \circ k$, $f \circ (g \circ k)$.

(b) Vrijedi

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= 3g(x) = 3\frac{x+1}{2} = \frac{3(x+1)}{2},\\
(g \circ k)(x) &= \frac{k(x)+1}{2} = \frac{x^2 + 7x + 12 + 1}{2} = \frac{x^2 + 7x + 13}{2},\\
(f \circ (g \circ k)) &= 3g(k(x)) = 3\frac{x^2 + 7x + 13}{2} = \frac{3(x^2 + 7x + 13)}{2}.
\end{aligned}
$$

PRIMJER 4.6.

Data je bijekcija $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sa $g(x) = 3 - 2x$.

(a) Odrediti g^{-1}, $g^{-1} \circ g$, $g \circ g^{-1}$;

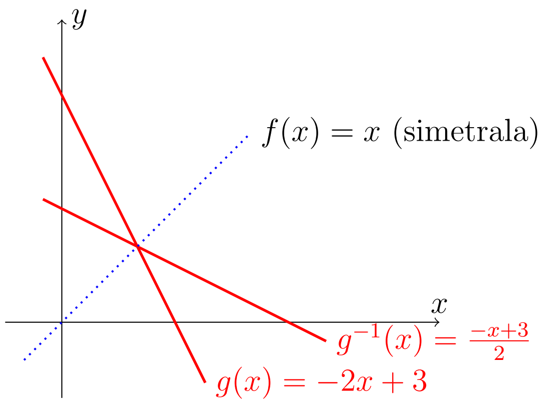
(b) Nacrtati u istom koordinatnom sistemu grafike funkcija g i g^{-1}.

Rješenje:

(a) Odredimo prvo g^{-1}. Izrazimo x iz $g(x) = 3 - 2x$, vrijedi $x = \frac{3-g(x)}{3}$, sada zamijenimo x sa $g^{-1}(x)$ a $g(x)$ sa x, te dobijamo $g^{-1}(x) = \frac{3-x}{2}$. Dalje je

$$
\begin{aligned}
(g^{-1} \circ g)(x) &= g^{-1}(g(x))) = \frac{3 - g(x)}{2} = \frac{3 - (3 - 2x)}{2} = x,\\
(g \circ g{-}1)(x) &= g(g^{-1}(x)) = 3 - 2g^{-1}(x) = 3 - 2\frac{3-x}{2} = 3 - (3 - x) = x.
\end{aligned}
$$

(b) Vidjeti Sliku 4.10.



Slika 4.10: Kompozicija preslikavanja

PRIMJER 4.7.

Date su funkcije $f\left(\frac{x+3}{2}\right) = x$, $g(2x - 1) = x + 4$. Odrediti

(a) $f(x)$, $g(x)$;

(b) $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$;

(c) $f^{-1} \circ g^{-1}$, $(f^{-1} \circ g) \circ f$.

Rješenje:

(a) Uvodimo smjenu $\frac{x+3}{2} = t$ i $x = 2t-3$, sada je $f(t) = 2t-3$ i $f(x) = 2x-3$. Sljedeća smjena je $2x-1 = t$ i $x = \frac{x+1}{2}$ i vrijedi $g(t) = \frac{t+1}{2} + 4 = \frac{t+9}{2}$ i $g(x) = \frac{x+9}{2}$.

(b) Iz $f(x) = 2x-3$ dobijamo $x = \frac{f(x)+3}{2}$, pa je $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$. Na isti način iz $g(x) = \frac{x+9}{2}$ je $x = 2g(x)-9$, i $g^{-1}(x) = 2x-9$.

(c) Vrijedi

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{g^{-1}(x)+3}{2} = \frac{2x-9+3}{2} = \frac{2x-6}{2} = x-3,\\
(f^{-1} \circ g)(x) &= f^{-}(g(x)) = \frac{g(x)+3}{2} = \frac{\frac{x+9}{2}+3}{2} = \frac{x+15}{4},\\
((f^{-1} \circ g) \circ f)(x) &= \frac{f(x)+15}{4} = \frac{2x-3+15}{4} = \frac{2x+12}{4}.
\end{aligned}$$

Zadaci za vježbu

1. Date su funkcije $f(x) = \frac{x}{3}$, $g(x) = \frac{x+2}{2}$, $h(x) = x-6$. Odrediti
   (a) $f \circ g$; (b) $g \circ f$; (c) $(f \circ g) \circ h$.

2. Date su funkcije $f : A \mapsto B$ i $g : B \mapsto C$, gdje su $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant y \leqslant 11\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leqslant z \leqslant 32\}$, i $f(x) = 2x+1$, $g(x) = 3x-1$.
   (a) Odrediti $f \circ g$ i $g \circ f$; (b) Da li se kompozicijom $g \circ f$ skup A preslikava u skup C?

3. Date su funkcije $f(x) = \frac{x-3}{x}$, $g(x) = \frac{2}{x+1}$.
   (a) Odrediti definiciono područje funkcija f i g. (b) Odrediti $f \circ g$ i $g \circ f$ i domene dobijenih funkcija.
   (c) Izračunati $(f \circ g)(4)$ i $(g \circ f)(6)$.

4. Date su funkcije $f(x) = \frac{3x}{2x+5}$ i $g(x) = \frac{x-1}{2x+3}$.
   (a) Odrediti definiciono područje funkcija. (b) Odrediti f^{-1} i g^{-1}.

5. Za funkciju $f(x) = \frac{3x-5}{7}$. Izračunati
   (a) $f^{-1}(1)$; (b) $(f^{-1} \circ f)(3)$; (c) $f^{-1}(-4)$.

6. Date su funkcije $f(3x+2) = x+3$, $g(x-1) = 4x+1$; $k(x) = x^2 - 2x$. Odrediti
   (a) $f(x)$; $g(x)$; $k(x)$. (b) $f \circ g$; $f \circ k$; $g \circ (f \circ k)$.

7. Date su $f(x) = \frac{3x-1}{x+7}$; $g(x) = \frac{x+6}{x+9}$. Odrediti
   (a) Definiciono područje datih funkcija. (b) f^{-1}, g^{-1}.

8. Za funkciju $f\left(\frac{3x+1}{x+2}\right) = \frac{2x-1}{x+3}$ odrediti
   (a) $f(x)$; (b) $f^{-1}(x)$; (c) $f^{-1} \circ f$.

Poglavlje 5

Binarne operacije

Definicija 5.1.

Binarna operacija u jednom skupu $S = \{a, b, c, \ldots\}$ je jedno preslikavanje skupa $S \times S$ u skup S.

Binarna operacija zove se također i binarna kompozicija, apstraktna operacija ili samo operacija. Znak koji pokazuje da na elemente a i b skupa S treba primijeniti određeni postupak da bi se dobio određeni element c iz istog skupa S zove operator i često se označava sa $\circ$. Rezultat operacije $\circ$ koja je izvršena sa elementima a i b označava se $a \circ b = c$.

Definicija 5.2.

Skup S u kojem je definisana binarna operacija $\circ$ zove se grupoid. Grupoid se označava sa $(S, \circ)$.

Za operacije koje imaju konkretan smisao, operator $\circ$ se zamjenjuje sa znacima:

$+$ za sabiranje (brojeva, polinoma, vektora,…);

$-$ za oduzimanje (brojeva, polinoma, vektora,…);

$\times$ ili $\cdot$ za množenje (brojeva, polinoma, vektora,…);

$:$ ili $/$ za dijeljenje (brojeva, polinoma, …);

$\cup$ za uniju skupova;

$\cap$ za presjek skupova;

$\setminus$ za razliku skupova;…

5.1 Osobine binarnih opearcija

Definicija 5.3 (Asocijativnost).

Neka je dat grupoid $(S, \circ)$. Ako za svaka tri elementa $a, b, c \in S$ važi

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

kaže se da je operacija $\circ$ asocijativna na skupu S.

Definicija 5.4 (Polugrupa).

Grupoid $(S, \circ)$ u kome je operacija $\circ$ asocijativna naziva se polugrupa (ili semigrupa).

DEFINICIJA 5.5 (Komutativnost).

Neka je dat grupoid $(S, \circ)$. Ako za svaka dva elementa $a, b \in S$ važi jednakost

$$a \circ b = b \circ a,$$

kažemo da je operacija $\circ$ komutativna na S.

DEFINICIJA 5.6 (Neutralni element).

Ako u grupoidu $(S, \circ)$ postoji takav element $e \in S$ za koji je

$$(\forall a \in S)\; a \circ e = e \circ a = a$$

on se zove neutralni element.

TEOREMA 5.1.

Ako postoji neutralni element e za operaciju $\circ$, on je jedinstven.

DEFINICIJA 5.7 (Simetričan element).

Neka grupoid $(S, \circ)$ ima neutralni element e. Kažemo da element $a \in S$ ima simetričan (ili inverzni element) $a' \in S$; ako vrijedi jednakost

$$a' \circ a = a \circ a' = e.$$

5.2 Algebarske strukture

DEFINICIJA 5.8 (Grupa).

Kaže se da grupoid $(S, \circ)$ ima strukturu grupe, ili da čini grupu, ako operacija $\circ$ ima osobine

1^0 Operacija je asocijativna

$$(\forall a, b, c \in S)\; (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c);$$

2^0 Operacija ima neutralni element e

$$(\exists e \in S)(\forall a \in S)\; a \circ e = e \circ a = a;$$

3^0 Svaki element a ima simetričan element a' za operaciju $\circ$

$$(\forall a \in S)(\exists a' \in S)\; a \circ a' = a' \circ a = e.$$

Ako je $(S, \circ)$ grupa, kaže se da elementi skupa S obrazuju grupu.

DEFINICIJA 5.9 (Komutativna ili Abelova grupa).

Ako je $(S, \circ)$ grupa i ako je operacija $\circ$ komutativna

$$(\forall a, b \in S)\; a \circ b = b \circ a,$$

kaže se da je grupa komutativna ili Abelova.

DEFINICIJA 5.10 (Distributivnost).

Neka su na jednom skupu S definisane dvije binarne operacije $\circ_1$ i $\circ_2$. Ako važi

$$(\forall a, b, c \in S) \quad a \circ_2 (b \circ_1 c) = (a \circ_2 b) \circ_1 (a \circ_2 c) \text{ i } (a \circ_1 b) \circ_2 c = (a \circ_2 c) \circ_1 (b \circ_2 c),$$

kažemo da je $\circ_2$ distributivna u odnosu na $\circ_1$.

DEFINICIJA 5.11 (Prsten).

Neka su na skupu S definisane dvije binarne operacije redom označene sa $+$ i $-$. Kažemo da S čini prsten u odnosu na te dvije operacije ako su ispunjeni uslovi

1^0 Skup S čini komutativnu grupu u odnosu na operaciju $+$;

2^0 Operacija $\cdot$ je asocijativna, tj važi

$$(\forall a, b, c \in S)\, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c;$$

3^0 Operacija $\cdot$ je distributivna prema operaciji $+$, tj.

$$(\forall a, b, c \in S)\, (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ i } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Prsten koji čine skup S i njegove operacije $+$ i $\cdot$ označava se $(S, +, \cdot)$.

DEFINICIJA 5.12 (Tijelo).

Prsten $(S, +, \cdot)$ zove se tijelo, ako skup $S \setminus \{0\}$ čini grupu u odnosu na operaciju $\cdot$.

DEFINICIJA 5.13 (Polje).

Prsten $(S, +, \cdot)$ zove se polje, ako je skup $S \setminus \{0\}$ čini komutativnu grupu u odnosu na operaciju $\cdot$.

5.3 Zadaci

PRIMJER 5.1.

Dati su skup $S = \{-1, 1, -i, i\}$ i operacija množenja $\bullet$. Formirati Cayleyjevu tabelu za operaciju $\bullet$. Vidjeti Tabelu 5.1.

$\bullet$	-1	1	i	$-i$
-1	1	-1	$-i$	i
1	-1	1	i	$-i$
i	$-i$	i	-1	1
$-i$	i	$-i$	1	-1

Tabela 5.1: Cayleyjeva tabela

PRIMJER 5.2.

Dat je skup $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i u njemu opearacija $+_6$ (operacija po modulu 6).

(a) Formirati Cayleyjevu tabelu.

(b) Koju algebarsku strukturu predstavlja $(A, +_6)$?

Rješenje:

(a) Vidjeti Tabelu 5.2

(b)

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Tabela 5.2: Cayleyjeva tabela za $(A, +_6)$

Zadaci za vježbu

1. Dat je skup $\mathbb{Z}$ i u njemu operacija definisana sa $(\forall a, b \in \mathbb{Z}) a \star b = a + b + 1$. Ispitati da li vrijede komutativni i asocijativni zakon za operaciju $\star$.
2. Dat je skup $\mathbb{Z}$ i u njemu operacija definisana sa $(\forall a, b \in \mathbb{Z})\ a \star b = 2a + b + 1$. Ispitati da li vrijede komutativni i asocijativni zakon za operaciju $\star$.
3. Dat je skup $\mathbb{Z}$ i u njemu operacije definisana sa
   (a) $(\forall a, b \in \mathbb{Z})\ a \star b = ab + a + b$;
   (b) $(\forall a, b \in \mathbb{Z})\ a \circ b = a + ab + b$.

   Ispitati da li vrijede komutativni i asocijativni zakon za operacije $\star$ i $\circ$.
4. Neka je na skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$ definisana operacija $x \star y = (x, y)$, ((x, y) je najveći zajednički djelilac). Sataviti tabelu operacije. Da li je operacija $\star$ komutativna operacija?
5. U skupu $\mathbb{R}$ definisane su operacije
   (a) $x \star y = \frac{x}{y}$, (b) $x \star y = x(x + y)$, (c) $x \star y = \frac{xy}{x+y}$, (d) $x \star y = x - y$, (e) $x \star y = x^2 + xy + y^2$, (f) $x \star y = x^2 + xy + 2y^2$.
   Koja je od ovih operacija komutativna?
6. U skupu $\mathbb{Z}$ date su operacije $\star$ i $\circ$ sa: $x \star y = 3x - 2y + 1$ i $x \circ y = 2x - 3y + +1$. Izračunati $((2 \star 3) \circ 4) \star (1 \circ 2)$.
7. U skupu $\mathbb{Z}$ date su operacije $\star$ i $\circ$ sa: $x \star y = 3x - 2y + 1$ i $x \circ y = 2x - 3y + +1$. Izračunati $((1 \star 3) \circ 5) \star (2 \circ 2)$.
8. U skupu $\mathbb{Z}$ date su operacije $\star$ i $\circ$ sa: $x \star y = -2x + y - 4$ i $x \circ y = x - 2y + 6$. Riješiti jednačinu $(2x) \circ ((4 \circ 3) \star (2 \circ 5)) = ((-2 \star 3) \circ (-3 \star 2)) \star x$.
9. U skupu $\mathbb{Z}$ date su operacije $\star$ i $\circ$ sa: $x \star y = -x + y - 2$ i $x \circ y = 2x + y + 6$. Riješiti jednačinu $(x) \circ ((2 \star 1) \circ (2 \circ 5)) = ((-2 \star 3) \circ (-3 \star 2)) \star x$.
10. U skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definisane su operacije $x \star y = \max\{x, y\}$ i $x \circ y = \min\{x, y\}$.
    (a) Sastaviti tabele za operacije $\star$ i $\circ$. (b) Pokazati da su operacije $\star$ i $\circ$ komutativne.
11. U skupu $\mathbb{Z}$ definisane su operacije
    (a) $(\forall x, y \in \mathbb{Z})\ x \star y = x + y + 6$; (b) $(\forall x, y \in \mathbb{Z})\ x \circ y = x + y + 1$; (c) $(\forall x, y \in \mathbb{Z})\ x \bullet y = x + y - 2$.
    Ispitati da li su algebarske strukture $(\mathbb{Z}, \star)$, $(\mathbb{Z}, \circ)$, $(\mathbb{Z}, \bullet)$ Abelove grupe.
12. Dat je skup $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i njemu je definisana operacija $+_7$, (sabiranje po modulu 7).
    (a) Sastaviti tabelu za operaciju $+_7$. (b) Koju algebarsku strukturu predstavlja $(A, +_7)$.
13. Pokazati da je $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ prsten.
14. Pokazati da je $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ polje.

Poglavlje 6

Skup realnih brojeva

Poznato je iz srednje škole da vrijedi lanac inkluzija $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, unija $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ i presjek $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$. Znamo da je sa $\mathbb{N}$ označen skup prirodnih brojeva[1], sa $\mathbb{Z}$ skup cijelih brojeva, sa $\mathbb{Q}$ skup racionalnih brojeva, sa $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva i $\mathbb{I}$ je oznaka za skup iracionalnih brojeva. Ponovimo u sljedećim sekcijama kako je došlo do formiranja navedih inkluzije skupova, unije i presjeka.

6.1 Cijeli brojevi

6.1.1 Prirodni brojevi i skup prirodnih brojeva

Istorijski prirodni brojevi su se najranije pojavili, korišteni su za brojanje. To su brojevi $1, 2, \ldots$, tj. $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Prirodne brojeve možemo sabirati i množiti i rezultat ovih operacija je ponovo prirodan broj, pa kažemo da je skup prirodnih brojeva zatvoren u odnosu na ove dvije operacije. Problem se već pojavljuje kada hoćemo da primijenimo operaciju oduzimanja u skupu prirodnih brojeva. Na primjer rezultat oduzimanja $1 - 2$ nije prirodan broj, tj. rezultat je broj koji ne postoji u skupu prirodnih brojeva. Dakle već za operaciju oduzimanja skup prirodnih brojeva je "mali" ili "preuzak", pa je bilo potrebno "proširiti ovaj skup".

Preciznije, skup prirodnih brojeva možemo uvesti ili definisati na više načina. Jedan od načina je preko Peanovih[2] aksioma. Peanovi aksiomi

$(A1)$ 1 je prirodan broj, tj. $1 \in \mathbb{N}$.

$(A2)$ Svaki prirodan broj n ima svog sljedbenika $n' = n + 1$, koji je takođe prirodan broj, tj. vrijedi $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$.

$(A3)$ 1 nije sljedbenik ni jednog prirodnog broja.

$(A4)$ Ako je $m' = n'$, tada je $m = n$, tj. svaki prirodan broj sljedbenik je najviše jednog prirodnog broja.

$(A5)$ Ako je $M \subset \mathbb{N}$ i ako u skupu M važe (A1) i (A2) tada je $M = \mathbb{N}$.

Ovi aksiomi definišu skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Posljednji, peti aksiom poznat je i pod nazivom "princip matematičke indukcije" i o njemu biće više riječi kasnije.

Osim korištenja prirodnih brojeva za brojanje, hoćemo da ih sabiramo, množimo, oduzimamo i množimo.

Sabiranje prirodnih brojeva. Broj $a + b$, je zbir ili suma brojeva a i b, brojevi a i b su sabirci. Uobičajena oznaka za operaciju sabiranja je znak " $+$ ". Operacija sabiranja je zatvorena u skupu prirodnih brojeva, tj. $(\forall a, b \in \mathbb{N})\, a + b \in \mathbb{N}$.

Oduzimanje prirodnih brojeva. Broj $a - b$ je razlika brojeva a i b, broj a je umanjenik a broj b je umanjilac. Oznaka za operaciju oduzimanja je " $-$ ". Operacija oduzimanja nije zatvorena u skupu prirodnih brojeva, npr. $1 - 2 \notin \mathbb{N}$.

Množenje prirodnih brojeva. Broj ab ili $a \cdot b$ je proizvod brojeva a i b. Brojevi a i b su faktori, oznaka za operaciju množenja je " $\cdot$ ". Operacija množenja je zatvorena u skupu $\mathbb{N}$, tj. $(\forall a, b \in \mathbb{N})\, a \cdot b \in \mathbb{N}$.

---

[1] prirodni brojevi ili pozitivni cijeli brojevi, nenegativni cijeli brojevi su $0, 1, 2, \ldots$, tj. prirodni brojevi i još nula

[2] Giuseppe Peano (27.avgust 1858.–20.april 1932. godine), bio je italijanski matematičar, veći dio karijere predavao je matematiku na Univerzitetu u Torinu. Jedan od osnivača matematičke logike i teorije skupova.

Dijeljenje prirodnih brojeva. Broj $a : b$ je količnik brojeva a i b, broj a je dijeljenik, a broj b je djelilac. Operacija dijeljenja nije zatvorena u skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, npr. $1 : 2 \notin \mathbb{N}$. Oznaka za dijeljenje je " : ".

6.1.2 Cijeli brojevi i skup cijelih brojeva

Proširivanjem skupa prirodnih brojeva dobijamo skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$. Skup cijelih brojeva čine prirodni brojevi $1, 2 \ldots$, nula 0 i negativni cijeli brojevi $\ldots, -2, -1$, pa vrijedi $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ i $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Pri formiranju skupa cijelih brojeva vođeno je računa da se osobine skupa prirodnih brojeva prenesu i na skup cijelih brojeva, preciznije skup cijelih brojeva je zatvoren u odnosu na operacije sabiranja i množenja, ali zatvoren je i u odnosu na operaciju oduzimanja.

Za operacije sabiranje i množenja vrijede osobine

1. Zatvorenost: $a + b$ i $a \cdot b$ su cijeli brojevi, kad god su a i b cijeli brojevi.
2. Komutativni zakon: $a + b = b + a$ i $a \cdot b = b \cdot a$, za sve cijele brojeve a i b.
3. Asocijativni zakon: $(a + b) + c = a + (b + c)$ i $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, za sve cijele brojeve a, b i c.
4. Distributivni zakon: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, za sve cijele brojeve a i b.
5. Neutralni elementi: i to za sabiranje $a + 0 = a$ i za množenje $a \cdot 1 = a$, za sve cijele brojeve a.
6. Suprotni element: za svaki cijeli broj a postoji broj x takav da je $a + x = 0$, tj. postoji u skupu cijelih brojeva rješenje jednačine $a + x = 0$. Broj x zovemo suprotni element (ili inverzni element broja a u odnosu na sabiranje i označavamo ga sa $-a$.
7. Zakon kancelacije: Ako su a, b i c cijeli brojevi i $a \cdot c = b \cdot c$, $c \neq 0$, tada je $a = b$.

Uređenje na skupu cijelih brojeva. Uređenje na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ može definisati koristeći prirodne brojeve $\{1, 2, \ldots\}$. Vrijedi definicija

Definicija 6.1.

Ako su a i b cijeli brojevi, tada je $a < b$, ako je $b - a$ prirodan broj. Ako je $a < b$ možemo pisati i $b > a$.

Vrijede fundamentalne osobine uređenosti cijelih brojeva:

- Zatvorenost za prirodne brojeve: $a + b$ i $a \cdot b$ su prirodni brojevi, kad god su a i b prirodni brojevi.
- Zakon trihonomije: Za svaki cijeli broj vrijedi jedno od pravila: (a) $a > 0$; (b) $a = 0$; (c) $a < 0$.

Kažemo da je skup cijelih brojeva uređen skup jer sadrži podskup koji je zatvoren u odnosu na sabiranje i množenje, te zakon trihotomije vrijedi za svaki cio broj.

6.1.3 Reprezentacija cijelih brojeva

Uobičajeno predstavljanje brojeva je u decimalnoj notaciji. Zapisujemo brojeve koristeći cifre da predstavimo umnoške stepena baze 10. Na primjer broj 234597 znači

$$2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7 \cdot 10^0.$$

Nema posebnog razloga zašto koristimo broj 10 kao bazu naše notacije, možda što imamo 10 prstiju na rukama. Babilonci su koristili bazu 60, Maje bazu 12, dok današnji kompjuteri koriste bazu 2.

Sljedeća teorema kaže da svaki prirodan broj veći od 1 možemo koristiti kao bazu.

Teorema 6.1.

Neka je b prirodan broj veći od 1. Tada svaki prirodan broj n možemo na jedinstven način predstaviti u obliku

$$a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b_1 + a_0, \tag{6.1}$$

gdje je k prirodan broj, a_j je cio broj za koji je $0 \leqslant a_j \leqslant b - 1$ za $j = 0, 1, \ldots, k$ i $a_k \neq 0$.

Broj b iz razvoja (6.1) nazivamo baza razvoja, ekspanzije ili predstavljanja. Razvoj sa bazom 10, našu uobičajenu bazu, zovemo decimalna notacija, predstavljanje ili razvoj. U slučaju baze 2, kažemo da je to binarno predstavljanje, za bazu 8 oktalno i za bazu 16 heksadecimalno predstavljanje. Koeficijenti a_j su cifre razvoja.

Da bi razlikovali predstavljanje brojeva u različitim bazama, koristimo specijalnu notaciju. Pišemo

$$(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b$$

da bi predstavili broj

$$a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0.$$

Primjer 6.1.

Predstaviti brojeve $(236)_7$ i $(10010011)_2$ u decimalnoj notaciji.
Rješenje: Vrijedi $(236)_7 = 2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 6 = 2 \cdot 49 + 21 + 6 = 125$ i $(10010011)_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2 + 1 = 128 + 16 + 2 + 1 = 147$.

Primjer 6.2.

Predstaviti brojeve 125 u bazi 7 i 147 u bazi 2.
Rješenje: Postupamo na sljedeći način

$$\begin{aligned} 125 &= 17 \cdot 7 + 6 \\ 17 &= 2 \cdot 7 + 3 \\ 2 &= 0 \cdot 7 + 2, \end{aligned}$$

te je $125 = (236)_7$, i

$$\begin{aligned} 147 &= 73 \cdot 2 + 1 \\ 73 &= 36 \cdot 2 + 1 \\ 36 &= 18 \cdot 2 + 0 \\ 18 &= 9 \cdot 2 + 0 \\ 9 &= 4 \cdot 2 + 1 \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \\ 1 &= 0 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

$147 = (10010011)_2$.

Primjer 6.3.

Riješiti jednačine

(a) $2012_3 \cdot x_2 = 2183$.

(b) $5 \cdot x_4 = 11001_2 \cdot 2222_3$.

(c) $x_6 : 321_4 = 432_5$.

Rješenje:

(a) Prvo pretvorimo 2012_3 u decimalnu notaciju, vrijedi $2012 = 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3 + 2 = 59$, zatim $\frac{2183}{59} = 37$. Na kraju 37 pretvorimo u binarnu broj, tj. predstavimo ga u binarnoj notaciji

$$\begin{aligned} 37 &= 18 \cdot 2 + 1 \\ 18 &= 9 \cdot 2 + 0 \\ 9 &= 4 \cdot 2 + 1 \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 &= 1 \cdot 2 + 0\\ 1 &= 0 \cdot 2 + 1,\end{aligned}$$

pa je $X_2 = 100101$.

(b) Pretvorimo brojeve u decimalnu notaciju, vrijedi $11001_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 = 25$, $2222_3 = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = 80$, dalje je $5x = 25 \cdot 80 \Leftrightarrow x = \frac{25 \cdot 80}{5} = 400$, i pretvorimo 400 iz decimalne u notaciju sa bazom $b = 4$

$$\begin{aligned}400 &= 100 \cdot 4 + 0\\ 100 &= 25 \cdot 4 + 0\\ 25 &= 6 \cdot 4 + 1\\ 6 &= 1 \cdot 4 + 2\\ 1 &= 0 \cdot 4 + 1,\end{aligned}$$

pa je $x_4 = 12100_4$.

(c) Vrijedi $321_4 = 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = 57$, $432_5 = 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2 = 117$, pa je $x = 57 \cdot 117 = 6669$, te na kraju

$$\begin{aligned}6669 &= 1111 \cdot 6 + 3\\ 1111 &= 185 \cdot 6 + 1\\ 185 &= 30 \cdot 6 + 5\\ 30 &= 5 \cdot 6 + 0\\ 5 &= 0 \cdot 6 + 5,\end{aligned}$$

$x_6 = 50513_6$.

6.1.4 Djeljivost cijelih brojeva

Kada cio broj podijelimo drugim cijelim brojem različitim od nule, rezultat može a i ne mora biti cio broj. Na primjer, $32 : 4 = 8$ je cio broj, dok $12 : 5 = 2.4$ nije cio broj. Ovi primjeri vode nas do sljedeće definicije.

Definicija 6.2.

Ako su a i b cijeli brojevi i $a \neq 0$, kažemo da a dijeli b ili da je b djeljivo sa a, ako postoji cio broj c, takav da je $b = a \cdot c$. Ako a dijeli b, kažemo a je djelilac ili faktor od broja b.

Ako a dijeli b pišemo $a \mid b$, a ako ne dijeli onda $a \nmid b$.

Primjer 6.4.

Sljedeći primjeri ilustruju koncept djeljivosti cijelih brojeva: $7 \mid 35$, $13 \mid 65$, $11 \mid 55$, $-5 \mid 45$, $14 \mid 0$, $3 \nmid 10$, $4 \nmid 17$.

Primjer 6.5.

Djelioci broja 6 su ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Djelioci broja 19 su ± 1 i ± 19. Djelioci broja 100 su ± 1, ± 2, ± 4, ± 5, ± 10, ± 20, ± 25, ± 50 i ± 100.

Slijede neke osnovne osobine djeljivosti.

Teorema 6.2.

Ako su a, b i c cijeli brojevi takvi da je $a \mid b$ i $b \mid c$, tada je $a \mid c$.

Primjer 6.6.

Ako je $7 \mid 35$ i $35 \mid 105$, tada po Teoremi 6.2 slijedi da je $7 \mid 105$.

Teorema 6.3.

Ako je su a, b, c, m i n cijeli brojevi takvi da je $c \mid a$, $c \mid b$, tada je $c \mid (ma + nb)$.

Primjer 6.7.

Kako je $3 \mid 12$ i $3 \mid 21$, tada po Teoremi 6.3, 3 dijeli i 39 jer je

$$5 \cdot 12 - 1 \cdot 21 = 39.$$

Teorema 6.4 (Algoritam dijeljenja).

Ako su a i b, $b > 0$ cijeli brojevi, tada postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \text{ i } 0 \leqslant r < b.$$

U prethodnoj teoremi broj a je dijeljenik, b je djelilac, q je količnik i r je ostatak. Algoritam dijeljenja je tradicionalno ime za ovu teoremu, mada algoritam dijeljenja nije algoritam. Iz $a = bq + r$ možemo primijetiti da je a djeljivo sa b jedino ako je $r = 0$.

Primjer 6.8.

Ako je $a = 133$ i $b = 21$, tada je $q = 6$ i $r = 7$, jer je $133 = 21 \cdot 6 + 7$.

Za dati pozitivan cio broj d, možemo cijele brojeve svrstati u različite podskupove zavisno od toga koliki je ostatak nekog cjelog broja pri dijeljenju sa d. Ako je broj $d = 2$ onda su mogući ostati 0 i 1. Ovo nas vodi do sljedeće definicije o uobičajenoj terminologiji.

Definicija 6.3.

Ako je ostatak dijeljenja cijelog pozitivnog broja n sa 2 jednak 0, tada je $n = 2k$ za neki pozitivan cio broj k, i kažemo da je n paran broj. U suprotnom ako je ostatak dijeljenje n sa 2 jednak 1, onda je $n = 2k + 1$, za neki pozitivan cio broj k i kažemo da je n neparan broj.

Prosti i složeni brojevi Broj 1 ima samo jednog pozitivnog djelioca i to je 1. Svaki drugi pozitivan cio broj ima najmanje dva pozitivna djelioca, i to 1 i samog sebe. Pozitivni cijeli brojevi koji imaju samo dva djelioca jako su bitni.

Definicija 6.4 (Prosti brojevi).

Prost broj je pozitivan cio broj koji je djeljiv jedino sa 1 i samim sobom.

Primjer 6.9.

Prosti brojevi su $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

Definicija 6.5 (Složeni brojevi).

Pozitivni cijeli brojevi veći od 1 koji nisu prosti su složeni brojevi.

Primjer 6.10.

Složeni brojevi su $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5, \dots$

Vrijedi teorema.

Teorema 6.5.

Prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

Dokaz. Pretpostavimo da prostih brojeva ima konačno mnogo i da su to $p_1, \dots, p_{k-1}, p_k, p_{k+1}, \dots, p_n$. Konstruišimo sljedeći broj $q = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{k-1} \cdot p_k \cdot p_{k+1} \cdot \ldots \cdot p_n + 1$, ovaj broj je po našoj pretpostavci složen, jer su samo $p_1, \dots, p_{k-1}, p_k, p_{k+1}, \dots, p_n$ prosti brojevi. Pošto je q složen broj mora postojati njegov djelioc različit od 1 i njega samog. Podijelimo broj q bilo kojim prostim brojem, na primjer sa p_k, vrijedi

$$\frac{q}{p_k} = \frac{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{k-1} \cdot p_k \cdot p_{k+1} \cdot \ldots \cdot p_n + 1}{p_k} = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{k-1} \cdot p_{k+1} \cdot \ldots \cdot p_n + \frac{1}{p_k}.$$

Dobijeni broj nije cio (racionalan broj bi dobili u slučaju dijeljenja sa bilo kojim od brojeva $p_1, \dots, p_n$), pa q nije djeljiv ni sa jednim prostim brojem, tj. q je i sam prost broj. Proces konstruisanja brojeva na način kako je konstruisan broj q možemo nastaviti proizvoljan broj puta. Dakle pretpostavka da prostih brojeva ima konačno mnogo je pogrešna. □

Fundametalna teorema aritmetike je važan rezultat, koji kaže da su prosti brojevi fundamentalni blokovi za izgradnju složenih brojeva.

Teorema 6.6 (Fundamentalni teorem aritmetike).

Svaki složeni broj može biti predstavljen na jedinstven način kao proizvod prostih brojeva, pri čemu su prosti brojevi u proizvodu zapisani u neopadajućem redoslijedu.

Primjer 6.11.

Brojeve 12, 30, 33, 48, zapisujemo na sljedeći način:

$$12 = 2^2 \cdot 3,\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 33 = 3 \cdot 11,\ 48 = 2^4 \cdot 3.$$

6.1.5 Najveći zajednički djelilac i najmanji zajednički sadržilac

Neka su a i b cijeli brojevi, različiti od nule, tada je skup zajedničkih djelilaca brojeva a i b neki konačan skup cijelih brojeva koji uvijek sadrži -1 i 1. Zanima nas koji je najveći djelilac ova dva broja a i b.

Definicija 6.6 (Najveći zajednički djelilac).

Najveći zajednički djelilac cijelih brojeva a i b, različitih od nule, je najveći djelilac koji dijeli istovremeno i a i b.

Najveći zajednički djelilac brojeva a i b označavamo sa $\mathrm{NZD}(a, b)$, (ili (a, b)). Takođe uzimamo po definiciji da je $(0, 0) = 0$.

Primjer 6.12.

Zajednički djelioci brojeva 24 i 84 su: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 i ± 12. Dakle $\mathrm{NZD}(24, 84) = 12$. Vrijedi i $\mathrm{NZD}(15, 81) = 3$, $\mathrm{NZD}(100, 5) = 5$, $\mathrm{NZD}(17, 25) = 1$, $\mathrm{NZD}(0, 44) = 44$, $\mathrm{NZD}(-15, -6) = 3$ i $\mathrm{NZD}(-17, 289) = 17$.

Ako je najveći zajednički djelilac dva cijela broja a i b jednak 1 tada taj par ima posebno ime.

DEFINICIJA 6.7 (Relativno prosti brojevi).

Cijeli brojevi a i b su relativno prosti ako je najveći zajednički djelilac ova dva broja 1, tj. $\text{NZD}(a, b) = 1$.

PRIMJER 6.13.

Kako je $\text{NZD}(25, 42) = 1$, to su 25 i 42 relativno prosti.

Euklidov algoritam Euklidov algoritam predstavlja sistematski metod za računanje najvećeg zajedničkog djelioca dva cijela broja a i b bez direktnog računanja zajedničkih djelilaca. Ime je dobio po grčkom matematičaru Euklidu[3].

TEOREMA 6.7 (Euklidov algoritam).

Neka su $r_0 = a$ i $r_1 = b$ cijeli brojevi takvi da je $a \geqslant b > 0$. Ako algoritam dijeljenja sukscesivno primijenimo da dobijemo $r_j = r_{j+1}q_{j+1} + r_{j+2}$ gdje je $0 < r_{j+2} < r_{r+1}$ za $j = 0, 1, \ldots, n-2$ i $r_{n+1} = 0$ tada je $\text{NZD}(a, b) = r_n$, tj. zadnji ostatak različit od nule je najveći zajednički djelilac brojeva a i b.

PRIMJER 6.14.

Odrediti
1. $\text{NZD}(252, 198)$.
2. $\text{NZD}(102, 222)$.
Rješenje:

1.

$$
\begin{aligned}
252 &= 1 \cdot 198 + 54 \\
198 &= 3 \cdot 54 + 36 \\
54 &= 1 \cdot 36 + 18 \\
36 &= 2 \cdot 18,
\end{aligned}
$$

pa je $\text{NZD}(252, 198) = 18$.

2.

$$
\begin{aligned}
222 &= 2 \cdot 102 + 18 \\
102 &= 5 \cdot 18 + 12 \\
18 &= 1 \cdot 12 + 6 \\
12 &= 2 \cdot 6,
\end{aligned}
$$

pa je $\text{NZD}(222, 102) = 6$.

Najmanji zajednički sadržilac Faktorizacija na proste brojeve (primjena Teoreme 6.6) može biti iskorištena za računanje najmanjeg cijelog pozitivnog broja koji sadrži dva pozitivna cijela broja. Na ovaj problem nailazimo, na primjer prilikom sabiranja razlomaka.

DEFINICIJA 6.8 (Najmanji zajednički sadržilac).

Najmanji zajednički sadržilac pozitivnih cijelih brojeva a i b je najmanji pozitivan broj koji je djeljiv i sa a i sa b.

Najmanji zajednički sadržilac brojeva a i b označavamo sa $\text{NZS}(a, b)$ (ili sa $[a, b]$).

[3]Euclid (rođen sredinom 4. vijeka pne umro sredinom 3. vijeka pne), napisao Elemente djelo od 13 knjiga, jedno od najuticajnijih djela u razvoju matematike

Primjer 6.15.

Koristeći faktorizaciju na proste brojeve izračunati NZD$(90, 24)$ i NZS$(90, 24)$.

Rješenje. Izvršimo prvo faktorizaciju brojeva 90 i 24. Dijelimo brojeve 90 i 24 prostim brojevima počev od 2, 3, ..., ako su brojevi 90 i 24 djeljivi pišemo rezultat. Vrijedi

$$\begin{aligned} 90 &= 45 \cdot 2 & 24 &= 12 \cdot 2 \\ 45 &= 15 \cdot 3 & 12 &= 6 \cdot 2 \\ 15 &= 5 \cdot 3 & 6 &= 3 \cdot 2 \\ 5 &= 1 \cdot 5 & 3 &= 1 \cdot 3, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} 90 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \\ 24 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3. \end{aligned}$$

Iz oba razvoja biramo zajedničke faktore, to su 2 i 3. Njihov proizvod je najveći zajednički djelilac brojeva 90 i 24, tj. NZD$(90, 24) = 2 \cdot 3 = 6$.

Najmanji zajednički sadržilac dobijamo tako što uzimamo sve faktore koji se pojavljuju u oba razvoja, ali bez ponavljanja. Iz drugog razvoja uzimamo proizvod $2 \cdot 2 \cdot 2$, broj 2 iz razvoja broja 90 nećemo uzimati jer već imamo 2 u proizvodu $2 \cdot 2 \cdot 2$, zatim uzimamo proizvod $3 \cdot 3$ iz prvog razvoja, opet nećemo uzeti 3 iz drugog razvoj jer smo već dodali $3 \cdot 3$ i na kraju dodajemo 5 u proizvod, pa je NZS$(90, 24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$.

6.1.6 Matematička indukcija

Princip matematičke indukcije je koristan alat za dokazivanje raznih rezultata sa cijelim brojevima. Princip matematičke indukcije zasnovan je na petom Peanovom aksiomu

Peti Peanov aksiom: Neka je $M \subset \mathbb{N}$, ako vrijedi $1 \in M$ i $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$, tada je $M = \mathbb{N}$.

Dokazati da neki rezultat vrijedi za svaki prirodan broj, matematičkom indukcijom potrebno je uraditi dva koraka. Prvo, pokazati da taj rezultat vrijedi za broj 1. Ovaj korak zovemo baza indukcije. Zatim iz pretpostavke da je taj rezultat tačan za svaki prirodan broj n, treba pokazati da slijedi tačnost tog rezultata za $n + 1$. Ovaj korak zovemo korak indukcije. Kada smo završili oba koraka, po principu matematičke indukcije posmatrani rezultat je tačan za sve prirodne brojeve.

Primjer 6.16.

Dokazati matematičkom indukcijom $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Rješenje: Za $n = 1$ vrijedi $1 = \frac{1(1+1)}{2} \Leftrightarrow 1 = 1$. Pretpostavimo sada da je formula tačna za n, dokažimo da vrijedi za $n + 1$. Pretpostavili smo da je tačno

$$(\forall n \in \mathbb{N}) 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

ako sada dodamo i lijevoj strani prethodne jednakosti $n + 1$, dobićemo

$$(\forall n \in \mathbb{N}) 1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1,$$

ako je pretpostavka tačna i ovaj izraz je tačan. Lijeva strana predstavlja zbir prvih $n+1$ prirodnih brojeva, i tu nemamo ništa dokazivati. Na desnoj strani je izraz $\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$ i trebamo pokazati da je on jednak $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Vrijedi

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

čime smo dokazali tačnost formule.

Primjer 6.17.

Dokazati matematičkom indukcijom $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Rješenje. Neka je $n = 1$, sada je $1 = \frac{1\cdot(1+1)(1+2)}{6} \Leftrightarrow 1 = 1$. Dakle prvi korak (baza ili osnova indukcije je ispunjen). Pokažimo sada da iz pretpostavke da je formula tačna

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 + 3 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \tag{6.2}$$

slijedi tačnost formule

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 + 3 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.$$

Dodajmo na obje strane jednakosti (6.2) izraz $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, pa je

$$1 + 3 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Lijeva strana predstavlja zbir $n + 1$ razlomaka oblika $\frac{n(n+1)}{2}$ i tu se nema šta dokazivati, ali treba pokazati da je desna strana jednaka $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$. Dalje je

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)\cdot 3}{2\cdot 3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6},$$

čime je dokazana tačnost formule.

Primjer 6.18.

Dokazati matematičkom indukcijom $(\forall n \in \mathbb{N}) 3 \mid 5^n + 2^{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Za $n = 1$ vrijedi, $5^1 + 2^{1+1} = 5 + 4 = 9,\ 9 : 3 = 3$. Prvi korak je pokazan. Pokažimo da iz pretpostavke da je izraz $5^n + 2^{n+1}$ djeljiv sa 3, slijedi djeljivost izraza $5^{n+2} + 2^{n+2}$. Ako je $3 \mid 5^n + 2^{n+1}$ onda postoji cio broj $a \in \mathbb{Z}$ takav da je $5^n + 2^{n+1} = 3 \cdot a$. Sada je

$$\begin{aligned} 5^{n+1} + 2^{n+2} &= 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 2^{n+1} = 5\underbrace{\left(5^n + 2^{n+1}\right)}_{=3a} - 3 \cdot 2^{n+1} = 5 \cdot 3a - 3 \cdot 2^{n+1} = 3\left(5a - 2^{n+1}\right) \\ &= 3 \cdot b,\ b = 5a - 2^{n+1} \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

pa smo pokazali da iz $3 \mid 5^n + 2^{n+1}$ slijedi $3 \mid 5^{n+1} + 2^{n+2}$.

Primjer 6.19.

Dokazati matematičkom indukcijom $(\forall n \in \mathbb{N})\ 6 \mid n^3 + 11n$.

Rješenje. Za $n = 1$ vrijedi $1^3 + 11 \cdot 1 = 12,\ 12 : 6 = 2$. Prvi korak je pokazan. Pokažimo sada $6 \mid n^3 + 11n \Rightarrow 6 \mid (n+1)^3 + 11(n+1)$. Ako je $6 \mid n^3 + 11n$, tada postoji cio broj $a \in \mathbb{Z}$ takav da je $n^3 + 11n = 6 \cdot a$. Dalje je

$$(n+1)^3 + 11(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11 = n^3 + 11n + 3n^2 + 3n + 12 = \underbrace{n^3 + 11n}_{=6\cdot a} + 3n(n+1) + 12.$$

Treba da pokažemo da je $3n(n+1)$ djeljivo sa 6. Ovaj izraz je već djeljiv sa 3, a brojevi n i $n+1$ su uzastopni cijeli pozitivni brojevi, pa je jedan od njih paran a drugi neparan, tako da je proizvod $n(n+1)$ paran a samim tim i djeljiv sa 2. Pa je izraz $3n(n+1)$ istovremeno djeljiv i sa 2 i sa 3, tj, djeljiv je sa 6.

Na kraju je

$$(n+1)^3 + 11(n+1) = 6 \cdot a + 6 \cdot b + 12 = 6 \cdot c,\ b, c \in \mathbb{Z},$$

pa je dokazana djeljivost.

6.2 Skup racionalnih brojeva

Skup racionalnih brojeva označavamo sa $\mathbb{Q}$ i definišemo ga sa $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$. Cijele brojeve možemo predstaviti u obliku $m = \frac{m}{1}$, pa vrijedi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Skup racionalnih brojeva je zatvoren za sabiranje, množenje, oduzimanje i dijeljenje (osim nulom), te u skupu racionalnih brojeva možemo rješavati jednačine oblika $a \cdot x = b$, $a \neq 0$. Znamo da je kod racionalnog broja $\frac{m}{n}$, m brojnik, a n je n nazivnih ili imenilac, te da se dva racionalna broja sabiraju, oduzimaju, množe i dijele po pravilima

$$\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 \pm a_2 b_1}{b_1 b_2},\ \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}, b_1, b_2 \neq 0,$$

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2}{b_1 a_2},\ b_1, b_2, a_2 \neq 0.$$

Međutim ni u skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ ne možemo riješiti ni neke vrlo jednostavne jednačine, na primjer $x^2 = 2$. Rješenje ove jednačine je $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$. Pokažimo da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. Pretpostavimo suprotno da postoje brojevi m $\in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$, za koje vrijedi $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ i da su m i n relativno prosti (NZD$(m, n) = 1$, m i n nemaju zajedničkih faktora, na primjer takvi su brojevi 8 i 9). Kvadriranjem dobijamo

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow 2n^2 = m^2,$$

sada zaključujemo da su m^2 i m parni brojevi, pa je $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Dalje je

$$2n^2 = m^2 \Leftrightarrow 2n^2 = (2k)^2 \Leftrightarrow n^2 = 2k^2,$$

što znači da je i n^2 odnosno n paran broj. Sada smo dobili da su i m i n parni brojevi, što je u suprotnosti sa našom pretpostavkom da su m i n uzajamno prosti brojevi. Možemo zaključiti da je greška u pretpostavci, tj. da je $\sqrt{2}$ racionalan broj, dakle $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

6.3 Skup iracionalnih brojeva

Prethodni primjer doveo je do formiranja skupa iracionalnih brojeva $\mathbb{I}$. Ovaj skup čine iracionalni brojevi, tj. brojevi koje ne možemo napisati u obliku $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, poznato je da ovi brojevi imaju beskonačan decimalni zapis, čije se cifre ne ponavljaju periodički (kod racionalnih brojeva u ovom zapisu cifre se ponavljaju periodički, zato je $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$). Iracionalni brojevi, osim $\sqrt{2}$ su još $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots, e = 3.14159\ldots$, $e = 2.718281\ldots$ i dr.

6.4 Skup realnih brojeva

Racionalni i iracionalni brojevi sačinjavaju zajedno skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, i zajedno ih nazivamo realni brojevi, tj. vrijedi $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

U skupu realnih brojeva definisane su operacije sabiranja $+$ i operacija množenja $\cdot$. Za svaka dva realna broja x i y, jedoznačno su određeni realni brojevi $x + y$ i $x \cdot y$. Ove operacije imaju sljedeće osobine:

(A1) Za svako $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi $(x + y) + z = x + (y + z)$, (asocijativni zakon).

(A2) Postoji samo jedan realan broj $0 \in \mathbb{R}$ takav da je svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x + 0 = 0 + x = x$, (0 je neutralni element za sabiranje).

(A3) Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji sam jedan $-x \in \mathbb{R}$ takav da je $x + (-x) = (-x) + x = 0$, ($-x$ je inverzni element u odnosu na sabiranje).

(A4) Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $x + y = y + x$ (komutativni zakon za sabiranje).

(A5) Za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi $(xy)z = x(yz)$ (asocijativni zakon za množenje).

(A6) Postoji samo jedan realan broj $1 \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (1 je neutralni element za množenje).

(A7) Za svaki $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, postoji jedinstven element $x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ takav da je $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ (x^{-1} je inverzni element za množenje elementa x).

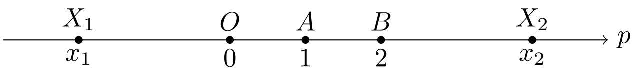
(A8) Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $xy = yx$ (komutativni zakon za množenje).

(A9) Za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi $x(y + z) = xy + xz$ (distributivni zakon množenja prema sabiranju).

Napomena 6.1.

Svaku uređenu trojku $(S, +, \cdot)$ koju čine proizvoljan neprazan skup, te binarne operacije $+$ i $\cdot$ za koje važe osobine (aksiomi) (A1)–(A9) nazivamo polje. Dakle polja su $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, dok $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nisu polja.

Brojna osa. Neka je data prava p, vidi Sliku 6.1. Na pravoj p uočimo bilo koju tačku, na primjer O. Na ovaj način dijelimo pravu p na tri dijela, prvi dio su tačke koje su lijevo od tačke O, samu tačku O i tačke koje su desno od tačke O. Sada hoćemo da svakoj tački prave p pridružimo tačno jedan realan broj. Samoj tački O možemo pridružiti nulu 0, tački A broj 1, tački B broj 2 itd. Tačkama koje su desno od tačke O pridružujemo pozitivan realan broj, na primjer tački X_2 dodjeljujemo broj $x_2 = \overline{OX_2}$, tj. dužinu duži OX_2, dok tačkama lijevo od tačke O dodjeljujemo negativan broj $x_1 = -\overline{OX_1}$. Na ovaj način uspostavljena je bijekcija između tačaka brojne prave i realnih brojeva (svakoj tački brojne prave odgovara samo jedan realan broj i obrnuto). Pravu p zovemo brojna osa (ili prava).



Slika 6.1: Brojna prava

Uređenje na skupu realnih brojeva Vidjeli smo da svakom realnom broju odgovara jedna tačka na brojnoj osi. Ako se tačka koja odgovara broju x nalazi lijevo od tačke koja odgovara broju y, onda je $x < y$ ili $y > x$, tj. x je manje od y ili y je veće od x (ili y je desno od x pa je y veće od x) Dakle bilo koja dva realna broja x i y možemo uporediti, moguća su tri slučaja $x < y$, $x = y$ i $x > y$. Koristimo relaciju uređenja (ili uređajnu relaciju) $\leqslant$, $x \leqslant y$ znači ili je $x < y$ ili $x = y$. Relacija uređenja ima osobine

(A10) Za bilo koja dva realna broja $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$.

(A11) $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$ ako i samo ako je $x = y$.

(A12) Ako je $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$ onda je $x \leqslant z$ (zakon tranzitivnosti).

Relacija uređenja $\leqslant$ je kompatibilna sa sabiranjem i množenjem i vrijedi

(A13) Ako je $x \leqslant y$ onda za svaki $z \in \mathbb{R}$ vrijedi $x + z \leqslant y + z$.

(A14) Iz $(0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y) \Rightarrow 0 \leqslant xy$.

Napomena 6.2.

Svaku uređenu trojku $(S, +, \cdot)$ koju čine neprazan skup S i binarne operacije $+$ i $\cdot$ za koje važe osobine (A1)–(A14) zovemo uređeno polje. Uređeno polje je i $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, dok $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nisu uređena polja.

Intervali i segmenti. Osim podskupova $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ često se koriste i intervali odnosno segmenti. Uobičajena naziv je otvoreni interval ili samo interval, dok zatvoreni interval nazivamo i segment. Otvoreni interval (ili samo interval) u oznaci (a, b) je skup elemenata $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a < x < b$, gdje su a i b realni brojevi i $a < b$, tj.

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Zatvoreni interval (ili samo segment) u oznaci $[a, b]$, je skup elemenata $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a \leqslant x \leqslant b$, i ovdje su a i b realni brojevi i $a < b$, tj.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Pored intervala i segmenta mogu se definisati i poluotvoreni intervali

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\},$$

i beskonačni intervali

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}.$$

Supremum i infimum.

DEFINICIJA 6.9.

Kažemo da je skup $S \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeđen ili ograničen, ako postoji realan broj M takav da je $x \leqslant M$ za svaki $x \in S$. Svaki broj M sa navedenim svojstvom nazivamo majoranta skupa S. Ako skup S nije odozgo omeđen, kažemo da je odozgo neomeđen.

Kažemo da je skup $S \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđen ili ograničen, ako postoji realan broj m takav da je $x \geqslant m$ za svaki $x \in S$. Svaki broj m sa navedenim svojstvom nazivamo minoranta skupa S. Ako skup S nije odozdo omeđen, kažemo da je odozdo neomeđen. Skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je omeđen, ako je i odozgo i odozdo omeđen. U protivnom se se kaže da je S neomeđen.

PRIMJER 6.20.

Skup prirodnih brojeva ograničen je odozdo, ali nije ograničen odozgo, za minorantu dovoljno je uzeti bilo koji broj manji ili jednak 1, dok sa druge strane za bilo koji prirodan broj n uvijek postoji prirodan broj veći od n, na primjer $n + 1$, pa je $\mathbb{N}$ neomeđen odozgo.

PRIMJER 6.21.

Svi skupovi (a, b), $[a, b]$, $(a, b], [a, b)$ su ograničeni, dok su $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$ ograničeni odozgo, a skupovi $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ su ograničeni odozdo.

Svaki odozgo ograničen skup S ima više majoranti, isto tako ograničen skup odozdo ima više minoranti, vidjeli smo da su minorante skupa prirodnih brojeva svi brojevi manji ili jednaki 1. Od svih majoranti najzanimljivija je najmanja majoranta, pa je pitanje kada ona postoji, isto tako postavlja se pitanje egzistencije najveće minorante.

DEFINICIJA 6.10.

Najmanju majorantu skupa S nazivamo supremum i označavamo sa $\sup S$. Ako je $\sup S \in S$, nazivamo ga maksimalnim elementom i označavamo ga sa $\max S$.

Najveću minorantu skupa S nazivamo infimum i označavamo sa $\inf S$. Ako je $\inf S \in S$, nazivamo ga minimalnim elementom skupa S i označavamo ga sa $\inf S$.

Skup $\mathbb{R}$ ima važnu osobinu:

(A15) Svaki odozgo ograničen skup $S \subset \mathbb{R}$ ima supremum, a svaki odozdo ograničen skup $S \subset \mathbb{R}$ ima infimum.

6.5 Zadaci za vježbu

1. Matematičkom indukcijom pokazati tačnost sljedećih jednakosti

   (a) $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$;

   (b) $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

   (c) $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

   (d) $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

   (e) $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

2. Matematičkom indukcijom pokazati djeljivost
   (a) $(\forall n \in \mathbb{N})\ 6 \mid 7^n - 1$; (b) $(\forall n \in \mathbb{N})\ 3 \mid n^3 - n$;
   (c) $(\forall n \in \mathbb{N})\ 6 \mid n^3 + 5n$; (d) $(\forall n \in \mathbb{N})\ 17 \mid 7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$.

Poglavlje 7

Linearne algebarske jednačine i sistemi linearnih algebarskih jednačina

7.1 Linearne algebarske jednačine

Jednakost
$$f(x) = 0, \tag{7.1}$$
gdje je $f(x)$ izraz sa jednom promjenljivom x, naziva se jednačina sa jednom nepoznatom x. Broj x_0 je rješenje jednačine (7.1), ako se uvrštavanjem x_0 u jednačinu (7.1) dobije tačna brojna jednakost, tj. ako je $f(x_0) = 0$. Dvije jednačine su ekvivalentne ako imaju isti skup rješenja.

Jednačina sa jednom nepoznatom x koja je ekvivalentna jednačini oblika
$$ax = b, \tag{7.2}$$
gdje su a i b dati brojevi, naziva se linearna algebarska jednačina sa jednom nepoznatom.

U zavisnosti od vrijednosti brojeva a i b mogu nastupiti sljedeći slučajevi

1. ako je $a \neq 0$, tada jednačina ima jedinstveno rješenje dato sa
$$x = \frac{b}{a},$$
$2(x-1) = 3 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$;
2. ako je $a = 0$ i $b \neq 0$, tada jednačina nema rješenja, tj. jednačina (7.2) ima oblik $0 \cdot x = b$, drugim riječima koji broj kada pomnožimo sa 0 daje neki broj b koji je različit od 0, znamo da takav broj ne postoji,
$2(x-1) = 2x - 3 \Leftrightarrow 0 = -1$ ili $0 \cdot x = -1$;
3. Ako je $a = 0$ i $b = 0$, tada jednačina ima beskonačno mnogo rješenja, jednačina (7.2) poprima oblik $0 \cdot x = 0$, sada se pitamo koji broj kada pomnožimo sa 0 daje 0, znamo da je to svaki realan broj, tj. svaki realan broj je rješenje ove jednačine,
$2(x-1) = 2x - 2 \Leftrightarrow 0 = 0$ ili $0 \cdot x = 0$.

Zadaci za vježbu

1. Riješiti jednačine
(a) $3x + 5(x+2)(x-2) - 5(x-1)(x+1) = 6$; (b) $(6x-3)(2x+1) - 5(2x+1)^2 + (3x-1)^2 = (x-1)^2$;
(c) $\dfrac{x+2}{5} - 3 = \dfrac{x-1}{2} - x$ (d) $\dfrac{2x-5}{x-2} + 1 = \dfrac{3x-5}{x-1}$;
(e) $\dfrac{x-1}{2x^2-18} - \dfrac{4x+1}{4x^2-36} + \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{3}{2x-6}$; (f) $\dfrac{2x+1}{2x-1} + \dfrac{8}{1-4x^2} - \dfrac{2x-1}{2x+1} = 0$.
2. Diskutovati rješenja jednačine u zavisnosti o vrijednosti parametra
(a) $mx - 2 = m - x$; (b) $mx - 1 = m - x$; (c) $k^2x - x = k + 1$; (d) $m^2x + 1 = x + m$;
(e) $m(mx+1) = 2(2x-1)$; (f) $m^3x - m^2 - 4 = 4m(x-1)$; (g) $\dfrac{3}{x-m} - \dfrac{2}{x+m} = \dfrac{3x-7m}{x^2-m^2}$;
(h) $\dfrac{2a+x}{a+2} + \dfrac{x-2a}{a-2} = \dfrac{ax-2}{a^2-4}$; (i) $m(m^2x-1) = 6m^2x - 8mx - 4$; (j) $mx(m^2-4) = m(1-x) + 1 + 2m^2x$.

7.2 Sistemi linearnih algebarskih jednačina

Definicija 7.1 (Sistem linearnih algebarskih jednačina).

Skup jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{7.3}$$

gdje su a_{ij} i b_i dati brojevi, dok su x_j nepoznate, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$; zove se sistem od m algebarskih linearnih jednačina sa n nepoznatih. Brojevi a_{ij} nazivaju se koeficijenti a brojevi b_i slobodni članovi. Ako je $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, onda se kaže da je sistem (7.3) homogen, a ako je bar jedan od slobodnih članova $b_i \neq 0$, onda kažemo da je sistem (7.3) nehomogen.

Umjesto naziva sistem algebarskih linearnih jednačina, ukoliko nema mogućnosti zabune, koristićemo naziv sistem linearnih jednačina.

Definicija 7.2 (Rješenje sistema).

Brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nazivaju se rješenje sistema (7.3) ako se zamjenom $x_j = \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ u sistem (7.3) dobiju tačne brojne jednakosti.

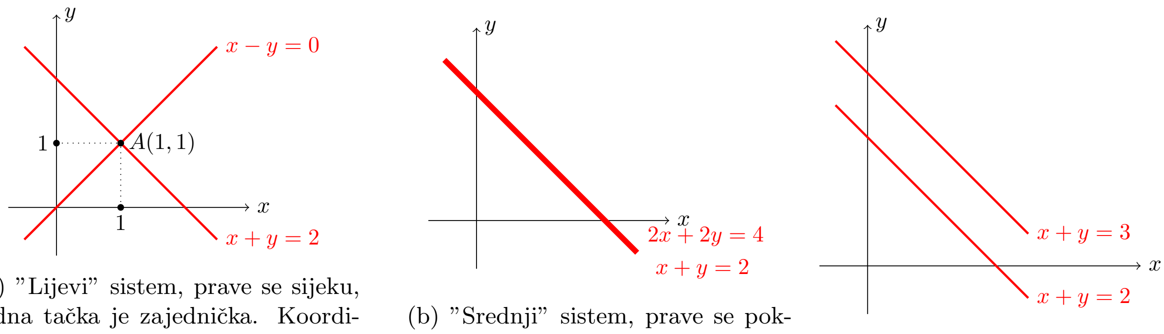
Za dva sistema linearnih jednačina kaže se da su ekvivalentni ako je svako rješenje jednog sistema ujedno rješenje i drugog sistema i obrnuto. Ako je $m \neq n$, tj. broj jednačina i nepoznatih nije isti radi se o pravougaonom sistemu, u suprotnom ako je $m = n$ sistem je kvadratni. Kvadratni sistem od n jednačina i nepoznatih može se zvati kvadratni sistem n–tog reda.

Jedan sistem može imati jedno ili više rješenja a može i da nema rješenja. Ako sistem nema rješenja kaže se da je nesaglasan, a ako ima rješenje kaže se da je saglasan. Ako sistem ima tačno jedno rješenje kaže se da ima jedinstveno rješenje, a ako ima više rješenja onda je taj sistem neodređen.

Posmatrajmo sljedeće sisteme linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \qquad & x + y &= 2 \qquad & x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \qquad & 2x + 2y &= 4 \qquad & x + y &= 3. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Sistemi su jednostavni i već na prvi pogled vidimo da je rješenje "lijevog" sistema $x = 1$, $y = 1$, u "srednjem" sistemu drugu jednačinu smo dobili tako što je prva pomnožena sa 2, pa ovaj sistem ima beskonačno mnogo rješenja, jer postoji beskonačno mnogo brojeva čiji je zbir 2. I na kraju treći "desni" sistem nema rješenja, jer ne postoje dva broja čiji je zbir istovremeno jednak i 2 i 3. Sistemi (7.4) predstavljeni su na Slici 8.4.



(a) "Lijevi" sistem, prave se sijeku, jedna tačka je zajednička. Koordinate zajedničke tačke predstavljaju rješenje sistema i rješenje je jedinstveno.

(b) "Srednji" sistem, prave se poklapaju, sve su tačke zajedničke. Ovaj sistem ima beskonačno mnogo rješenja.

(c) "Desni" sistem, nema zajedničkih tačaka, pa prema tome ovaj sistem nema rješenja.

Slika 7.1: Grafički prikaz rješenja sistema (7.4)

Mi se ovdje nećemo baviti ispitivanjem egzistencije i broja rješenja, nego samo rješavanjem kvadratnih sistema drugog i trećeg reda koji imaju jedinstveno rješenje. Za rješavanje sistema koristićemo dvije metode i to Cramerovu i Gaußovu metodu.

Cramerova metoda
Za računanje determinanti drugog i trećeg reda koristimo sljedeće formule

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

Primjer 7.1.

Date su determinata

1. $\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 - (-4 \cdot 3) = 28 + 12 = 40;$
2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 6 \cdot (-1) - (0 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 6 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot (-2)) = -86.$

Rješenja sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$$

su

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D},$$

gdje su D, D_x, D_y determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \; D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \; D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

U slučaju kvadratnog sistema trećeg reda

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases}$$

su

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D},$$

gdje su D, D_x, D_y, D_z determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \; D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Primjer 7.2.

Riješiti date sisteme Carmerovom metodom

(a) $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x - 4y = 6, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + 3y = 7, \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 5x + y = -7 \\ 7x - 2y = -2, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x - y - z = 1, \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \\ -2x + 3y + z = -1, \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ -4x - y - z = -2. \end{cases}$

Gaußova metoda Dati sistem
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$$
rješavamo na sljedeći način:

Drugu jednačinu sistema pomnožimo sa a_{11}, zatim od druge jednačine oduzimamo prvu jednačinu koju smo prethodno pomnožili sa a_{21}, dobijamo
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}y = b_2^{(1)}, \end{cases}$$
gdje su $a_{22}^{(1)} = a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}$ i $b_2^{(1)} = b_2a_{11} - b_1a_{21}$. Sada iz druge jednačine izračunamo $y = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, zatim izračunatu vrijednost y uvrstimo u prvu jednačinu i izračunamo x.

U slučaju kvadratnog sistema trećeg reda
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases}$$
drugu jednačinu pomnožimo sa a_{11} i od nje oduzimamo prvu jednačinu prethodno pomnoženu sa a_{21}, zatim treću jednačinu pomnožimo sa a_{11} i od nje oduzimamo prvu jednačinu prethodno pomnoženu sa a_{31}. Na ovaj način dobijamo sistem u obliku
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}y + a_{23}^{(1)}z = b_2^{(1)} \\ \qquad\quad a_{32}^{(1)}y + a_{33}^{(1)}z = b_3^{(1)}, \end{cases}$$
sada treću jednačinu pomnožimo sa $a_{22}^{(1)}$ i od nje oduzmemo drugu jednačinu prethodno pomnoženu sa $a_{32}^{(1)}$, te dobijamo
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}y + a_{23}^{(1)}z = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad\qquad\; a_{33}^{(2)}z = b_3^{(2)}. \end{cases}$$
Na kraju iz treće jednačine izračunamo z, uvrstimo ovu vrijednost u drugu jednačinu iz koje izračunamo y, te vrijednosti y i z uvrstimo u prvu jednačinu i izračunamo x.

Primjer 7.3.

Riješiti date sisteme Gaußovom metodom

$(a)\ \begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x - 4y = 6, \end{cases}$ $(b)\ \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + 3y = 7, \end{cases}$ $(c)\ \begin{cases} 5x + y = -7 \\ 7x - 2y = -2, \end{cases}$

$(d)\ \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x - y - z = 1, \end{cases}$ $(e)\ \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \\ -2x + 3y + z = -1, \end{cases}$ $(f)\ \begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ -4x - y - z = -2. \end{cases}$

Poglavlje 8

Kompleksni brojevi

Proširenjem pojma broja došlo se do polja realnih brojeva $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. U polju realnih brojeva sve jednačine oblika

$$\begin{aligned} a + x &= b, \\ c \cdot x &= d, \\ x^n &= p \\ x^{2n+1} &= q, \end{aligned}$$

gdje su $a, b, d \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, q \in \mathbb{R}$, a $n \in \mathbb{N}$, možemo riješiti. Međutim ponovo je potrebno izvršiti proširenje, jer npr. jednostavna jednačina

$$x^2 + 1 = 0,$$

nije imala rješenje u $\mathbb{R}$.

Ponovo je potrebno izvršiti proširenje, ovaj put skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Definišimo na skupu

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\},$$

operacije sabiranja $+$ i množenja $\cdot$ na sljedeći način

$$(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\ (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\ (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Uređena trojka $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ je polje. Ovo polje naziva se polje kompleksnih brojeva i obilježava se sa $\mathbb{C}$, dok njegove elemente nazivamo kompleksni brojevi. Pokazuje se da vrijede svi aksiomi polja.

Napomena 8.1.

Za polje kompleksnih brojeva koristiti se češće oznaka $\mathbb{C}$, umjesto $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Ista oznaka $\mathbb{C}$ koristiti se i za sam skup kompleksnih brojeva. Iz samog konteksta vidi se radi li se o skupu ili polju, a ako se ne vidi onda se naglasi o čemu se radi.

Kompleksni broj $(0, 0)$ zvaćemo kompleksna nula, a kompleksni broj $(1, 0)$ kompleksna jedinica i označavaćemo

$$(0, 0) = 0$$

i

$$(1, 0) = 1.$$

Kompleksni broj $(0, 1)$ označićemo sa i, tj.

$$(0, 1) = i,$$

zvaćemo imaginarna jedinica. Sad vrijedi,

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x(1, 0) + y(1, 0)(0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot 1 \cdot i = x + yi.$$

Oblik

$$x + yi$$

naziva se algebarski oblik kompleksnog broja. Pri tome je

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i\cdot i^2 = -i \\ i^4 &= -1\cdot(-1) = 1 \\ i^5 &= i\cdot i^4 = i \\ &\vdots \end{aligned}$$

te je

$$\boxed{i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,\ n\in\mathbb{N}.}$$

Za kompleksni broj $z = x + yi$, realni broj x je realni dio kompleksnog broja z i piše se

$$\boxed{x = \mathrm{Re}(z),}$$

a realan broj y je imaginarni dio kompleksnog broja z, i piše se

$$\boxed{y = \mathrm{Im}(z).}$$

Za dva kompleksna broja z_1 i z_2 vrijedi

$$\boxed{z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \wedge \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2).} \tag{8.1}$$

Vrijedi ako je $\mathrm{Im}(z) = 0$, tada $z\in\mathbb{R}$. Ali ako je $\mathrm{Im}(z) \neq 0 \wedge \mathrm{Re}(z) = 0$, tada je kompleksni broj čisto imaginaran.

NAPOMENA 8.2.

Polje $(\mathbb{C},+,\cdot)$ nije uređeno kao polje $(\mathbb{R},+,\cdot)$. Pretpostavimo suprotno da se može definisati relacija poretka $\leqslant$ u $(\mathbb{C},+,\cdot)$. Tada bi za $\forall z_1, z_2\in\mathbb{C}$ vrijedilo $z_1 \leqslant z_2$ ili $z_2 \leqslant z_1$. Prethodno vrijedi i za 0 i za i, dakle imamo $0 \leqslant i$ ili $i \leqslant 0$. Iz $0 \leqslant i \Rightarrow 0 \leqslant i^2 = -1$. Kontradikcija. Slično, iz $i \leqslant 0$ slijedi $0 \leqslant -i$ a sada je $0 \leqslant i^2 = -1$, što ponovo dovodi ko kontradikcije.

Konjugovano–kompleksni broj Za kompleksni broj $z = x + yi$, broj $\overline{z} = x - yi$ je konjugovano–kompleksni broj kompleksnog broja z. Vrijedi

$$\begin{aligned} \overline{\overline{z}} &= z, \\ \frac{z+\overline{z}}{2} &= \frac{x+yi+x-yi}{2} = x = \mathrm{Re}(z), \\ \frac{z-\overline{z}}{2i} &= \frac{x+yi-(x-yi)}{2i} = y = \mathrm{Im}(z), \\ z\cdot\overline{z} &= (x+yi)\cdot(x-yi) = x^2+y^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2. \end{aligned}$$

8.1 Algebarski oblik

8.1.1 Operacije sa komp. brojevima u alg. obliku

Neka su kompleksni brojevi z_1 i z_2 dati u algebarskom obliku, tj. $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z - 2 = x_2 + y_2 i$. Sabiranje, oduzimanje, množenje i dijeljenje se svodi na

$$z_1 + z_2 = x_1 + y_1 i + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = x_1 + y_1 i - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_2 + y_2 i}{x_1 + y_1 i} = \frac{x_2 + y_2 i}{x_1 + y_1 i} \cdot \frac{x_1 - y_1 i}{x_1 - y_1 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} i, \ z_1 \neq 0.$$

Primjer 8.1.

Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 2 - 5i$.
Izračunati (a) $z_1 + z_2$; (b) $z_1 - z_2$; (c) $z_1 \cdot z_2$; (d) $\frac{z_2}{z_1}$, te odrediti $\mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_2}\right)$ i $\mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_2}\right)$; (e) $\frac{\overline{z}_1}{z_1 + \overline{z}_2}$. Rješenje: Vrijedi

(a) $z_1 + z_2 = 3 + 4i + 2 - 5i = 5 - i$;

(b) $z_1 - z_2 = 3 + 4i - (2 - 5i) = 1 + 9i$;

(c) $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i) \cdot (2 - 5i) = 6 - 15i + 8i - 20i^2 = 6 - 7i - (-20) = 26 - 7i$;

(d) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2 - 5i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{(2 - 5i)(3 - 4i)}{9 + 16} = \frac{6 - 8i - 15i + 20i^2}{25} = \frac{-14 - 23i}{25} = -\frac{14}{25} - \frac{23}{25} i$;
te je $\mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{14}{25}$, $\mathrm{Im}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{23}{25}$;

(e) $\frac{\overline{z}_1}{z_1 + \overline{z}_2} = \frac{3 - 4i}{3 + 4i + 2 + 5i} = \frac{3 - 4i}{5 + 9i} \cdot \frac{5 - 9i}{5 - 9i} = \frac{15 - 27i - 20i + 36i^2}{25 + 81} = \frac{-21 - 47i}{106}$.

Primjer 8.2.

Odrediti x i y iz jednakosti $z + 3x - 2\overline{z} = 2 + 3i$.

Rješenje: Iz $z = x + yi$ i $\overline{z} = x - yi$, dobijamo

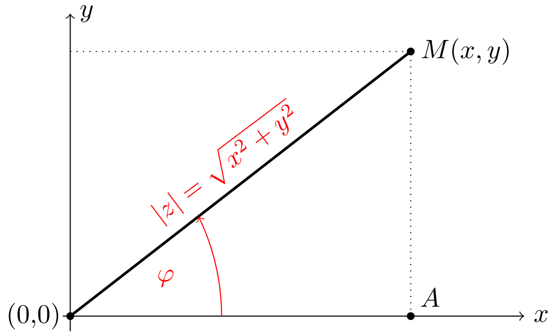
$$x + yi + 3x - 2(x - yi) = 2 + 3i \Leftrightarrow 2x + 3yi = 2 + 3i,$$

sada iz jednakosti dobijamo $2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ i $3y = 3 \Leftrightarrow y = 1$.

8.2 Geo. interpretacija kompleksnog broja

Kompleksan broj z možemo intrepretirati kao tačku u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu u ravni. Svakom kompleksnom broju z obostrano–jednoznačno ćemo pridružiti tačku u xOy ravni. Ova ravan je Gaußova[1] ili kompleksna ravan. Na x–osu nanosimo realni dio kompleksnog broja z i zovemo je realna osa, dok na y–osu nanosimo imaginarni dio kompleksnog broja i zovemo je imaginarna osa.

[1] Johann Carl Friedrich Gauß (30. april 1777.–23. februar 1855.godine) bio je njemački matematičar koji je dao doprinos u mnogim oblastima matematike, kao npr. teorija brojeva, algebra, statistika, analiza, diferencijalna geometrija i dr.



Slika 8.1: Predstavljanje tačke $M(x,y)$ u Gaußovoj ravni

Posmatrajmo proizvoljan kompleksni broj $z = x + yi$ predstavljen na Slici 8.1 tačkom $M(x,y)$. Funkcija $|\cdot| : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definisana sa

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

je modul kompleksnog broja $|z|$ (ili ρ). Kako je $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$, to je $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$. Geometrijski modul $|z|$ kompleksnog broja z predstavlja rastojanje tačke $M(x,y)$ od koordinatnog početka $(0,0)$.

Posmatrajmo funkciju $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto (-\pi, \pi]$ definisanu sa

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0 \wedge y \geqslant 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0 \wedge y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y < 0, \end{cases} \tag{8.2}$$

gdje je $z = x + yi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Broj $\arg z$ je glavna vrijednost ili glavni argument kompleksnog broja z.

Napomena 8.3.

Argument kompleksnog broja $\arg z$ u zadacima označavaćemo sa φ i predstavlja vrijednost ugla, čiji je jedan krak pozitivna realna osa a drugi krak je poluprava koja polazi iz koordinatnog početka i prolazi kroz tačku $M(x,y)$ (Slika 8.1).

Primjer 8.3 (Praktično određivanje ugla φ).

Odrediti vrijednost modula $|z|$ i argumenta $\arg z$, tj. φ, kompleksnog broja $|z|$, ako je (a) $z = 4\sqrt{3} + 4i$; (b) $z = -4\sqrt{3} + 4i$; (c) $z = -4\sqrt{3} - 4i$; (d) $z = 4\sqrt{3} - 4i$; (e) $z = 4\sqrt{3}$; (f) $z = 4i$; (g) $z = -4\sqrt{3}$; (h) $z = -4i$.

Rješenje:

Vrijedi (vidi Sliku 8.2)

(a) $x = 4\sqrt{3}$, $y = 4$, pa je $|z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$, dok je $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, Slika 8.2 gore desno.

(b) $x = -4\sqrt{3}$, $y = 4$, Slika 8.2 gore lijevo, $|z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$, sa slike je $\varphi = \pi - \alpha$, iz trougla $\triangle AOB$ je $\alpha = \operatorname{arcctg} \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, pa je na kraju $\varphi = \frac{5\pi}{6}$;

(c) $x = -4\sqrt{3}, y = -4$, sa Slike 8.2 dole lijevo je $\varphi = \pi + \alpha$, dok je $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, te je $\varphi = \frac{7\pi}{6}$;

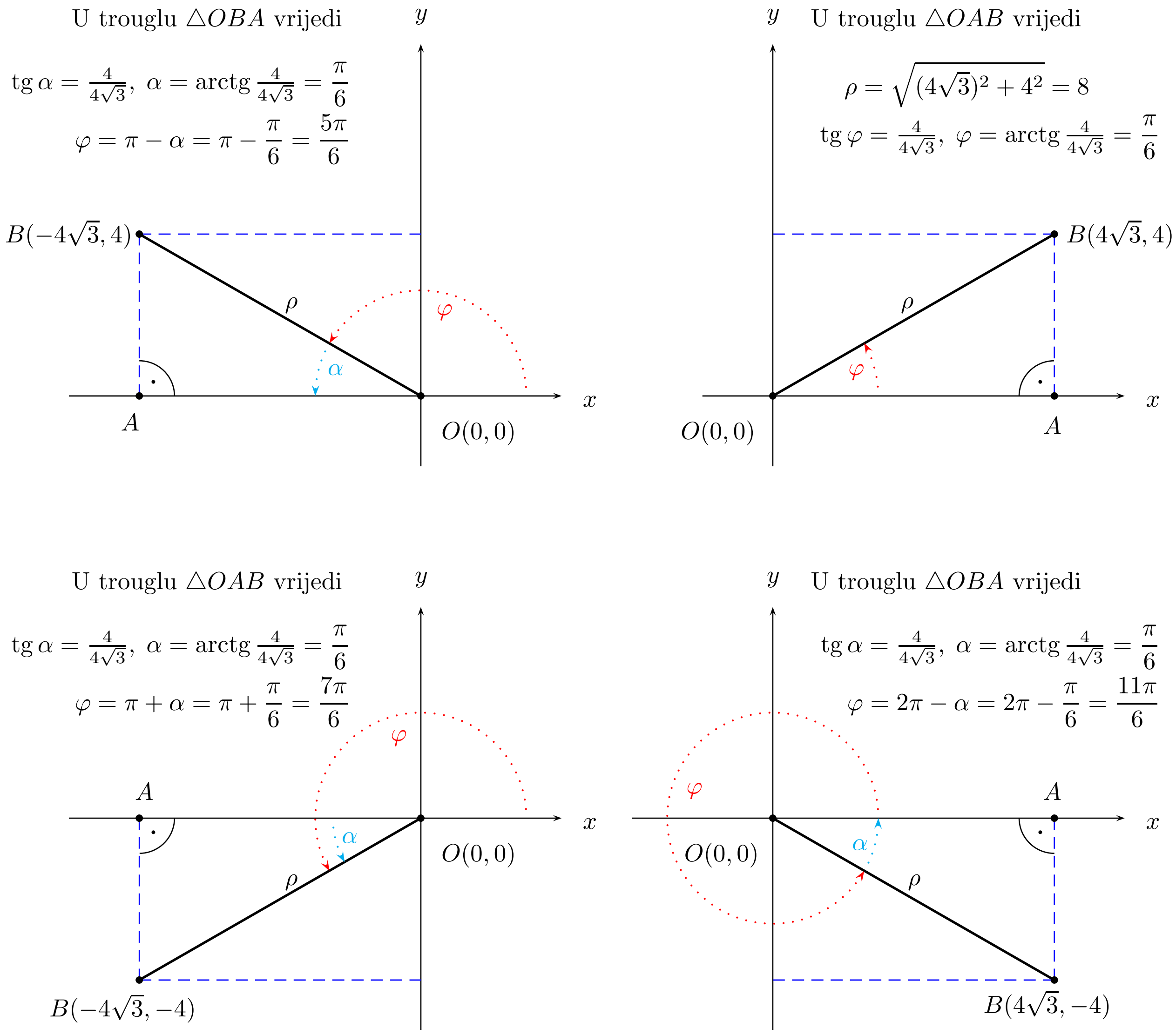
(d) $x = 4\sqrt{3}$, $y = -4$, sa Slike 8.2 dole desno je $\varphi = 2\pi - \alpha$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{11\pi}{6}$;

(e) $x = 4\sqrt{3}$, $y = 0$, $|z| = 4\sqrt{3}$, $\varphi = 0$;

(f) $x = 0,\ y = 4i,\ |z| = 4,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$;

(g) $x = -4\sqrt{3},\ y = 0,\ |z| = 4\sqrt{3},\ \varphi = \pi$;

(h) $x = 0,\ y = -4i,\ |z| = 4,\ \varphi = \frac{3\pi}{2}$.



Slika 8.2: Određivanje ugla

8.3 Trig. oblik kompleksnog broja

Za $z = x + yi$, $\rho = |z|, \theta = \arg z$ sa Slike 8.1 iz trougla $\triangle OAM$ vrijedi

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0.$$

Ako je $x = 0$, $y > 0$, tada je $\arg z = \frac{\pi}{2}$, odnosno za $x = 0$, $y < 0$, je $\arg z = -\frac{\pi}{2}$. Sada dobijamo trigonometrijski oblik kompleksnog broja $z = x + yi$

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta.)}$$

8.3.1 Množenje i dijeljenje kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku

Neka su data dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ i $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Vrijedi

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)] \cdot [\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)] \\ &= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i(\sin(\theta_1+\theta_2))]. \end{aligned}$$

Množenje dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku vršimo po formuli

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} \cdot \frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]. \end{aligned}$$

Dijeljenje dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku vršimo po formuli

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]}$$

PRIMJER 8.4.

Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 8(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$, $z_3 = 2(\cos 121^0 + i\sin 121^0)$, $z_4 = \cos 14^0 + i\sin 14^0$. Izračunati $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3 \cdot z_4}$.

Rješenje:

Vidi Sliku 8.3, prvo prevedemo z_1 u trigonometrijski oblik kompleksnog broja, sa Slike 8.3 je $z_1 = \sqrt{2}(\cos 45^0 + i\sin 45^0)$, pa je sada

$$\begin{aligned} \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3 \cdot z_4} &= \frac{\sqrt{2}(\cos 45^0 + i\sin 45^0) \cdot 8(\cos 150^0 + i\sin 150^0)}{2(\cos 121^0 + i\sin 121^0) \cdot (\cos 14^0 + i\sin 14^0)} \\ &= \frac{8\sqrt{2}(\cos 195^0 + i\sin 195^0)}{2(\cos 135^0 + i\sin 135^0)} = 4\sqrt{2}[\cos(195^0 - 135^0) + i\sin(195^0 - 135^0)] \\ &= 4\sqrt{2}(\cos 60^0 + i\sin 60^0). \end{aligned}$$

Rezultat možemo napisati i u algebarskom obliku kompleksnog broja

$$\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3 \cdot z_4} = 4\sqrt{2}(\cos 60^0 + i\sin 60^0) = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}i.$$

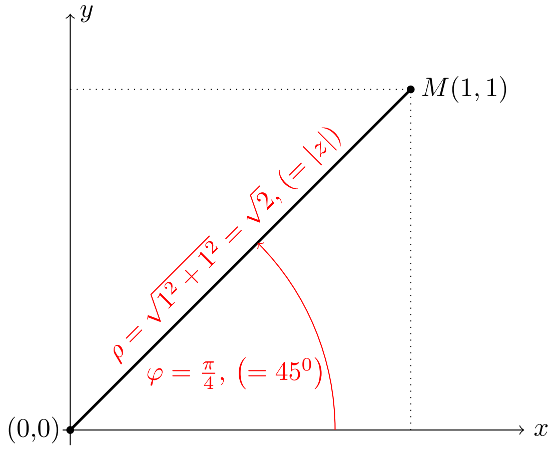
8.3.2 Eksponencijalni kompleksnog broja

Ako uvedemo oznaku $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, kompleksni broj $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ možemo pisati u obliku

$$\boxed{z = \rho e^{\theta i}}$$

ovaj oblik zovemo eksponencijalni ili Eulerov[2] oblik kompleksnog broja.

[2] Leonhard Euler (15. april 1707.–18. septembar 1783. godine) bio je švajcarski matematičar, fizičar, astronom, logičar, inžinjer. Dao veliki doprinos u mnogim oblastima matematike.



Slika 8.3: Kompleksni broj $z_1 = 1 + i$ u Gaußovoj ravni

Vrijedi

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{\theta_1 i} \cdot \rho_2 e^{\theta_2 i} = \rho_1 \rho_2 e^{(\theta_1+\theta_2)i}$$

i

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{\theta_1 i}}{\rho_2 e^{\theta_2 i}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{(\theta_1-\theta_2)i}.$$

8.3.3 Stepenovanje kompleksnog broja

Neka je $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Na osnovu matematičke indukcije[3] slijedi

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \ldots \cdot \rho_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)].$$

Ako je $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$, onda je $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n$ i $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n$, dobijamo

$$\boxed{z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

ili u eksponencijalnom obliku

$$\boxed{z^n = \rho^n e^{n\theta i}}$$

Moivreov (Moavrov) obrazac (ili formula)

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.}$$

8.3.4 Korjenovanje kompleksnog broja

Neka je data jednačina

$$z^n = u,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$, a u je kompleksan broj različit od nule. Tada pišemo

$$z = \sqrt[n]{u}.$$

Potrebno je za broj u odrediti kompleksni broj z. Neka je $u = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Tada je $(\rho(\cos\theta + i\sin\theta))^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, pa na osnovu jednakosti kompleksnih brojeva $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, odakle je

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

[3] Princip matematičke indukcije: Jedan iskaz $P(n)$ istinit je za svaki prirodan brod n, 1) Ako je istinit za prirodan broj 1; 2) Ako implikacija $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ važi za svaki prirodan broj n.

Međutim, različite vrijednosti cijelih brojeva ne daju u suštini različite argumente. Ako uzmemo da je $k = n$ biće $\frac{\varphi+2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$, ista se vrijednost dobije za $k = 0$. Slično, dobijamo da je $\frac{\varphi+2(n+k)\pi}{n} = \frac{\varphi+2k\pi}{n} + 2\pi$. Dakle, poslije n uzastopnih cijelih brojeva kompleksni brojevi se ponavljaju, pa imao n različitih vrijednosti $\sqrt[n]{u}$, a to su

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, \ldots, n-1$$

ili u eksponencijalnom obliku

$$z_k = \sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{r}e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\ k = 0, \ldots, n-1.$$

Sva ova rješenja leže na kružnici poluprečnika $\sqrt[n]{r}$ i čine tjemena pravilnog n–to ugla, čije je jedno tjeme (z_0) sa argumentom $\frac{\varphi}{n}$, a za svako sljedeće tjeme argument se povećava za $\frac{2\pi}{n}$.

Primjer 8.5.

Dat je kompleksni broj $z = i^{81} + i^{43} + \frac{(-1-i)^{80}}{2^{40}} + i^{19}$. Izračunati $\sqrt[3]{z}$.

Rješenje:

Izračunajmo prvo $\frac{(-1-i)^{80}}{2^{40}}$, prevedemo ovaj kompleksni broj u trigonometrijski oblik, sa Slike 8.4a je

$$\begin{aligned}\frac{(-1-i)^{80}}{2^{40}} &= \frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^{80}}{2^{40}}\\ &= \frac{2^{40}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\cdot 80\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\cdot 80\right)\right]}{2^{40}} = \cos 100\pi + i\sin 100\pi = 1,\end{aligned}$$

pa je sada

$$z = i^{81} + i^{43} + \frac{(-1-i)^{80}}{2^{40}} + i^{19} = i^{4\cdot 20+1} + i^{4\cdot 10+3} + 1 + i^{4\cdot 4+3} = 1 - i.$$

Koristeći Sliku 8.4b pretvorimo kompleksni broj iz algebarskog u trigonometrijski oblik, i dobijamo

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

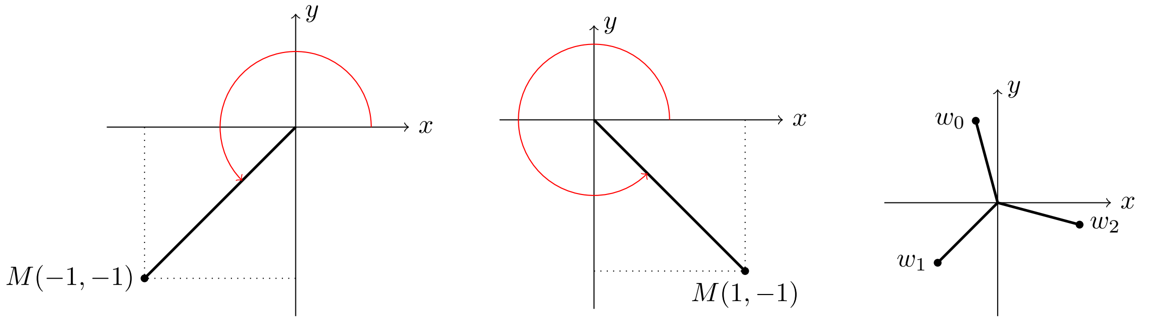
Sada je

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right),$$

te rješenja w_0, w_1 i w_2 dobijamo uvrštavajući $k = 0, 1, 2$ u prethodnu jednakost, pa vrijedi

$$\begin{aligned} k &= 0\\ w_0 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right),\\ k &= 1\\ w_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right),\\ k &= 2\\ w_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right).\end{aligned}$$

Rješenja su predstavljena na Slici 8.4c.



(a) Kompleksni broj $z = -1 - i$ (b) Kompleksni broj $z = 1 - i$ (c) Rješenje jednačine $\sqrt[3]{z}$

Slika 8.4: Gaußova ravan u kojoj su predstavljeni kompleksni brojevi $-1-i$, $1-i$, w_0, w_1 i w_2

8.4 Zadaci za vježbu

1. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 2i$. Izračunati
   (a) $z_1 + z_2$, (b) $z_1 - z_2$, (c) $z_1 \cdot z_2$, (d) $\frac{z_1}{z_2}$, (e) $|z_1|$, (f) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$, (g) $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$, (h) $\mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.
2. Izračunati
   (a) $i^{25} + (-i)^{50} + i^{40} + i^{62} + i^{83}$, (b) $\dfrac{1+3i}{(-1+i)^2} + \dfrac{(-4+i)(-4-i)}{1+i}$, (c) Za $z = 1 - 3i$, $\dfrac{2z - 2z\overline{z}}{z\overline{z} + i}$.
3. Izračunati
   (a) x i y iz jednačine $3x + xi - 2y = 12 - yi - i$, (b) z iz uslova $(2+i)z + 2z - 3 = 4 - 6i$.
4. Odrediti kompleksan broj z iz uslova $|z-4| = |z-2| \wedge |z-3| = |z-2i|$.
5. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i$, $z_2 = -6\sqrt{3} - 6i$, $z_3 - 5 + 5i$.

   (a) Pretvoriti date kompleksne brojeve iz algebarskog u trigonometrijski oblik;
   (b) Izračunati $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$;
   (c) Izračunati $\dfrac{z_3^{40} \cdot z_2^{60}}{z_2^{30}}$.
6. Kompleksni broj $z = \frac{1+4i+i^{29}}{2-3i}$ napisati u trigonometrijskom obliku;
7. Izračunati
   (a) $\sqrt[3]{-3-\sqrt{3}i}$, (b) $\sqrt[4]{3-3\sqrt{3}i}$, (c) z ako je $z^3 = 2 - 2\sqrt{3}i$.
8. Izračunati kompleksan broj z iz uslova $\mathrm{Re}\left(\frac{z-\overline{z}}{2}\right) + 10i\,\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}-1}{3+i}\right) = x + 1 + 2i$, a zatim izračunati $\sqrt{z}$.
9. Riješiti jednačinu $z^3 + 2 + 2i = 0$.
10. Zadaci za vježbu [4]

    (a) Riješiti jednačinu $z^5 - \sqrt{3} + i = 0$.
    (b) Dat je kompleksan broj $z = 4\sqrt{3} - 12i$, izračunati $\sqrt[4]{z}$.
    (c) Dat je kompleksan broj $z = 6 - 2\sqrt{3}i$, izračunati $\sqrt[4]{z}$.
    (d) Riješiti jednačinu $z^5 - \sqrt{3} + i = 0$.
    (e) Ako je $z = 5 - 5\sqrt{3}i$, odrediti z^5 i $\sqrt[3]{z}$.
    (f) Riješiti jednačinu u skupu racionalnih brojeva $4z^3 + 7\sqrt{3}i = 7$.
    (g) U skupu kompleksnih brojeva riješiti jednačinu $z^4 - 3\sqrt{3} = -3i$.
    (h) U skupu kompleksnih brojeva riješiti jednačinu $z^4 + 2i = \sqrt{3} - i$.
    (i) Riješiti jednačinu $z = \sqrt{\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}}$.

[4] Malo teži zadaci

(j) Riješiti jednačinu $z = \sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$.

(k) U skupu kompleksnih brojeva riješiti jednačinu $\sqrt{2}z^3 + 2i = 3i + 1$.

(l) Izračunati kompleksan broj z iz uslova $i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{z}+2}{1+i}\right) + \mathrm{Im}\left(\frac{2\overline{z}+z}{2}\right) + z = 1 + 3i$,

(m) Izračunati kompleksan broj z iz uslova $\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{z}}{z_1}\right) = \frac{2-3\sqrt{3}}{13}$ i $\mathrm{Im}\left(\frac{z\cdot z_1}{2}\right) = \frac{-3-2\sqrt{2}}{2}$, gdje je $z_1 = 2 - 3i$, a zatim izračunati z^{12}.

(n) Izračunati kompleksan broj z iz uslova $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$ i $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$.

(o) Izračunati z i $\sqrt[3]{z}$ ako je $|z-2| + \overline{z}\,\mathrm{Re}(2z) + z^2 - 4z = 4i$.

(p) Izračunati z^{50} ako je $2\overline{z} - i\,\mathrm{Re}\left(z + \frac{1}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} - i$.

(q) Izračunati $\sqrt{z}$ ako je $\frac{2}{i}\left(z(2-i) + \frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{2}\right) = -3(1 + 2\sqrt{3} + 2i)$.

(r) Pokazati da $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z} - \frac{2}{3}\right) = 0$ predstavlja jednačinu kružnice.

Literatura i reference

[1] M. Crnjac, D. Jukić and R. Scitovski. *Matematika.* Ekonomski fakultet Osijek, R.Hrvatska, 1994.

[2] F. Dedagić. *Uvod u višu matematiku.* Univerzitet u Tuzli, Tuzla, BiH, 1997.

[3] D. Jukić and R. Scitovski. *Matematika 1.* Prehrambeno tehnološki fakultet i Elektrotehnički fakultet Osijek, R. Hrvatska, 1998.

[4] D. Jukić and R. Scitovski. *Matematika 1.* STUDIO HS Internet d.o.o., Osijek, R. Hrvatska, 2017. ISBN: 978-953-6032-18-1.

[5] D.S. Mitrinović, D. Mihailović and P.M. Vasić. *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija.* Beogradski izdavački zavod, Beograd, SFRJ, 1973.

[6] M. Radić. *Algebra.* Školska knjiga, Zagreb, SFRJ, 1978.

[7] K.H. Rosen. *Elementary number theory and its applications.* Addison–Wesley publishing company, Reading, Massachusetts, USA, 1993. ISBN: 0201578891.

[8] P.M. Ušćumlić M.P. i Miličić. *Elementi više matematike.* IP "Nauka", Beograd, Srbija, 2002.

Indeks i pojmovi

algebarske strukture
- distributivnost, 37
- grupa, 37
- komutativna ili Abelova grupa, 37
- polje, 38
- prsten, 38
- tijelo, 38

binarna operacija, 36
- grupoid, 36
- osobine, 36

Dekartov proizvod, 18

iskaz, 6

kompleksni brojevi, 57
- algebarski oblik, 58
- argument, 60
- eksponencijalni ili Eulerov oblik, 62
- imaginarna jedinica, 57
- imaginarni dio, 58
- jedinica, 57
- konjugovano kompleksni broj, 58
- korjenovanje, 63
- množenje, 57
- modul, 60
- Moivreov obrazac ili formula, 63
- nula, 57
- operacije: množenje, dijeljenje , 61
- operacije: sabiranje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, 59
- realni dio, 58
- sabiranje, 57
- stepenovanje, 63
- trigonometrijski oblik, 61

kvantifikatori, 12

logičke operacije
- disjunkcija, 8
- dovoljan uslov, 9
- ekskluzivna disjunkcija, 8
- ekvivalencija, 9
- implikacija, 9
- iskazna formula, 10
- konjukcija, 7
- negacija, 7
- posljedica, 9
- potreban uslov, 9
- premisa, 9
- tautologija, 10

relacija
- binarna, 21
- ekvivalencije, 24
- inverzna, 23
- kompozicija, 23
- osobine, 24
- poretka, 25
- predstavljanje, 22

sistemi, 54
- beskonačno mnogo rješenja, 54
- ekvivalentni, 54
- homogen, 54
- jedinstveno rješenje, 54
- koeficijenti, 54
- nehomogen, 54
- nema rješenja, 54
- nepoznate, 54
- nesaglasan, 54
- rješenje, 54
- saglasan, 54

skup
- cijelih brojeva, 13
- disjunktni skupovi, 16
- iracionalnih brojeva, 13
- kompleksnih brojeva, 13
- kompleksnih brojeva, 57
- otvoreni interval, 13
- presjek skupova, 16
- prirodnih brojeva, 13
- racionalnih brojeva, 13
- razlika skupova, 17
- realnih brojeva, 13
- realnih pozitivnih brojeva, 13
- unija skupova, 16
- zatvoreni interval ili segment, 13

uređena trojka, 18

uređeni par, 18

Zadaci za vježbu
- funkcije, 35
- Kompleksni brojevi, 65
- Logika, 12
- Matematička indukcija, 52
- operacije, 39
- relacije, 27
- Skupovi, 20